Karſtens,
Mathematik
5. Theil.

Math. U.
88
-5-

BIBLIOTHECAE
ELECTORALIS
MONACENSIS.
Ch. Wink. del.
Söckler sc. 1779.

<36601373530013
<36601373530013
Bayer. Staatsbibliothek

Math Un 68 -5

Matheſis. Syſtemata & methodi

131.

R

Lehrbegriff
der geſamten
Mathematik.

Aufgeſetzt
von
Wenceſl. Joh. Guſtav Karſten,

er Phil. Doctor, Hofr. u. Prof. der Mathem. und Naturlehre auf
er Univerſität in Halle, der Churf. Akad. der Wiſſenſch. in München,
er Holländisch. Geſellſch. der Wiſſenſch. in Harlem, und der Königl.
Dänisch. Geſellſch. in Copenhagen, auch der öconom. Geſellſch. in
Leipzig u. der naturforſchenden Geſellſch. in Halle Mitgliede.

Der Fünfte Theil.

Die Hydraulik.

Zweyte verbeſſerte Auflage.

Greifswald,
gedruckt und verlegt von Anton Ferdinand Röſe, 1794.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorbericht
zur zweyten Auflage.

Bei dieſer neuen Auflage des 5ten Theils ſind, wie bei der des 3ten und 4ten Theils vom Lehrbegriffe, die meiner Einſicht nach erläuternden, von der Hand meines verſtorbenen Vaters abgefaßten, Marginalien, nicht nur,

ſondern auch die den 6ten Theil der erſten Ausgabe, angehängten hiehergehörigen Zuſätze, richtig von mir eingeſchaltet, und die ſich eingeſchlichene Druckfehler, mit möglichſter Genauigkeit verbeſſert worden. In dieſer Rückſicht wird ſelbige auch nicht blos als eine neue, ſondern wirklich als eine verbeſſerte Ausgabe, angeſehen werden können.

Berlin im April Monat d. J. 1792.

D. L. G. Karſten.

Vorrede

Vorrede des Verfaſſers.

Die Hydraulik war bey den Alten ein beſonderer Theil der ehedem ſo genannten Mechanik, oder eigentlich der Maſchinen-Lehre: ſie beſchäftigte ſich mit der Beſchreibung ſolcher Maſchinen, welche das Waſſer aus der Tiefe in die Höhe zu bringen dienen. Jetzt iſt die Hydraulik, ſo wie die ehemals ſo genante Mechanik, eine viel allgemeinere Wiſſenſchaft geworden, und die Mechanik und Hydraulik der Alten ſind in Vergleichung mit den Wiſſenſchaften, welche jetzt dieſe Namen führen, ohngefehr das, was vermuthlich die Feldmeßkunſt der alten Egypter in Vergleichung mit der Geometrie der Griechen geweſen iſt. Die allgemeine Theorie von der Bewegung flüßiger Maſſen, und von den Geſetzen, nach welchen dieſe Bewegung durch allerley Kräfte der Natur auf mannigfaltige Art geändert wird, heiſt jetzt die Hydraulik. Wenn man den allgemeinen Namen: Mechanik der flüßigen Körper, brauchen wollte, ſo würde die Hydraulik der Alten eine practiſche Mechanik flüßiger Körper, ein beſonderer Theil der Maſchinenlehre ſeyn. Wenn ein feſter Körper von beſtimmter Geſtalt und Gröſſe in Bewegung iſt, ſo erfordert es oft eine ziemlich weitläuftige Unterſuchung, nach welchen Geſetzen ſich die Bewegung ändere, weil man alsdenn allererſt die Bewegung des ganzen vollſtändig kennt, wenn man den Weg

und die Geſchwindigkeit aller einzelnen Theile anzugeben weiß. Wenn aber die Kräfte, welche auf den Körper würken, den Zuſammenhang der Theile nicht zerreiſſen, ſo behalten alle Theile des Körpers während der Bewegung einerley Lage gegen einander, und die Bewegung des ganzen wird durch die Bewegung dreyer Puncte deſſelben, die nicht in grader Linie liegen, beſtimmt. Die Bewegung einer flüßigen Maſſe iſt weit mehrern Verſchiedenheiten unterworfen, weil die Geſtalt der ganzen Maſſe während der Bewegung mancherley Aenderungen leiden, ja jedes Theilchen ſeine eigene Bewegung haben kann, die von der B wegung der übrigen nicht ſo abhängt, wie die Bewegungen der Theilchen eines feſten Körpers von einander abhängen. Jedes Theilchen der flüßigen Maſſe iſt gewöhnlich der Würkung ſehr vieler bewegenden Kräfte ausgeſetzt, und die gröſte Schwierigkeit bey theoretiſchen Unterſuchungen über die Bewegungen flüßiger Maſſen beſtehet häufig darin, daß man dieſe Kräfte nicht alle kennet, und ihre Würkungen deswegen nicht mit Sicherheit in Rechnung bringen kann. Indeſſen müſſen doch die allgemeinen Geſetze, nach welchen die Bewegung der kleinſten Theilchen feſter Körper von bewegenden Kräften geändert wird, auch bey den kleinſten Theilchen flüßiger Maſſen ihre Anwendung

finden.

finden. Wenn ein phyſiſcher Punct ein ſo kleines Theilchen einer körperlichen Maſſe heiſſen ſoll, bey dem ſich weder Geſtalt noch Gröſſe mehr angeben läſt, der aber doch noch das hat, was man Trägheit nennt; ſo iſt die Vorſtellung, daß alle, ſowohl feſte als flüßige Maſſen, aus dergleichen Puncten zuſammen geſetzt ſind, wenigſtens ein Hülfsmittel des Verſtandes bey phyſiſch-mathematiſchen Unterſuchungen; und die Theorie von der Bewegung phyſiſcher Puncte macht alsdenn die allgemeine Mechanik aus, welche Hr. Euler in ſeiner Mechanica ſive motus ſcientia analytice expoſita Petrop. 1736. ſehr umſtändlich abgehandelt hat. Es iſt eben nicht nothwendig, den Inbegrif dieſer Lehren als eine beſondere Wiſſenſchaft vorzutragen; und ich habe diejenigen davon, welche bey allen mechaniſchen Unterſuchungen die Gründe abgeben, in den acht erſten Abſchnitten der Mechanik feſter Körper vorgetragen. So wie nun bey der Anwendung dieſer allgemeinen Lehren auf die Betrachtung der Bewegung feſter Körper die Geſtalt und Gröſſe derſelben mit in Erwegung gezogen werden muß: ſo muß auch bey der Anwendung eben dieſer allgemeinen Theorien auf die Betrachtung der Bewegung flüßiger Maſſen die Geſtalt und Gröſſe der letzten in Rechnung gebracht werden. Auf ſolche Art haben beide Theile der

Mechanik ihre gemeinſchaftlichen Gründe, worauf ſie beruhen, und machen alsdenn ein einziges zuſammenhängendes Syſtem aus.

Dies iſt der Begrif, den ich mir von der Hydraulik gemacht habe: und ich bin bemühet geweſen, ſie demſelben gemäß auszuarbeiten. Kenner wiſſen es, daß die Hydraulik, in dieſem Umfange genommen, noch eine ganz neue Wiſſenſchaft ſey, daß etwa nur vor 40 Jahren Herr Johann Bernoulli zuerſt gewieſen habe, wie ſich die Fundamentalgleichungen der allgemeinen Mechanik bey Unterſuchungen über die Bewegung flüßiger Maſſen brauchen laſſen, daß um eben die Zeit Herr Daniel Bernoulli einen ſehr glücklichen Verſuch gemacht habe, das Syſtem dieſer Wiſſenſchaft auf den Grundſatz von Erhaltung der lebendigen Kräfte zu bauen, und daß Herr Euler nach der Zeit die Methode des ältern Herrn Bernoulli zu gröſſerer Vollkommenheit gebracht habe. Hiezu ſind auch noch die Bemühungen des Hrn. d'Alembert gekommen, der aber wiederum einen andern Weg genommen hat. Für mich ſind die Methoden der Herren Joh. Bernoulli und Euler am meiſten überzeugend geweſen, und die Formuln des letztern ſchienen mir für die Ausübung und Anwendung auf beſondre Fälle am bequemſten zu ſeyn; deswegen habe ich geſucht, ein vollſtändiges Syſtem den Grundſätzen dieſer Männer

gemäß

gemäß zu liefern, ſo weit es die dabey noch übrigen Schwierigkeiten zulaſſen. Weil mir übrigens die Anwendungen dieſer allgemeinen Unterſuchungen auf die Maſchinenlehre beſonders wichtig ſchienen, ſo bin ich dadurch bewogen worden, mich etwas umſtändlich auf dahin gehörige beſondre Unterſuchungen einzulaſſen, zumahl, da dergleichen Anwendungen, wenn ich die dahin gehörigen vortreflichen Aufſätze des H. **Euler** ausnehme, faſt überall noch fehlen.

Wir haben in deutſcher Sprache keinen Mangel an Büchern, die von allen Arten der gebräuchlichſten Maſchinen ziemlich umſtändliche Nachricht geben: doch kenne ich bisher keinen deutſchen Original-Schriftſteller, der das theoretiſche der Maſchinenlehre vollſtändig abgehandelt, und auf die von ihm beſchriebenen Maſchinen Anwendungen davon gemacht hätte. **Leupold** hat darin vor andern ähnlichen Schriftſtellern groſſe Vorzüge, daß er vielen Eifer beweiſet, die von ihm beſchriebenen Maſchinen nach richtigen mechaniſchen Gründen zu beurtheilen: doch iſt ſeine Theorie noch zu mangelhaft. Was indeſſen den deutſchen hieher gehörigen Orignal-Schriftſtellern noch fehlt, das erſetzt die Ueberſetzung von dem vortreflichen Werk des Herrn **Belidor** über die Waſſerbaukunſt aufs vollkommenſte. Noch hat ſich, ſo viel ich weis, kein Schriftſteller die ungemeine Mühe gegeben,

alles dasjenige, worauf es bey der Anlegung einer Maſchine ankommt, ſo ſorgfältig zu prüfen, und in ſo vielen würklich vorhandenen Beyſpielen die Anwendungen davon zu zeigen. Hätte Hr. **Belidor** zwanzig bis dreyßig Jahre ſpäter geſchrieben, und ſich die binnen der Zeit neu erfundenen Theorien allenthalben zu Nutze machen können, ſo wäre ſein Werk ohne Zweifel das vollkommenſte in ſeiner Art geworden. Nun aber hat es noch hie und da Fehler der Theorie, die man verbeſſern muß, nicht um einen ſo ſehr verdienten Schriftſteller zu tadeln, ſondern um auf der Bahn, welche er ſo glücklich gebrochen hat, weiter zu gehen. Seine Theorie von den Pumpenkünſten iſt die richtigſte, die man bis dahin gehabt hat, da Hr. **Euler** ſie in ein neues Licht ſetzte, ja viel richtiger als diejenige, welche bisher die meiſten practiſchen Schriftſteller beybehalten haben: indeſſen iſt ſie nicht ohne Fehler, und ich habe Hrn. **Eulers** neuere Unterſuchungen gebraucht, den Belidorſchen Vortrag zu verbeſſern. Es iſt nachgrade wohl nöthig, dergleichen neue Erweiterungen der practiſch-mathematiſchen Wiſſenſchaften, welche groſſentheils noch in den Schriften der Academien der Wiſſenſchaften, und andern einzelnen Abhandlungen zerſtreuet ſind, in die Lehrbücher mit aufzunehmen, ſo wie man die Lehrbücher der theoretiſchen Mathematik bereits mit nuen Theorien

ſehr

ſehr bereichert hat: und dies um ſo mehr, weil zuweilen Schriftſteller, die in Anſehen ſtehen, noch ſo reden, als wenn der Zuſtand der Wiſſenſchaft ſich ſeit 40 Jahren gar nicht geändert hätte.

Herr **Euler** hat ſeine Unterſuchungen über die Pumpenkünſte nur auf die Druckwerke eingeſchränkt, und der damit häufig verbundenen Saugwerke nur beyläufig erwehnt. Hr. **Belidor** aber läſt ſich auch ziemlich umſtändlich über die Saugwerke ein: doch bedarf ſeine Theorie davon mancher Verbeſſerungen. Ich habe über die Theorie der Saugwerke ein paar Aufſätze der Churfl. Bayerſchen Academie der Wiſſenſchaften zu München überreicht, die, ſo viel ich weiß, bisher noch nicht gedruckt ſind. Hier habe ich das wichtigſte von ihrem Inhalt brauchen müſſen, um die Theorie von den Pumpenkünſten, die gewöhnlich vereinbarte Saug- und Druckwerke ſind, vollſtändig zu machen. Dabey habe ich Hrn. **Eulers** Vortrag zu verkürzen geſucht, und bequemere Formuln für die Ausübung gegeben, weil mir es ſo vorgekommen iſt, als wenn die Furmul, welche unten im 360 §. n. II. unmittelbar aus der allgemeinen Theorie folgt, alles enthalte, was Hr. **Euler** durch müheſamere Rechnungen ſucht.

Die Feuerſprützen ſind zwar auch eine Art der Druckwerke, allein von ganz andrer Natur, als diejenigen, welche das Waſſer nur in Röhren zum Steigen bringen ſollen, um es in

einem

einem erhaben liegenden Behälter zum anderweitigen Gebrauch zu ſammlen. Herrn Eulers Formuln ſind eigentlich nur auf die letztere Art der Druckwerke eingeſchränkt, und für die Feuerſprützen nicht brauchbar, obgleich die allgemeine Differentialgleichung für beyde Arten der Druckwerke ihre Anwendung findet. Mir iſt niemand bekannt, der die Theorie von dieſen ſo ſehr gemeinnützlichen Maſchinen beſonders unterſucht hätte, deswegen habe ich ſie mit den nunmehro bekannten richtigen Gründen der Hydraulik in Verbindung zu bringen geſucht, zumahl da das Problem von vortheilhafter Anordnung einer Feuerſprütze ſeit kurzen in unſern Gegenden merkwürdig geworden iſt.

Beym Vortrag der bisher vorläufig erwehnten für die Ausübung ſo wichtigen Lehren habe ich mich nicht ſo einſchränken können, daß dieſer Band die ganze Hydraulik gefaſſet hätte. Deswegen habe ich die Lehren von der Zurückwürkung des Waſſers, nebſt der Theorie der übrigen gebräuchlichſten hydrauliſchen Maſchinen, in den folgenden ſechsten Band bringen müſſen, welcher den Reſt der Hydraulik nebſt der Pneumatik enthalten, und die mechaniſchen Wiſſenſchaften beſchlieſſen wird. Ich werde unter andern noch über die Waſſerſchraube einige Unterſuchungen anſtellen, weil es mir vorkömmt, als wenn des Herrn Hennerts Vortrag in der Berlinſchen Preisſchrift erheblichen

Erin=

Erinnerungen ausgeſetzt iſt. Und weil mir auſſer Hrn. Belidor niemand bekannt iſt, der die mancherley Arten von Mühlen nach einer richtigen Theorie beurtheilet, und ſichere Regeln, vortheilhafte Anordnungen davon anzugeben, vorgeſchrieben hätte; ſo werde ich die Hydraulik mit Betrachtung der vornehmſten Arten von Mühlen beſchlieſſen. Aus Beyers Mühlen-Schauplatz lernt man ſie kennen, wie ſie bisher in Deutſchland gewöhnlich eingerichtet ſind: man lernt aber keine Maximen, nach welchen man gute und ſchlechte Anordnungen beurtheilen muß.

Ich bin ſehr vergnügt geweſen, als ich die im vorigen Jahr vom Hrn. Hofrath Käſtner herausgegebene Hydrodynamik erhielte: und ob ich gleich mit meiner Arbeit ganz fertig war, ſo habe ich doch dies ſchöne Buch noch vor dem Abdruck des meinigen damit ſorgfältig verglichen. Bey Materien, über die ich mich nach meiner gegenwärtigen Abſicht nicht ausführlich einlaſſen konnte, und die in dem Käſtneriſchen Werk umſtändlicher vorgetragen ſind, habe ich darauf verwieſen. Ohngefehr die erſte Hälfte meines Buchs hat mit dem Käſtneriſchen einerley Inhalt, und da ich ſehe, daß Hr. Hofr. Käſtner ſich mit den Anwendungen auf die Maſchinenlehre nicht beſchäftiget hat; ſo kann ich mit einigem Vertrauen meine Arbeit öffentlich bekannt machen, die nunmehro ſonſt überflüßig ſcheinen könnte, weil der Mangel

eines

eines Lehrbuchs der Hydraulik in unſrer Sprache durch das Käſtneriſche ſchon erſetzt iſt. Wenn wir zuweilen über einen ähnlichen Gegenſtand ähnliche Gedanken geäuſſert haben, ſo wird es auch nicht unerwartet ſeyn, daß unſere Gedanken in einer Wiſſenſchaft, worin noch ſo viele Schwierigkeiten obwalten, nicht allemahl übereinkommen. Dahin gehört unter andern Kleinigkeiten, die ich im Buch ſelbſt angemerkt habe, vornehmlich die Art, wie ein jeder des Hrn. **Bernoulli** Gründe der Hydraulik vorträgt, und gegen des Hrn. **d'Alemberts** Erinnerungen vertheidiget. Der Unterſcheid wird vornemlich darauf beruhen, daß der Satz in H. Hofr. **Käſtners** Hydrodynamik 480 §. n. III. 447 S. bey ihm eine Prämiſſe, bey mir (M. ſ. unten den 201 §.) ein Schlußſatz iſt. H. Hofr. **Käſtner** ſagt von dieſem Satz, daß er ihm noch nicht ſo überzeugend vorkomme, als eine geometriſche Wahrheit: ich meyne, daß dieſer Satz ſo überzeugend wird, wenn man des H. **Bernoulli** Theorie ſo vorträgt, wie ich ſie im 195 u. f. §§. auseinander geſetzt habe. Wofern ich darin Recht habe, ſo hat H. Joh. **Bernoulli** dasjenige würklich geleiſtet, was H. H. **Käſtner** von demjenigen verlangt, der unſre Kenntniß von der Bewegung des Waſſers ſo überzeugend und deutlich machen will, als die Theorie vom Mittelpunct des Schwunges iſt.

Bützow im März des Jahrs 1770.

Wencesl. Joh. Guſt. Karſten.

Inhalt des fünften Theils.

Die Hydraulik
oder
die Theorie von der Bewegung flüßiger Körper.

Der I. Abſchnitt. Allgemeine Betrachtungen über die Bewegung des Waſſers in Gefäßen und Röhren.

Der II. Abſchnitt. Berechnung der Geſchwindigkeit und Menge des durch kleine Oefnungen laufenden Waſſers.

Der III. Abſchnitt. Von Viſirung der Quellen und Berechnung der Waſſermenge nach Zollen.

Der IV. Abſchnitt. Von Gefäßen, die ganz auslaufen, wenn die Oefnungen klein ſind.

Der V. Abſchnitt. Vom Lauf des Waſſers in Canälen und Flüſſen.

Der VI. Abſchnitt. Vom Stoß des Strom- Rinnen- und Röhr-Waſſers an feſte Körper.

Der VII. Abſchnitt. Von den unterſchlächtigen Waſſer-Rädern bey Mühlen und andern Maſchinen.

Der VIII. Abſchnitt. Vom Mittelpunkt des Waſſer-Stoßes.

Der IX. Abſchnitt. Von oberſchlächtigen Rädern.

Der X. Abſchnitt. Von horizontalen Rädern, und den ihnen ähnlichen verticalen Rädern.

Der XI. Abſchnitt. Vollſtändigere Theorie von der Bewegung des Waſſers in Gefäßen und Röhren.

Der XII. Abſchnitt. Fortſetzung der vorigen Unterſuchung auch für die Fälle, wenn die Gefäſſe beſtändig voll bleiben.

Der XIII. Abſchnitt. Vergleichung der bisherigen Theorie mit des Hrn. Joh. Bernoulli Hydraulik.

Der XIV. Abſchnitt. Vom Druck des bewegten Waſſers, gegen die Gefäße und Röhren.

Der XV. Abſchnitt. Von der Bewegung des Waſſers in Röhren von unbeſtimmter Länge.

Der XVI. Abſchnitt. Von den Bewegungen des Waſſers, die der Druck der Luft verurſacht.

Der

Der XVII. Abſchnitt. Theorie der Pumpen und insbeſondere der Saugwerke.
Der XVIII. Abſchnitt. Unterſuchungen über die Geſchwindigkeit des Waſſers im Stiefel eines Saugwerks und deſſen Druck gegen den Kolben.
Der XIX. Abſchnitt. Das allgemeine der Theorie der Waſſerkünſte mit Anwendungen auf die Saugwerke.
Der XX. Abſchnitt. Von den Schwengelkünſten.
Der XXI. Abſchnitt. Von den Stangenkünſten mit dem krummen Zapfen.
Der XXII. Abſchnitt. Beſchreibung der Schacht- und Feldgeſtänge.
Der XXIII. Abſchnitt. Die Theorie der Druckwerke.
Der XXIV. Abſchnitt. Beſondre Unterſuchung über die vortheilhafteſte Einrichtung der Druckwerke.
Der XXV. Abſchnitt. Von vereinbarten Saug- und Druckwerken.
Der XXVI. Abſchnitt. Prüfung verſchiedener zur Bewegung der Pumpen-Kolben vorgeſchlagenen Maſchinen.
Der XXVII. Abſchnitt. Die Eigenſchaften guter Kolben und Ventile.
Der XXVIII. Abſchnitt. Beſondre Anwendung der bisherigen Lehren auf Pumpenkünſte, die durch Menſchen, Pferde, oder durchs Waſſer getrieben werden.
Der XXIX. Abſchnitt. Theorie der Feuerſprützen.
Der XXX. Abſchnitt. Von Sprützen mit dem Windkeſſel.
Der XXXI. Abſchnitt. Von den mit Schlangen verſehenen Feuerſprützen.
Der XXXII. Abſchnitt. Von dem einer Feuerſprütze beygeordneten Zubringer.

Die

Die Hydraulik,
oder
die Theorie von der Bewegung flüßiger Körper.

Der I. Abſchnitt.

Allgemeine Betrachtungen über die Bewegungen des Waſſers in Gefäſſen und Röhren.

1. §.

Ein feſter Körper mag ſich, wie man will, bewegen, ſo behalten doch alle ſeine körperlichen Puncte beſtändig einerley Lage gegen einander; und wenn man nur die Bewegung dreyer Puncte eines feſten Körpers kennet, ſo iſt die Bewegung aller übrigen bekannt (222. 223 § Mech.). Weil aber die körperlichen Puncte flüßiger Maſſen mit keiner merklichen Kraft zuſammen hängen, ſo kann jeder Punct ſeine eigene Bewegung haben, und es mag die Bewegung ſo vieler einzelner Puncte, wie man will, bekannt ſeyn, ſo wird dadurch die Bewegung der übrigen noch keinesweges beſtimmt. Daher kann man ſchon zum voraus abnehmen, daß allgemeine

Betrachtungen über die Bewegung flüßiger Körper auf ſehr verwickelte Rechnungen führen müſſen. Wenn inzwiſchen die flüßige Maſſe in Gefäſſen und Canälen eingeſchloſſen iſt, und entweder durch Oefnungen ausflieſt, oder längſt der Canäle fortläuft; ſo iſt der Weg vorgeſchrieben, den die Maſſe nehmen muß, und es kommt nur darauf an, ihre Geſchwindigkeit zu ſuchen. Bey dieſer Unterſuchung fällt zwar ein ziemlicher Theil der gedachten Schwierigkeiten weg, und die Rechnungen werden leichter. Indeſſen iſt man doch dabey oft genöthiget, die Rechnung auf ſolche Vorausſetzungen zu gründen, die in der Natur nicht völlig ſtatt haben, damit man auf Reſultate komme, die wenigſtens nicht viel von demjenigen abweichen, was der würkliche Erfolg lehret. Man würde in vielen Fällen die Schwierigkeiten zu ſehr häufen, wenn man alle Umſtände, welche auf die Bewegung des Waſſers ihren Einfluß haben, mit in Rechnungen bringen wollte.

2. §.

Ehe und bevor aber dieſe Unterſuchung ſelbſt vorgenommen wird, muß man ſich eine recht deutliche Vorſtellung davon machen, was mit der Maſſe des in einem Gefäß befindlichen Waſſers alsdann vorgehe, wenn demſelben durch eine Oefnung der Ausgang verſtattet wird. In ſolcher Abſicht ſtelle man ſich
1 Fig. zuerſt ein Gefäß ABCD vor, das die Geſtalt eines graden Priſma oder Cylinders hat. Ohngefehr in der Mitte des Bodens ſey eine Oefnung FG befindlich, und man nehme an, daß dieſelbe nach Gefallen geöfnet und verſchloſſen werden könne. Der Boden des Gefäſſes ſtehe horizontal, damit derſelbe mit

der Oberfläche AD des Waſſers, ſo lange es im Gefäß ruhig ſteht, parallel ſey. Man öfne nun das Loch FG, ſo lehrt die Erfahrung, daß das Waſſer ſchnell hervor ſpringe, und dem auslaufenden Waſſer immer mehreres aus dem Gefäſſe nachfolge. Es muß demnach die Oberfläche AD ſinken, und die Erfahrung lehrt, daß ſie während dieſes Sinkens eben und horizontal bleibe, dafern anders das Loch FG in Vergleichung mit der Weite des Gefäſſes nur klein iſt. Hat die Oefnung FG eine beträchtliche Gröſſe, ſo entſtehet grade über derſelben in der Oberfläche AD eine Vertiefung, die deſto merklicher iſt, je weiter FG iſt. Eine ſolche Vertiefung entſteht auch, wenn gleich das Loch nur klein, aber das Gefäß ſchon mehrentheils ausgelaufen iſt, ſo daß AD nur ſehr wenig mehr über dem Boden BC erhaben iſt. Setzt man dieſe Abweichung beyſeite, ſo kann man übrigens annehmen, daß alle Puncte, die in der höchſten Oberfläche des Waſſers AD liegen, mit gleichen Geſchwindigkeiten vertical unterwärts ſinken.

Eben daſſelbe läſt ſich von allen den Waſſertheilchen ſagen, die in jedem andern horizontalen Querſchnitt RS liegen, nur diejenigen ausgenommen, welche dem Boden BC ſehr nahe ſind. Die Bewegung des Waſſers mag ſich übrigens, wie man will, ändern, ſo werden doch diejenigen Puncte, die in einem und eben demſelben Querſchnitt RS liegen, in jedem Augenblick mit gleichen Geſchwindigkeiten ſinken. Deswegen kann man ſich hier eines ähnlichen Hülfsmittels bedienen, die Rechnung zu erleichtern, wie bey feſten Körpern, wenn alle Puncte derſelben nach parallelen Richtungen mit gleichen Geſchwindigkeiten fortgehen. Man darf nur die Bewegung des

Schwerpuncts L eines ſolchen Querſchnitts RS betrachten; und daſern alle Puncte deſſelben nach parallelen Richtungen von ſolchen Kräften beſchleuniget werden, die ihren Maſſen proportional ſind, ſo kann man übrigens ſich die Sache ſo vorſtellen, als wenn die ganze Maſſe eines ſolchen Querſchnitts in ſeinem Schwerpunct vereiniget wäre. Man ſiehet leicht, daß die im 58 und 59 §. Mech. vorgetragenen Schlüſſe auch hier ihre Anwendung finden.

3 §.

1 Fig. Wenn das Gefäß ein grades Priſma, oder ein grader Cylinder iſt; ſo werden die Schwerpuncte aller horizontalen Querſchnitte des Waſſers, K, *k*, L, *l*, u. ſ. f. in einer graden und verticalen Linie liegen. Setzt man überdem voraus, daß die Oefnung FG grade in der Mitte des Bodens befindlich, und ihr Schwerpunct Q mit dem Schwerpunct der Grundfläche BC einerley ſey, ſo wird die Linie der Schwerpuncte K*k* L*l* Q*q*, aller horizontalen Querſchnitte des ganzen Waſſer-Körpers ABF*fg*GCD grade und vertical, alſo auf allen den erwähnten Querſchnitten ſenkrecht ſeyn. Dieſe Linie heiſt die centriſche Linie der ganzen bewegten Maſſe des Waſſers; und weil alle Puncte, die in einem und eben demſelben Querſchnitt RS liegen, nach Richtungen fortgehen, die mit dieſer centriſchen Linie parallel ſind; ſo kann man dieſe Linie als den Weg betrachten, nach welchem jeder dieſer Querſchnitte fortgeht, indem das Waſſer durch die Oefnung FG ausſtrömt. Sobald nun dieſes Ausſtrömen ſeinen Anfang nimmt, ſobald kömmt auch die ganze Maſſe des in dem Gefäß befindlichen Waſſers in Bewegung. Wenn man dasjenige

jenige noch beyſeit ſetzt, was den ganz nahe am Boden befindlichen Querſchnitten widerfährt; ſo ſiehet man übrigens leicht, daß alle Querſchnitte der im Gefäß befindlichen Maſſe Waſſer in jedem Augenblick mit gleichen Geſchwindigkeiten ſinken. Will man ſich nun überdem die gehörige Vorſtellung davon machen, was mit dem Waſſer in dem Augenblick, da es durch FG ausſtrömt, vorgehet; ſo muß man ſich den Boden des Gefäſſes wie eine geometriſche Fläche ohne alle Dicke, und die Fläche der Oefnung FG als den unterſten Querſchnitt des Gefäſſes vorſtellen. Dies vorausgeſetzt, betrachte man in einem gewiſſen Augenblick denjenigen Querſchnitt des Waſſers, welcher die Fläche der Oefnung FG jetzt ausfüllt, und zugleich einen willkührlichen Querſchnitt RS des Waſſers im Gefäß. Indem nun FG in *fg* rückt, wird RS in *rs* fortrücken, und wenn in der Zeit, da dies erfolgt, die man ſehr klein annehmen kann, ſo viel Waſſer ausläuft, als den Raum F*fg*G ausfüllt: ſo muß der Raum F*fg*G = R*rs*S ſeyn, denn es iſt nun ſo viel Waſſer weniger im Gefäß, als binnen dieſer Zeit ausgelaufen iſt. Daraus ergiebt ſich, daß das Waſſer ſchneller durch die Oefnung FG ſtröme, als es im Gefäß ſinkt, und daß eine Geſchwindigkeit von der andern abhänge.

4 §.

Die Geſchwindigkeit des in jedem Augenblick durch die Oefnung *FG* ausſtrömenden Waſſers verhält ſich zur Geſchwindigkeit des in eben dem Augenblick durch den Querſchnitt *RS* des Gefäſſes laufenden Waſſers umgekehrt, wie der Quadrat-Inhalt des Quer- I Fig.

ſchnitts *RS* zum Quadrat-Inhalt der Oefnung *FG*.

Beweis. In der Zeit t ſey das in dem Querſchnitt RS jetzt befindliche Waſſer um die Höhe OL $= s$ herabgeſunken, und im gegenwärtigen Augenblick ſey die Geſchwindigkeit deſſelben $= c$; für eben den Augenblick aber die Geſchwindigkeit des durch FG ſtrömenden Waſſers $=$ C. In der folgenden ſehr kleinen Zeit Δt ſinke RS in rs um die Tiefe Ll, FG aber in fg um die Tiefe Qq, ſo iſt des Verhältniſſes $\frac{\mathrm{L}l}{\Delta t}$ Grenze $= c$, ſo wie des Verhältniſſes $\frac{\mathrm{Q}q}{\Delta t}$ Grenze $=$ C (106 §. Mech.). Weil nun $\mathrm{L}l = \Delta s$, und der Raum RrsS $=$ FfgG iſt (3 §.), ſo hat man $\mathrm{RS} \,.\, \Delta s = \mathrm{FG} \,.\, \mathrm{Q}q$: alſo $\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{FG}} \,.\, \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{Q}q}{\Delta t}$, und dies allemahl, wie groß auch Δt genommen wird. Demnach iſt des Verhältniſſes $\frac{\mathrm{Q}q}{\Delta t}$ Grenze $= \frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{FG}} \,.\, \frac{ds}{dt}$, folglich $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{FG}} \,.\, c$, d. i. $\mathrm{C} : c = \mathrm{RS} : \mathrm{FG}$.

5 §.

Dieſe bisherigen Betrachtungen ſind einer viel gröſſern Allgemeinheit fähig. Anſtatt des cylindriſchen oder prismatiſchen Gefäſſes ABCD kann man
2 ſich ein andres von willkührlicher Geſtalt vorſtellen,
Fig. deſſen horizontale Querſchnitte RS insgeſamt von unglei-

gleicher Gröſſe ſind, wie in der zweyten Figur. Man ſetze aber dabey noch voraus, daß alle Schwerpuncte dieſer Querſchnitte in einerley Verticallinie KOLQ liegen, die zugleich durch den Schwerpunct der Fläche der im Boden gemachten Oeſnung FG gehet. Nun wird jeder Querſchnitt RS als eine Function ſeiner Höhe QL über dem Boden betrachtet werden können, ſo daß nun RS nicht mehr wie vorhin eine beſtändige, ſondern eine veränderliche Gröſſe iſt. Nunmehr werden auch die Geſchwindigkeiten der durch verſchiedene Querſchnitte des Gefäſſes in einerley Augenblick laufenden Waſſertheilchen nicht mehr gleich, ſondern ungleich groß ſeyn. Die im 2ten §. angenommene Vorausſetzung, daß alle in einem und eben demſelben Querſchnitt befindliche Waſſertheilchen mit gleicher Geſchwindigkeit, und nach parallelen Richtungen laufen, wird hier ſchon ihre Ausnahme leiden. Diejenigen Theilchen, welche an der äuſſern Grenze des Querſchnitts liegen, ſind gezwungen nach Richtungen, wie R*r* und S*s* fortzurücken, die mit der centriſchen Linie nicht parallel ſind. Man muß aber dieſe Abweichungen von der zur Erleichterung der Rechnung angenommenen Vorausſetzung beyſeit ſetzen, um die Schwierigkeiten nicht auf einmal zu häufen. Die Rechnungen ergeben alsdenn, was erfolgen würde, wenn das, worauf ſie ſich gründen, in der Natur völlig genau ſtatt hätte. Uebrigens werden nun die Geſchwindigkeiten der durch verſchiedene Querſchnitte laufenden Waſſertheilchen insgeſamt von einander ſo abhängen, daß, wenn nur die Geſchwindigkeit der durch einen gegebenen Querſchnitt laufenden Waſſertheilchen bekannt iſt, die Geſchwindigkeit derjenigen, die

in eben dem Augenblick durch einen andern Querſchnitt laufen, daraus gefunden werden kann.

6 §.

2 Fig. Wenn die horizontalen Querſchnitte des Gefäſſes *ABCD* einander alle ungleich ſind, die centriſche Linie aber vertical iſt; ſo verhalten ſich die Geſchwindigkeiten der in einem und eben demſelben Augenblick durch zwey verſchiedene Querſchnitte laufenden Waſſertheilchen gegen einander umgekehrt, wie die Fläche dieſer Querſchnitte.

Beweis. Es ſey während der Bewegung die Zeit t verfloſſen, und am Ende dieſer Zeit laufe das Waſſer durch FG mit der Geſchwindigkeit C, durch RS aber mit der Geſchwindigkeit c. In dem folgenden kleinen Zeittheilchen Δt laufe ſo viel Waſſer aus, als den Raum $\mathrm{F}fg\mathrm{G}$ füllt; ſo wird der über RS noch ſtehende Waſſerkörper in eben dieſer Zeit bis rs herabſinken, ſo daß der Raum $\mathrm{R}rs\mathrm{S} = \mathrm{F}fg\mathrm{G}$ iſt. Demnach iſt, wie im 4 §., des Verhältniſſes $\frac{\mathrm{L}l}{\Delta t}$ $= \frac{\Delta s}{\Delta t}$ Grenze $\frac{ds}{dt} = c$, wenn man $\mathrm{OL} = s$ ſetzt, und des Verhältniſſes $\frac{\mathrm{Q}q}{\Delta t}$ Grenze $=$ C. Weil nun $\mathrm{R}rs\mathrm{S} = \mathrm{FG} \cdot \mathrm{Q}q$, ſo wird $\frac{\mathrm{R}rs\mathrm{S}}{\Delta s} = \frac{\mathrm{FG} \cdot \mathrm{Q}q}{\Delta s}$, und dies allemahl, wie groß auch Δt, alſo Δs genommen werden. Folglich iſt des Verhältniſſes $\frac{\mathrm{FG} \cdot \mathrm{Q}q}{\Delta s}$ Grenze $= \frac{\mathrm{R}rs\mathrm{S}}{ds} = \mathrm{RS}$ (149 §. Mech.)

Zu-

Zugleich aber wird $Qq = Cdt$, alſo $RS = \frac{FG.C.dt}{ds}$, und $\frac{ds}{dt} = c$, alſo $RS = \frac{FG.C}{c}$, und $C = \frac{RS}{FG}.c$. Da dies von jedem Querſchnitt RS gilt, ſo erhellet, wenn die Geſchwindigkeit des in eben dieſem Augenblick durch MN laufenden Waſſers $= v$ geſetzt wird, daß auch $C = \frac{MN}{FG}.v$ ſey. Folglich wird $RS.c = MN.v$, und $c : v = MN : RS$.

Der Umſtand, daß die centriſche Linie vertical angenommen iſt, hat in dieſe Schlüſſe eigentlich keinen Einfluß, ſondern nur der, daß alle Querſchnitte auf der centriſchen Linie ſenkrecht ſind, und alle Waſſertheilchen in einerley Querſchnitt nach Richtungen laufen, die mit der centriſchen Linie parallel ſind. Wenn alſo dieſer letzte Umſtand bliebe; die centriſche Linie aber jede beliebige Lage hätte, ſo würde der erwieſene Satz dennoch ſeine Anwendung finden. Ja ſelbſt der Umſtand, daß die centriſche Linie grade ſey, liegt bey dieſen Schlüſſen nicht nothwendig zum Grunde.

7 §.

Man ſtelle ſich nämlich nunmehro ein Gefäß vor, daß etwa wie die gebogene Röhre AMFGND aus- 3 Fig. ſiehet. Mitten durch dieſe Röhre erſtrecke ſich die Linie KPVQ, und die Fläche der obern Oefnung AD ſowohl, als auch der untern FG, ſey auf dieſer Linie bey K und Q ſenkrecht. Die Geſtalt der Röhre ſey übrigens ſo beſchaffen, daß die Schwerpuncte aller auf der Linie KPVQ ſenkrechten Querſchnitte in

dieſer Linie liegen; ſo kann KPVQ in eben dem Verſtande die centriſche Linie der Röhre heiſſen, wie dies Wort vorhin gebraucht iſt. Es ſind demnach auch K und Q die Schwerpuncte der Flächen AD und FG. Dafern nun eine ſolche Röhre anfangs bis an AD voll Waſſer geweſen iſt, dem man durch FG den Ausgang verſtattet hat; ſo kann man annehmen, daß alle durch jeden auf der centriſchen Linie ſenkrechten Querſchnitt laufende Waſſertheilchen für jeden Augenblick gleich ſchnell und nach Richtungen laufen, deren Lage mit der Lage der centriſchen Linie übereinkommt. Wenn alle dieſe Bedingungen zum Grunde geſetzt werden, ſo erhellet, wie im 6 §., daß die Geſchwindigkeit der durch zwey verſchiedene Querſchnitte laufenden Waſſertheilchen ſich umgekehrt, wie dieſe Querſchnitte, verhalten. Der daſelbſt geführte Beweis läßt ſich ohne alle weitere Aenderung auf den gegenwärtigen Fall anwenden, und der einzige Unterſchied beſtehet nur darin, daß die Richtungen dieſer Geſchwindigkeiten nicht vertical ſind. Die Richtung des durch FG ausſtrömenden Waſſers kommt mit der Lage der graden Linie überein, welche die centriſche Linie in Q berührt: und die Richtung des durch jeden unbeſtimmten Querſchnitt MN laufenden Waſſers mit der Lage der graden Linie PT, welche die centriſche Linie P berührt. Ob nun gleich vor der Bewegung, ſo lange FG verſchloſſen, und das Waſſer in Ruhe bleibt, die Oberfläche AD horizontal ſeyn wird, ſo können doch äuſſerliche Urſachen zuwege bringen, daß dieſe Oberfläche, ſobald das Waſſer in Bewegung kommt, ſich in die angenommene Lage verſetzt, und während der Bewegung auf der centri-

ſchen

ſchen Linie ſenkrecht bleibt, wenn gleich dieſe nicht vertical iſt. Wenn die Röhre nur eng iſt, ſo wird dies gewöhnlich erfolgen. Man ſiehet es am deutlichſten, wenn man eine Glasröhre mit Queckſilber füllt, und hiernächſt daſſelbe wieder auslaufen läßt. Die oberſte Fläche des Queckſilbers wird ſich während der Bewegung in die angenommene Lage verſetzen, wenn man gleich die Röhre in einer gegen den Horizont geneigten Lage erhält.

8 §.

Dieſe vorläufigen Betrachtungen waren nöthig, bevor die Unterſuchung über die eigentlichen Geſetze, woran die Bewegung des Waſſers in Gefäſſen und Röhren gebunden iſt, mit der gehörigen Vollſtändigkeit angeſtellet werden konnte. Bey dieſer Unterſuchung ſelbſt kommen nun noch zwo Fälle zu unterſcheiden vor, die auch beyde in der Ausübung ihre Anwendung finden. Wenn man nemlich dem Waſſer durch FG den Ausgang verſtattet, ſo wird entweder der Abgang des auslaufenden Waſſers durch einen beſtändigen Zufluß in die obere Oefnung AD wieder erſetzt, oder es geſchicht dies nicht. Der erſte Fall ſoll gegenwärtig nur erwogen werden. Bevor aber auf denſelben die theoretiſchen Rechnungen angewandt werden, wird es nicht undienlich ſeyn, folgenden Satz als einen Erfahrungsſatz dabey vorauszuſetzen.

Wenn man das Waſſer aus einem Gefäß entweder durch eine im Boden oder ſeitwärts angebrachte Oefnung auslaufen läßt: den Abgang des Waſſers aber durch neuen Zufluß erſetzt, ſo daß das Gefäß beſtändig voll bleibt;

ſo läuft das Waſſer faſt vom erſten Augenblick der Bewegung an mit unveränderlicher Geſchwindigkeit aus. Dies kann man daraus abnehmen, weil man finden wird, daß in doppelter Zeit doppelt ſo viel, in dreyfacher Zeit dreymahl ſo viel Waſſer ausläuft, als in einfacher Zeit, und daß überhaupt die Menge des ausgelaufenen Waſſers der verfloſſenen Zeit proportional ſey. Wie dies mit der Theorie zuſammenhänge, und in wie weit man im völlig ſtrengen Verſtande annehmen könne, daß die Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers einmahl unveränderlich werde, wird in der Folge ausführlicher unterſucht werden. So viel ſiehet man wohl, daß das ausſtrömende Waſſer nicht im erſten Augenblick der Bewegung diejenige Geſchwindigkeit, womit es hiernächſt unveränderlich abläuft, plötzlich erlangen könne. Die Bewegung deſſelben muß vielmehr nach und nach beſchleuniget werden, geſetzt, daß es auch ſehr ſchnell erfolge. Will man alſo die geſammte Bewegung des ausſtrömenden Waſſers vom erſten Augenblick ihrer Entſtehung vollſtändig kennen lernen; ſo muß man das Geſetz dieſer Beſchleunigung ſuchen. Indeſſen kann man auch anfangs das Geſetz dieſer Beſchleunigung noch beyſeit ſetzen, und die erſten Unterſuchungen auf diejenige unveränderliche Geſchwindigkeit einſchränken, womit das Waſſer ausſtrömt, wenn alles ſchon in den Beharrungsſtand gekommen iſt.

9 §.

Wenn aber gleich in dem eben erwähnten Fall alle Waſſertheilchen mit einerley Geſchwindigkeit durch die Oefnung FG ausſtrömen, ſo iſt doch ihre Geſchwin-

ſchwindigkeit, ſo lange ſie in der Röhre laufen, keinesweges unveränderlich; wenn, wie hier vorausgeſetzt wird, nicht alle Querſchnitte der Röhre gleich groß ſind. Man betrachte nur, um dies vorläufig zu überſehen, ein ſehr kleines Theilchen des Waſſers, das ſich jetzt im Schwerpunct P des Querſchnitts MN befindet; ſo iſt ſeine Geſchwindigkeit $= \frac{FG}{MN}c$, wenn c die unveränderliche Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers iſt. Wenn nun dies Theilchen in der centriſchen Linie vorwärts läuft, und in der Zeit τ von P bis p rückt, ſo ändert ſich ſeine Geſchwindigkeit $\frac{FG}{MN}c$, weil ſich MN ändert. Dies könnte nicht ſeyn, wenn die Bewegung deſſelben nicht nach der Richtung der centriſchen Linie von einer gewiſſen Kraft beſchleuniget würde, und dieſe Kraft iſt hier eigentlich das Reſultat mehrerer Kräfte. Es gehört dahin zuerſt das eigene Gewicht eines ſolchen Theilchens, womit daſſelbe nach der verticalen Richtung PE unterwärts drückt. Ueberdem aber entſtehet aus der gegenſeitigen Würkung der Waſſertheilchen in einander noch ein beſonderer Druck: und man weiß aus der Hydroſtatik, daß der Druck, welchen jedes Waſſertheilchen wegen dieſer Urſache leidet, ſo lange als das Waſſer im Gefäß ruhig ſteht, mit dem Gewicht dieſes Waſſertheilchens im Gleichgewicht ſey. Wenn aber das Waſſer in Bewegung iſt, ſo fällt dies Gleichgewicht weg. Man ſieht hieraus, daß es bey der fernern Unterſuchung über die Geſetze, nach welchen die Bewegung des Waſſers beſchleuniget wird, vornämlich darauf ankommen werde, 3 Fig.

daß

daß man ſich eine recht deutliche Vorſtellung davon mache, was es mit dem Druck eigentlich für eine Bewandniß habe, dem das Waſſer in jeder Stelle der Röhre ausgeſetzt iſt. Es ſey MN ein Querſchnitt der Röhre auf der centriſchen Linie ſenkrecht, und man nehme wie bisher an, daß die Richtung aller durch jeden ſolchen Querſchnitt laufenden Waſſertheilchen mit der Tangente PT der centriſchen Linie parallel, alſo auf MN ſenkrecht ſey. Wenn nun die voranlaufende Maſſe Waſſer MFGN eben ſo ſchnell auswiche, als die hintere AMND zu folgen ſtrebt; wenn folglich das Waſſer, was in dieſem Augenblick durch MN durchgelaufen iſt, dem unmittelbar folgenden gar nicht hinderlich wäre; ſo könnte kein Druck entſtehen. Wenn dagegen das Waſſer, was jetzt durch MN durchgelaufen iſt, ſo ſchnell nicht fortfließt, als das hintere zu folgen ſtrebt; ſo drückt die Maſſe AMND gegen MN, und die Richtung dieſes Drucks iſt auf MN ſenkrecht. Die voranlaufende Maſſe drückt entgegen, und weil das Waſſer nach allen Seiten auszuweichen ſucht, ſo entſteht eben daher zugleich ein Druck gegen die Seitenwände des Gefäſſes an dieſer Stelle, und dies ebenfalls nach einer auf dieſe Seitenwände ſenkrechten Richtung.

10 §.

Es ſey nun ein anderer Querſchnitt der Röhre ſehr nahe bey dem vorigen MN, und vom Anfang der Bewegung des Waſſers ſey die Zeit t verfloſſen. In dem folgenden kleinen Zeittheilchen Δt aber rücke die Maſſe $MmnN$ in $mm'n'n$. Es ſey ferner das Stück KP der centriſchen Linie $= r$, und $MN = z$; ſo iſt z eine Function von r: und wenn die ganze Maſſe

Waſſer

Waſſer AMND $=$ M geſetzt wird, ſo iſt auch M eine Function von r, die um das Stück $MmnN =$ ΔM wächſt, wenn r um die Differenz $Pp = \Delta r$ wächſt. Es ſey überdem der Druck gegen $MN = \pi$, ſo iſt auch π als eine Function von r zu betrachten, die um das Stück $\Delta\pi$ wächſt, indem r um Δr zunimmt: es wird nämlich der Druck gegen $mn =$ $\pi + \Delta\pi$ ſeyn. Stellt man ſich alſo nunmehro die Maſſe $MNnm$ ganz allein vor; ſo ſiehet man wohl, daß dieſelbe einem zwiefachen Druck, ſowohl gegen MN, als auch gegen mn ausgeſetzt ſey. Sie leidet gegen MN den Druck $= \pi$, und gegen mn den entgegengeſetzten Druck $\pi + \Delta\pi$. Der Druck π ſey ſo groß, als das Gewicht einer Waſſerſäule auf der Grundfläche $MN = z$ in der Höhe p, ſo iſt $\pi = z.p$ die eigene Schwere des Waſſers $= 1$ geſetzt. Wenn nun mn ein feſter Boden wäre, ſo würde daher gegegen mn der Druck $mn.p = (z + \Delta z)p$ entſtehen. Wenn nämlich der von dem Gewicht der zwiſchen MN und mn befindlichen Waſſertheilchen herrührende Druck $= mn.\alpha$, alſo dem Gewicht einer Waſſerſäule in der Höhe α auf der Grundfläche mn gleich wäre, über MN aber noch eine Waſſerſäule in der Höhe p ſtünde, ſo wäre der geſammte Druck gegen $mn = mn.(\alpha + p)$ (70 §. Hydroſt.). Weil nun der Theil $mn.\alpha$ von dem Gewicht des zwiſchen MN und mn befindlichen Waſſers herrühret, ſo entſteht der übrige Theil $mn.p = (z + \Delta z)p = \frac{(z+\Delta z)\pi}{z}$ von dem Druck π gegen MN. Dieſer Druck wird von dem ihm entgegen geſetzten Druck $\pi + \Delta\pi =$ $(z + \Delta z)(p + \Delta p)$ zum Theil aufgehalten. Wenn demnach $(z+\Delta z)(p+\Delta p) > (z+\Delta z)p$ iſt, ſo wird die

die Bewegung der Maſſe $MNnm$ durch einen Druck gegen $mn = (z + \Delta z)\Delta p$ verzögert, ſo wie ſie durch das Gewicht der Maſſe $MNnm$ beſchleuniget wird. Wäre nun Pp eine grade Linie, alſo nicht allein MN und mn, ſondern alle dazwiſchen fallende Querſchnitte, einander parallel, ſo wären PT und pt einander grade entgegen geſetzt. Von dem Gewicht ΔM der Maſſe $MNnm$ würde nun die bewegende Kraft $\Delta M \cos EPT$ nach PT entſtehen, und dieſer wäre der Druck $(z + \Delta z)\Delta p$ entgegen geſetzt. Demnach lieſſe ſich die Sache ſo betrachten, als wenn $MNnm$ ein feſter Körper, und an demſelben eine bewegende Kraft $= \Delta M \cos EPT - (z + \Delta z)\Delta p$ nach der Richtung PT durch dieſes Körpers Schwerpunct angebracht wäre. Gehörte alsdenn die Geſchwindigkeit aller Theilchen dieſer Maſſe der Höhe u zu, ſo würde die Aenderung der Geſchwindigkeit vermittelſt der Gleichung $\frac{du}{dr} = \frac{\Delta M \cos EPT - (z + \Delta z)\Delta p}{\Delta M}$ (117 §. Mech.) gefunden werden. Dieſe angenommenen Vorausſetzungen ſind deſto richtiger, je kleiner Δt und Δr genommen werden, und der Bruch $\frac{\Delta M \cos EPT - (z + \Delta z)\Delta p}{\Delta M}$ nähert ſich der Gränze $\frac{du}{dr}$, ſo, daß zuletzt $\frac{dM \cos EPT - (z + dz)dp}{dM} = \frac{du}{dr}$ wird. Wenn nämlich $\Delta r = Pp$ verſchwindet, ſo werden MN und mn parallel, die Geſchwindigkeiten aller zwiſchen MN

und *mn* befindlichen Waſſertheilchen werden gleich groß, und ihre Richtungen mit PT parallel.

Dieſe Schlüſſe ergeben, daß man ſich die Bewegung des Waſſers, um die Rechnung zu verkürzen, ſo vorſtellen könne. Man kann an jeder beliebigen Stelle der Röhre ein paar auf der centriſchen Linie ſenkrechte Querſchnitte MN, *mn*, ſich als ſolche vorſtellen, deren Entfernung von einander unendlich klein iſt, ſo daß zwiſchen ihnen ein unendlich kleiner Theil, ein Element der ganzen Maſſe des durchlaufenden Waſſers enthalten iſt: man kann ferner annehmen, daß dies Element in der unendlich kleinen Zeit dt um denjenigen unendlich kleinen Theil dr der centriſchen Linie fortrücke, der zwiſchen den Flächen MN und *mn* enthalten iſt, und daß während dieſer unendlich kleinen Zeit alle zu dieſem Element gehörige Waſſertheilchen ſich mit gleicher Geſchwindigkeit nach der Richtung des Elements $Pp = dr$ der centriſchen Linie bewegen: daß endlich drittens dies Element von einer Kraft beſchleuniget werde, die zum Theil von dem Gewicht dieſes Elements, zum Theil aber von dem Druck des voranlaufenden und nachfolgenden Waſſers gegen dies Element ihren Urſprung hat.

11 §.

Es iſt eine Gleichung für die centriſche Linie zwiſchen den rechtwinklichten Coordinaten $KO = w$, und $OP = y$ gegeben, nebſt allen Anmeſſungen der Röhre, überdem iſt der Druck π für jeden Querſchnitt MN als eine Function der centriſchen Linie $KP = r$ gegeben: man ſucht einen allgemeinen Ausdruck

für die Beſchleunigung eines jeden Elements *MNnm*.

Aufl. Es ſey die Maſſe Waſſer AMND $= M$, alſo das Element MN*nm* $= dM$, ſo iſt die geſuchte Beſchleunigung $= \frac{dM \operatorname{coſ} EPT - (z + dz)\, dp}{dM}$ (10 §.) Es läßt ſich aber der Sinus und Coſinus des Winkels EPT aus der zwiſchen KO $= w$, und OP $= y$ gegebenen Gleichung vermittelſt der Differentialrechnung finden, und die hieher gehörigen allgemeinen Formuln ſind in der Mechanik feſter Körper ſchon verſchiedenemal gebraucht worden. Man vergleiche z. E. den 130. 132. 257 §. Mech., ſo wird man leicht überſehen, daß $\operatorname{ſin} EPT = \frac{dy}{dr}$, $\operatorname{coſ} EPT = \frac{dw}{dr}$, und $\surd(dw^2 + dy^2) = dr$ ſey. Wenn man nun die eigene Schwere des Waſſers $= 1$, und $MN = z$ ſetzt; ſo iſt $dM = zdr$, und $dM \operatorname{coſ} EPT = zdw$. Dieſe Werthe in den vorigen Ausdruck geſetzt, geben die geſuchte Beſchleunigung $= \frac{zdw - (z + dz)\, dp}{zdr} = \frac{dw - dp}{dr}$, weil $\frac{dz}{zdr} \cdot dp = 0$ iſt.

Es iſt bey dieſen Schlüſſen angenommen worden, daß p um dp wachſe, wenn r um dr wächſt. Daferne alſo an einer Stelle der centriſchen Linie dp negativ wird, ſo iſt es ein Beweis, daß daſelbſt p abnehme, wenn r wächſt. Alsdenn iſt die Beſchleunigung des Elements M*mn*N $= \frac{dw + dp}{dr}$. Vorhin

hin verzögerte der von dem gegenſeitigen Druck der Waſſertheilchen gegen einander abhängende Druck die Bewegung des Elements: in Fällen von der zuletzt erwehnten Art wird die Bewegung des Elements durch den erwehnten Druck beſchleuniget. Man kann ſich alsdenn die Sache ſo vorſtellen. Aus dem Druck $(z + dz)(p - dp)$ gegen mn entſteht gegen MN der Druck $(z + dz)(p - dp) \times \frac{z}{z + dz}$ $= z(p - dp)$, und MN leidet den entgegengeſetzten Druck $z.p$. Aus beiden entſteht ein Druck $z.p - z(p - dp) = zdp$ nach der Richtung PT, der das Element vorwärts treibt.

12 §.

Es ſey die Röhre $AMFGND$ bis an AD 3 Fig. mit Waſſer gefüllt, daſſelbe laufe durch die Oefnung FG mit der unveränderlichen Geſchwindigkeit $= c$ aus, und der Abgang werde durch neuen Zufluß oben in AD beſtändig erſetzt: man ſucht den gegenſeitigen Druck der Waſſertheilchen gegen einander für einen gegebenen Querſchnitt MN.

Aufl. Weil das Waſſer durch FG mit der Geſchwindigkeit c läuft, ſo läuft es durch MN mit der Geſchwindigkeit $\frac{f}{z} c$, wenn man FG$= f$, und MN $= z$ ſetzt (7 §.). Es ſey die der Geſchwindigkeit $\frac{f}{z} . c$ zugehörige Höhe $= u$, ſo hat man $u = \frac{f^2 c^2}{z^2 . 4g}$ (32 §. Mech.) und $\frac{dw - dp}{dr} = \frac{du}{dr}$ (11 §.), oder $dw - dp = du$, folglich $dp = dw - du$.

Es iſt aber $du = -\frac{f^2 c^2}{4g} \cdot \frac{2dz}{z^3}$, (314 §. Mech.) folglich $dp = dw + \frac{f^2 c^2}{4g} \cdot \frac{2dz}{z^3}$. Es ſey die Höhe BK $= a$, und BO $= x$, ſo hat man $w = a - x$, und $dw = -dx$, folglich $dp = -dx + \frac{f^2 c^2}{4g} \cdot \frac{2dz}{z^3}$. Man integrire dieſe Gleichung, ſo erhält man $p = C - x - \frac{f^2 c^2}{4gz^2}$. Um die beſtändige Gröſſe C zu finden, erwege man folgendes. Die höchſte Fläche AD des Waſſers AD leidet den Druck der Atmoſphäre, der ſo groß iſt, als das Gewicht einer Waſſerſäule auf dieſer Grundfläche in der Höhe von 32 Fuß. Man ſchreibe k für dieſe Höhe, ſo muß $p = k$ ſeyn, wenn $z = h$, und $x = a$ iſt. Dies giebt $k = C - a - \frac{f^2 c^2}{4ghh}$, alſo $C = k + a + \frac{f^2 c^2}{4gh^2}$, und

$$p = k + a - x + \frac{f^2 c^2}{4gh^2} - \frac{f^2 c^2}{4gz^2}.$$

13 §.

3 Fig. Bey eben den Vorausſetzungen des vor. §. die Geſchwindigkeit c zu finden, womit das Waſſer durch FG ausläuft.

Aufl. Es läſt ſich dieſe Geſchwindigkeit aus der eben gefundenen Gleichung nunmehro leicht auf folgende Art finden. Gegen die untere Oefnung FG drückt die Atmoſphäre ſtärker, als gegen die obere; doch iſt der Unterſcheid nicht beträchtlich, wenn AD nur einige wenige Fuß höher liegt, als FG. Es ſey dieſer

dieſer Druck der Atmoſphäre gegen FG = K, ſo kann man vorausſetzen, es müſſe $p = \mathrm{K}$ ſeyn, wenn $x = \mathrm{CQ} = b$ iſt, da dann zugleich $z = f$ wird. Daraus folgt $\mathrm{K} = k + a - b + \frac{f^2 c^2}{4gh^2} - \frac{c^2}{4g}$, folglich wird

$$\mathrm{K} - k + \frac{c^2}{4g}\left(1 - \frac{f^2}{h^2}\right) = a - b, \text{ und } \frac{c^2}{4g} = \frac{h^2}{h^2 - f^2}\left(a - b - (\mathrm{K} - k)\right).$$

Dies iſt die der Geſchwindigkeit c zugehörige Höhe (32 §. Mechan.), woraus alſo $c = 2\sqrt{\frac{gh^2}{h^2 - f^2}\left(a - b - (\mathrm{K} - k)\right)}$ gefunden wird.

14 §.

Wenn die Oefnung AD über FG nur wenige Fuß erhaben iſt, ſo kann man $\mathrm{K} = k$ ſetzen, und man erhält $\frac{c^2}{4g} = \frac{h^2}{h^2 - f^2}(a - b)$. Wenn überdem k in Vergleichung mit f ſehr groß iſt, welches oben im 2ten u. f. §§. vorausgeſetzt ward, ſo iſt beynahe $\frac{c^2}{4g} = a - b$, und $a - b$ iſt die Höhe der oberen Oefnung über die untere. Folglich ſtrömt das Waſſer mit einer Geſchwindigkeit durch FG, die ein ſchwerer Körper erlangen würde, wenn er von einer Höhe herab fiele, die ſo groß wäre, als die Höhe der obern Oefnung über die untere iſt. Wäre alſo die letzte Richtung der centriſchen Linie bey Q vertical, ſo würde das hervorſpringende Waſſer beynahe ſo hoch ſteigen,

als die obere Oefnung AD über die untere erhaben iſt.

15 §.

Setzt man den gefundenen Werth ſtatt c in die für p am Ende des 12 §. gefundene Gleichung; ſo erhält man p durch völlig bekannte Gröſſen ausgedruckt, und man weiß nun, wie ſtark für jeden Querſchnitt MN der Druck der voran laufenden Maſſe MFGN und der nachfolgenden Maſſe Waſſer AMND gegen einander ſey. Daraus läſt ſich zugleich finden, wie ſtark das Waſſer an dieſer Stelle gegen die Röhre drückt, und deswegen findet dieſe Theorie auch in der Abſicht in der Ausübung ihre mannigfaltige Anwendung, um die nöthige Feſtigkeit der Röhren zu beurtheilen, damit ſie den Druck des durchflieſſenden Waſſers, ohne zu zerbrechen, aushalten können. Die Unterſuchung darüber wird unten vollſtändiger vorkommen.

16 §.

Ich muß hiebey noch eines Umſtandes erwehnen, der zu deſto mehrerer Erleichterung bey den bisherigen Schlüſſen angenommen iſt. Die centriſche Linie KPVQ iſt nemlich als eine ſolche betrachtet worden, die in einer und eben derſelben verticalen Ebene KBV liegt; als eine Linie von einfacher Krümmung. In der That aber ſind die Schlüſſe des 10ten §. ſo allgemein, daß die erwehnte Einſchränkung wegbleiben kann. Wenn die centriſche Linie nicht in einer und eben derſelben Ebene liegt, ſondern ſich, wie man will, biegt; wenn ſie eine Linie von doppelter Krümmung iſt, ſo kann alles wie vorhin bleiben, nur muß man ſich ſtatt BC eine

durch

durch V horizontal gelegte Ebene vorſtellen, da dann der ganze übrige Unterſcheid darauf ankommen wird, daß die Verticallinien PE, und die Tangenten PT nicht in einer Ebene liegen. Für jeden Punct P giebt es alſo einen Winkel, wie EPT, deſſen Ebene eine eigene Lage hat. In jeder dieſer Ebenen kann man ſich alsdenn ein verſchwindendes Dreyeck, wie Ppk, vorſtellen, und den verticalen Druck dM des Elements $MmnN$, wie im 10 §., nach den Richtungen Pp und PM auf Pp ſenkrecht zerlegen, da dann allemahl der Druck nach $Pp = dM \cos EPT = \frac{dM dx}{dr}$ wird. Dies führt alsdenn auf eben die im 12 §. gefundene Differentialgleichung, und die übrigen Schlüſſe des 12. 13 und 14ten §. finden insgeſamt auch hier ihre Anwendung. Die höhere Geometrie giebt davon weitern Unterricht, wie in Fällen von dieſer Art die Natur der centriſchen Linie durch Gleichungen ausgedrückt wird, und wie daraus nicht allein der zu jedem Punct P gehörige Winkel EPT, ſondern auch die Lage der Ebene dieſes Winkels gefunden werden könne. Das bisherige iſt zulänglich zu überſehen, daß die Sätze des 12. 13 und 14 §. ihre Anwendung finden, die centriſche Linie mag eine Geſtalt haben, welche ſie wolle.

Der II. Abſchnitt.

Berechnung der Geſchwindigkeit und Menge des durch kleine Oefnungen laufenden Waſſers.

17 §.

Der im 12 §. gefundene Ausdruck für die Höhe, welche der Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers zugehört, $\frac{c^2}{4g} = \frac{h^2}{h^2-f^2}(a-b)$ hängt gar nicht von der Geſtalt des Gefäſſes, ſondern allein von dem Verhältniß der obern und untern Oefnung gegen einander ab, nebſt der Höhe der obern Oefnung über die untere. Deswegen iſt die Anwendung davon auf beſondere Fälle ſehr leicht. Wenn überdem die untere Oefnung in Vergleichung mit der obern ſehr klein iſt, ſo wird die Berechnung dieſer Geſchwindigkeit noch kürzer. Man muß aber hiebey die Vorausſetzung nicht vergeſſen, worauf ſich die ganze bisherige Rechnung gründet, daß nämlich das Waſſer ſchon mit unveränderlicher Geſchwindigkeit durch die untere Oefnung laufe; und daß fürs zweyte der Abgang des Waſſers durch beſtändigen Zufluß in die obere Oefnung erſetzt werde, ſo daß es nach der Richtung der centriſchen Linie beſtändig mit der Geſchwindigkeit $\frac{f}{h}c$ eintreten müſte. Wenn h in Vergleichung mit f ſehr groß iſt, ſo iſt beynahe $\frac{f}{h}c = 0$. In dieſen Fällen wird

alſo

alſo keine beträchtliche Geſchwindigkeit des eintretenden Waſſers nach der Richtung der centriſchen Linie erfordert. Es genüget alsdenn, wenn das Waſſer nur ſeitwärts nach der Richtung AD, alſo nach horizontaler Richtung zuflieſſet, wenn die oberſte Richtung der centriſchen Linie bey K vertical iſt.

18 §.

Iſt nun ABCD ein Gefäß, deſſen Boden horizontal ſtehet, und läuft aus der in dieſem Boden befindlichen Oefnung FG das Waſſer ab; ſo iſt die Geſchwindigkeit deſſelben $= 2\sqrt{g}.KQ = 2\sqrt{ga}$, wenn man $KQ = a$ ſetzt. Dies hat ſeine Richtigkeit, es mag das Gefäß durchgängig gleich weit ſeyn, wie in der 1 Fig., oder es mögen alle horizontale Querſchnitte deſſelben, wie in der 2 Fig., ungleich groß ſeyn. Wenn das Gefäß ein grades Priſma, oder ein grader Cylinder iſt, ſo findet der erſte Fall ſtatt; und wenn man die im 10 §. vorgetragenen Schlüſſe genau anſiehet; ſo dürfte es ſcheinen, als wenn ſie auf dergleichen cylindriſche und priſmatiſche Gefäße ſich nicht anwenden lieſſen. Es iſt nämlich im 10 §. vorausgeſetzt worden, daß z eine veränderliche Größe ſey, oder mit andern Worten, daß das Gefäß nicht durchgängig von gleicher Weite ſeyn ſolle. Deswegen ward der Ausdruck $\frac{f}{z}c$ ebenfalls als eine veränderliche Größe in der Rechnung betrachtet, welcher doch, wie es ſcheint, unveränderlich ſeyn müſte, wenn das Gefäß priſmatiſch oder cylindriſch iſt. Dies hat nun zwar, was die Querſchnitte des Gefäßes ſelbſt betrift, ſeine unſtreitige Richtigkeit, man kann aber mit Johann Bernoulli (Hydraul. 1. 2. Fig.

 P. I.

P. I. §. III. - V. Oper. T. IV. p. 398.) dieſen Zweifel ſo heben.

In obiger Rechnung werden durch z eigentlich die Querſchnitte derjenigen Maſſe Waſſer verſtanden, welche zugleich in Bewegung iſt, indem das Waſſer durch FG ausläuft; und dieſe Maſſe Waſſer iſt mit derjenigen Maſſe, welche das ganze Gefäß ausfüllt,
1 Fig. nicht völlig einerley. Wenn alle Querſchnitte des Gefäſſes $= h$ ſind; ſo kann die Geſchwindigkeit der im Gefäß befindlichen horizontalen Schichten nicht für jede Tiefe KP dieſelbe Gröſſe $= \frac{f}{h} c$ haben, und wenn KP = KQ wird, plötzlich $= c$ werden. Man muß vielmehr annehmen, daß dieſe Aenderung nach dem Geſetz der Stetigkeit erfolge. In ſolcher Abſicht kann man ſich vorſtellen, das ausſtrömende Waſſer fange nahe bey der Oefnung FG an, einen Trichterförmigen Canal EFGH zu bilden, ſo daß das in den Ecken EBF und HCG befindliche Waſſer ruhig bleibt. (Bernoulli braucht das Wort *gurges*, welches H. H. Käſtner in den neulich herausgegebenen Anfangsgründen der Hydrodynamik durch das Wort Strudel überſetzt. Das Wort Wirbel wollte ich ebenfalls nicht brauchen, weil es eigentlich eine kreisförmige Bewegung des Waſſers anzeigt, die hier nicht verſtanden wird, und ich war zweifelhaft, ob nicht Wirbel und Strudel gleichgeltende Wörter wären. H. H. Käſtner unterſcheidet die Bedeutungen beyder Wörter, und wegen der von ihm angeführten Gründe werde ich gleichfalls das Wort Strudel brauchen.) Wenn nun MN ein Querſchnit dieſes Strudels iſt, ſo wird MN eine Function von KP oder QP ſeyn, ſo daß MN

= FG

= FG wird, wenn KP = KQ, oder QP = o iſt. Das Geſetz, wornach ſich z ändert, läßt ſich nicht wohl angeben, und bey gegenwärtiger Unterſuchung iſt es auch nicht nothwendig, dieſes Geſetz zu kennen, weil die unveränderliche Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Waſſers von der Geſtalt dieſes Strudels EFGH nicht abhänget, deſſen völlige Höhe übrigens nur ſehr klein ſeyn wird. Einen ähnlichen kleinen Strudel muß man ſich alſo über dem Boden BC des Gefäſſes ABCD in der zwoten Fig. vorſtellen, wenn das Loch FG kleiner, 2 Fig. als die Fläche dieſes Bodens iſt.

Wer kein Vertheidiger des Geſetzes der Stetigkeit iſt, in ſeiner völligen Allgemeinheit genommen, der wird den Strudel nicht nöthig haben, um zu erklären, wie die Geſchwindigkeit $\frac{f}{h}c$ ſich in c verwandeln könne. Dies erinnert H. Hofr. Käſtner ſchon in der Abhandl. de lege continui in natura. Lipſ. 1750. §. XI. pag. 13, und er wiederhohlt eben daſſelbe in den Anfangsgründen der Hydrodynamik, 472 §. 440 S. Er meint, weil ſich nichts darauf gründet, daß eine Strudel entſteht, ſondern daß Kraft erfordert wird, Geſchwindigkeit zu ändern, ſo könne man der Vorſtellung des Strudels überall entbehren. Mir bleibt dabey nur dies Bedenken übrig, daß gleichwohl die bekannten Fundamentalformeln (112. 113 §. Mech.) nur da ihre Anwendung finden, wo die Aenderung der Geſchwindigkeit nach dem Geſetz der Stetigkeit erfolgt.

19 §.

Wenn die Oefnung FG nicht grade in der Mitte des Bodens BC befindlich wäre, ſo würden die bisherigen

rigen Schlüſſe noch ihre Anwendung finden: jedoch würde dabey noch folgendes zu erwägen ſeyn. Die bisher ſogenannte centriſche Linie iſt eigentlich nichts anders, als die Richtungslinie der Bewegung aller Elemente des Waſſers, und es iſt nichts vorhanden, was die Schlüſſe auf den Umſtand einſchränkt, daß dies grade die Linie der Schwerpuncte ſeyn müſſe.
1 Fig. Man ſtelle ſich einmahl das Stück KABQ des bisher betrachteten Gefäſſes ABCD für ſich allein als ein beſonderes Gefäß vor; und laſſe das andere Stück KDCQ in Gedanken ganz weg. In dem Boden BQ des jetzigen Gefäſſes KABQ ſey ſeitwärts die Oefnung FQ befindlich, und KQ eine Verticallinie, worauf alle horizontale Querſchnitte des Gefäßes ſenkrecht ſind. Wenn nun alle in jedem horizontalen Querſchnitt PM befindliche Waſſertheilchen mit gleichen Geſchwindigkeiten vertical herabſinken, ſo kann man ſich auch die ganze Maſſe des Elements PM*mp* im Punct P vereiniget vorſtellen. Das Gewicht dieſes Elements ſowohl, als auch der Druck, den es wegen der gegenſeitigen Würkung der Waſſertheilchen in einander leidet, iſt der Fläche PM proportional. Alle Theilchen dieſes Elements werden gleich ſtark, und zwar eben ſo ſtark, beſchleuniget, als wenn die ganze Maſſe in P beyſammen, und die Summe aller Kräfte, welche die einzelnen Theilchen deſſelben beſchleunigen, im Punct P angebracht wäre. Wenn alſo c die Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Waſſers bedeutet, f die Fläche der Oefnung FQ, und h den oberſten Querſchnitt des Gefäſſes, ſo iſt auch, wie im 12 §., $\frac{c^2}{4g} = \frac{h^2}{h^2 - f^2} . AB$, vorausgeſetzt, daß AB nicht über

etliche Fuß hoch, alſo der Druck der Atmoſphäre auf beide Oefnungen gleich groß ſey.

20 §.

Noch iſt der Fall in Erwegung zu ziehen, wenn die Oefnung FG nicht im Boden des Gefäſſes, ſon- 4 Fig. dern ſeitwärts befindlich iſt, und das Waſſer nach horizontaler, oder auch einer gegen den Horizont geneigten Richtung Qq ausſtrömt. Die Richtung der Waſſertheilchen, welche anfangs vertical iſt, muß ſich alsdenn, wenn ſie dem Boden nahe kommen, in die horizontale, oder wie man will, geneigte Richtung Qq ändern. Man kann ſich hier füglich wieder etwas dergleichen vorſtellen, wie der Strudel im 18 §. war; und annehmen, daß das Waſſer in der Ecke bey B ruhig bleibe, damit die Querſchnitte MN nicht allein nach dem Geſetz der Stetigkeit abnehmen; ſondern auch nach eben dieſem Geſetz in die verticale Lage kommen, wenn die Oefnung FG vertical iſt. Für die Höhe des Waſſers über der Oefnung kann man alsdenn die Höhe deſſelben über die Mitte der Oefnung annehmen, alſo über ihren Mittelpunct, wenn ſie kreisförmig iſt. Eben die Vorſtellung kann bleiben, wenn bey F eine Röhre angebracht iſt, die entweder grade und horizontal, oder ſich auch, wie man will, aufwärts biegt. In allen Fällen ſpringt das Waſſer mit einer Geſchwindigkeit hervor, die der Höhe der obern Oefnung über die untere zugehört; vorausgeſetzt, daß die untere Oefnung ſehr klein ſey, und die obere nicht beträchtlich höher, als die untere liege, damit der ungleiche Druck der Atmoſphäre hierin keine Aenderung mache.

21 §.

21 §.

6 Fig. Das Gefäß *ABCD* ſteht auf dem horizontalen Boden *BL*; an der Seite befindet ſich eine kleine Oefnung *G*, woraus das Waſſer nach horizontaler Richtung hervorſpringt: man ſoll die Weite *CH* finden, um welche es ſich vom Gefäß entfernt, bevor es den horizontalen Boden erreicht, vorausgeſetzt, daß allein die Schwere die Bewegung des Waſſers ändere; und das Gefäß beſtändig voll bleibe.

Aufl. Es ſey die Geſchwindigkeit, womit das Waſſer bey G nach horizontaler Richtung ausſtrömt, $= c$, überdem $GC = y$, $CH = x$; ſo hat man, vermöge des 80 §. Mech., $y = \frac{gxx}{cc}$. Nun iſt $cc = 4g.DG$ (16 §.), alſo wird $y = \frac{xx}{4.DG}$, und $x = 2\sqrt{DG.y}$, oder $CH = 2\sqrt{DG.GC}$.

Der Weg GH ſelbſt, den die Waſſertheilchen nehmen, iſt, vermöge des 96 §. Mech., eine Parabel, und dieſe iſt für alle einerley, weil alle mit gleichen Geſchwindigkeiten ausſprützen. Deswegen hat der ganze Waſſerſtrahl die Geſtalt einer Parabel, deren Natur die Gleichung $4DG.y = xx$ ausdrückt. Wenn indeſſen die Oefnung nur eine etwas beträchtliche Gröſſe hat, ſo iſt die hier gelehrte Berechnung der Geſchwindigkeit nicht mehr richtig genug, und es iſt nur beynahe $DG = \frac{cc}{4g}$, wie denn auch das Reiben des Waſſers an der innern Fläche der Oefnung

und

und hiernächſt der Widerſtand der Luft hierin Aenderungen machen.

22 §.

Man halbire CD bey E, verzeichne über CD den Halbkreis CFD aus dem Mittelpunct E, und ſetze GM auf CD ſenkrecht, ſo hat man $\sqrt{DG.GC} = GM$. Nun iſt die Weite des Guſſes $CH = 2\sqrt{DG.GC}$, folglich wird eben dieſe Weite $CH = 2GM$. Daraus flieſſen folgende Sätze: Wenn das Gefäß beſtändig voll gehalten wird, und das Waſſer aus mehrern Oefnungen G, E, K, in verſchiedenen Höhen ſtrömt, ſo ſind die Weiten, welche das Waſſer erreicht, deſto gröſſer, je gröſſer die Höhe der Oefnung iſt, aber nur ſo lange, als dieſe Höhe nicht die halbe Höhe CE des Gefäſſes überſchreitet. Aus einer Oefnung bey E ſtrömt das Waſſer am weiteſten. Hierauf nehmen dieſe Weiten wieder ab, und ſie ſind in gleichen Entfernungen gleich groß.

23 §.

Aus der bekannten Weite *CH*, die das ausſtrömende Waſſer erreicht, und der Höhe der Oefnung *CG*, die Geſchwindigkeit zu finden, womit das Waſſer aus der Oefnung hervorſpringt.

Aufl. Weil $cc.GC = g.CH^2$ (21 §.), wenn c die geſuchte Geſchwindigkeit iſt; ſo hat man $c = \sqrt{\frac{g.CH^2}{GC}}$. Die dieſer Geſchwindigkeit zugehörige Höhe iſt $= \frac{cc}{4g} = \frac{CH^2}{4GC}$.

Dieſe

Dieſe Auflöſung dient, die gegenwärtige Theorie mit der Erfahrung zu vergleichen. Wenn nämlich ein Gefäß zu dieſem Gebrauch beſonders eingerichtet, und in verſchiedenen Höhen mit Oefnungen verſehen iſt, aus welchen man das Waſſer ausſtrömen läßt, indem das Gefäß auf einem horizontalen Boden ſtehet; ſo kann man GC und CH meſſen. Graveſand beſchreibt in den Elem. Phyſ. T. I. p. 452. §. 1584. ein ſolches Gefäß, und im folgenden 1585 §. einen damit angeſtellten Verſuch. Wenn GC = 18 Zoll war, ſo war CH = $34\frac{1}{2}$ Zoll. Dies giebt $\frac{69.69}{4.4.18} = 16\frac{17}{32}$ Zoll für die Höhe, welche der Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Waſſers zugehört. Dieſe ſollte nun nach der Theorie = DG ſeyn. Es war aber bey dem Verſuch DG = 18 Zoll. Das Waſſer ſtrömt alſo entweder mit einer etwas geringern Geſchwindigkeit aus, als derjenigen, die der Höhe DG zugehört, oder es müſſen andere im 21 §. ſchon erwehnte Urſachen verhindern, daß es nicht die Weite erreicht, die es wegen dieſer Geſchwindigkeit erreichen ſollte. Im gegenwärtigen Falle hätte CH = 36 Zoll ſeyn müſſen.

24 §.

Man kann aus der Gleichung $cc \, . \, GC = g \, . \, CH^2$ noch folgende Sätze ſchlieſſen.

1. Wenn bey verſchiedenen Geſchwindigkeiten des ausſtrömenden Waſſers die Höhe der Oefnung über dem Boden einerley iſt; ſo verhalten ſich die Weiten, die das Waſſer erreicht, wie die Geſchwindigkeiten, weil $c = CH \sqrt{\frac{g}{GC}}$ iſt; und dieſer Ausdruck

druck ſich wie CH verhält, wenn GC einerley bleibt. Dieſe Weiten verhalten ſich demnach auch wenigſtens beynahe, wie die Quadratwurzeln aus den Höhen des Waſſers über der Oefnung.

2) Weil die Weite $CH = c\sqrt{\frac{GC}{g}}$ von der Geſtalt und Gröſſe des Gefäſſes, worin das Waſſer befindlich iſt, nicht abhängt; (jedoch nur bey kleinen Oefnungen) ſo iſt dieſe Weite einerley, das Gefäß mag weit, oder eng ſeyn, wenn nur die übrigen Umſtände einerley ſind. Da ferner in die Beſtimmung der Weite CH die Dichtigkeit der flüßigen Maſſe keinen Einfluß hat, ſo iſt dieſe Weite auch bey verſchiedenen flüßigen Maſſen einerley, wenn die übrigen Umſtände dieſelben bleiben.

3) Wenn bey ungleichen Höhen der Oefnung G über dem horizontalen Boden CL die Weiten einerley ſind, die das ausſtrömende Waſſer erreicht, ſo verhalten ſich die Geſchwindigkeiten des ausſtrömenden Waſſers umgekehrt, wie die Quadratwurzeln aus den Höhen der Oefnungen über dem Boden. Denn $c = CH\sqrt{\frac{g}{GC}}$ verhält ſich umgekehrt, wie $\sqrt{GC}$, wenn CH einerley iſt.

25 §.

Wenn die am Gefäß AEFD befindliche Röhre BC (5 Fig.) vertical aufwärts gebogen iſt, ſo daß das Waſſer durch die Oefnung *fg* vertical aufwärts ſpringt; ſo muß es nach der bisherigen Theorie bis an die Horizontalfläche AD des im Gefäß AEFD befindlichen Waſſers ſteigen; weil es mit einer Ge- 5 Fig.

ſchwindigkeit zu ſteigen anfängt, die der Höhe DG zugehört (40 §. Mechan.). Daraus folgt die gewöhnliche Regel, daß ſpringendes Waſſer ſo hoch ſteigen müſſe, als es gefallen iſt, wenn keine Hinderniſſe vorhanden wären, welche die Geſchwindigkeit deſſelben verminderten. Allein auſſer den vorhin am Ende des 21 §. bereits angeführten Hinderniſſen der Bewegung, nemlich dem Reiben des Waſſers an der innern Fläche der Oefnung und dem Widerſtande der Luft, tritt hier bey vertical aufwärts ſpringenden Waſſern noch dieſer beſondre Umſtand ein. Das Waſſer ſteigt mit beſtändig abnehmender Geſchwindigkeit, ſo daß jeder vorhergehende Tropfen ſchon etwas langſamer, als der unmittelbar folgende ſteigt, und eben deswegen erſterer die Bewegung des letztern etwas verzögert. In der gröſten Höhe verliert jeder Tropfen ſeine Geſchwindigkeit gänzlich, und würde vertical wieder zurückfallen, wenn das beſtändig nachfolgende Waſſer es nicht hinderte, und das oben ruhende Waſſer gleichſam auf einen Augenblick trüge, bevor daſſelbe an den Seiten herab flieſt. Es iſt ſehr begreiflich, daß das nachfolgende Waſſer dieſerwegen die Höhe nicht erreiche, zu der es ſonſt gelangen würde, und zu der es würklich gelangt, wenn man die Röhre, durch welche es herausſpringt, ein wenig von der Verticallinie abbeugt. Bey beträchtlich groſſen Waſſerhöhen würde übrigens auch der Druck der Luft gegen die untere Oefnung merklich gröſſer seyn, als gegen die obere, und man dürfte bey Anwendung der Formul des 11ten §. nicht mehr
5 Fig. $K = k$ ſetzen. Wenn endlich der Theil der Röhre, welcher ſich von C nach f erſtreckt, nicht ſo nahe bey

der

der Fall-Röhre BC, wie es die Figur vorſtellt, ſondern allererſt in einer beträchtlichen Entfernung von C wieder aufwärts gebogen wäre; ſo würde auch dieſer Umſtand die Höhe des ſteigenden Waſſerſtrahls beträchtlich vermindern. Iſt nemlich KCI eine beträchtliche lange Röhre; ſo iſt die von der Friction an ihrer innern Fläche abhängende Verzögerung der Bewegung des Waſſers ſehr beträchtlich, und die Geſchwindigkeit deſſelben wird dadurch ſehr vermindert, indem es den Weg von K durch C bis I durchlaufen muß. Ja auch dieſes Hinderniß beyſeit geſetzt, würde der Waſſerſtrahl doch nur nach und nach die Höhe erreichen, die er nachdem behält, worüber im folgenden genauere theoretiſche Unterſuchungen vorkommen werden.

26 §.

Es iſt äuſſerſt ſchwer, alle dieſe Umſtände, welche die Bewegung des Waſſers aufhalten, in Rechnung zn bringen, und die eigentliche Höhe aus theoretiſchen Gründen zu beſtimmen, zu der es wirklich ſteigt. Deswegen muß man ſich damit begnügen, einigermaſſen, durch Verſuche auszumachen, wieviel der Unterſcheid der Höhe des ſteigenden Waſſers von derjenigen betrage, wovon es gefallen iſt. Es iſt am beſten, wenn man zu Verſuchen von dieſer Art, ſo wie zu den im 23 §. beſchriebenen Verſuchen, eine cylindriſche Röhre erwählt, die mit einer dünnen metallenen Platte HI (5 Fig.) geſchloſſen iſt, in deren Mitte ſich die Oefnung *fg* befindet. Sie wird nach der jedesmaligen Abſicht der Verſuche hiernächſt an ein Gefäß ſo angeſetzt, daß das Waſſer dadurch entweder nach horizontaler Richtung ausſtrömen, oder vertical aufwärts ſpringen kann.

Die Röhre ſelbſt muß in Vergleichung mit der Oefnung ziemlich weit ſeyn. Graveſand brauchte zu ſeinen im 23 §. angeführten Verſuchen eine Röhre von etwas mehr als einen halben Zoll im Durchmeſſer, und der Oefnung Durchmeſſer war $\frac{1}{12}$ Zoll. Eben derſelbe Verfaſſer hat auch Verſuche über die Höhe der ſpringenden Waſſerſtrahle angeſtellt, jedoch nur bey Waſſerhöhen von ungefehr 2 Fuß, a. a. O. 1600 §. 456 S. Man hat ſonſt bey Springbrunnen gewöhnlich coniſche Mündungs-Röhren gebraucht, die ſich gegen die äuſſere Oefnung verengern: aber die Graveſandſchen Verſuche beweiſen, daß das Waſſer, wenn es durch eine ſolche coniſche Röhre ſprützt, nicht zu der Höhe gelange, die es erreicht, wenn ſtatt derſelben die cylindriſche mit einer durchlöcherten Platte geſchloſſene Röhre gebraucht wird. Bey der geringen Waſſerhöhe von etwa 2 Fuß ſtieg der Strahl durch die letzte Röhre 2 Zoll höher, als durch die coniſche. Wenn die cylindriſche Röhre in Vergleichung mit der Oefnung in der Platte die gehörige Weite hat, und die inwendigen Flächen der Röhre und der Oefnung wohl polirt ſind; ſo ſteigt der Strahl ſehr regelmäßig, und iſt vollkommen durchſichtig. Dagegen iſt die Würkung der Friction in der coniſchen Röhre ſehr beträchtlich, der Strahl ſteigt nicht ſo regelmäßig, und iſt nicht ſo durchſichtig. Aus eben der Urſache muß man bey den Verſuchen des 23 §. das Waſſer durch eine durchlöcherte Platte, und nicht durch eine coniſche Röhre ausſprützen laſſen.

27 §.

Mariotte, deſſen Traité du mouvement des eaux wegen der vielen darin beſchriebenen Verſuche über-

überhaupt ein intereſſantes Werk iſt, hat ſich viele Mühe gegeben, eine Regel ausfindig zu machen, welche dienen könnte, den jedesmaligen Unterſcheid der Höhe des ſpringenden Waſſerſtrahls von der Waſſerhöhe zu finden. Er giebt a. a. O. IV. Partie 1 Diſcours pag. 304. folgende Regel, die er theils durch theoretiſche Gründe, theils durch Verſuche zu rechtfertigen ſucht.

Wenn A und a die Waſſerhöhen, B und b aber die Höhen ſind, welche die Waſſerſtrahle erreichen; ſo iſt $B^2 : b^2 = A - B : a - b$, vorausgeſetzt, daß das Waſſer durch gleiche Oefnungen ſpringe.

Hätte es mit dieſer Regel ſeine Richtigkeit, ſo müſte man nur bey einer bekannten Waſſerhöhe A die zugehörige Höhe des Strahls B durch einen Verſuch ſuchen, ſo wäre $\frac{B^2}{A - B}$ in der Gleichung $\frac{b^2}{a - b} = \frac{B^2}{A - B}$ eine bekannte Gröſſe. Man ſetze dieſen Ausdruck $= E$, ſo hat man $b^2 + Eb = Ea$, und daraus folgt $b = \sqrt{(E \cdot a + \frac{1}{4}E^2)} - \frac{1}{2}E$. Umgekehrt würde man $a = \frac{b^2 + E \cdot b}{E} = b + \frac{b^2}{E}$ finden, wenn b gegeben wäre, und a geſucht würde. Der theoretiſche Beweis, wodurch Mariotte dieſe Regel zu beſtätigen ſucht, wird jetzt niemanden überzeugen: ſie ſtimmet indeſſen doch mit einer ziemlichen Anzahl von ihm angeführter Verſuche ziemlich gut überein. Deswegen kann ſie als eine Regel, die aus Verſuchen geſchloſſen iſt, ſo lange einigermaſſen dienen, bis man Mittel findet, die Schwierigkeiten der Theorie zu überwinden.

28 §.

Durch viele Verſuche hat Mariotte gefunden, daß bey der Waſſerhöhe von 5 Fuß die Höhe des ſpringenden Waſſerſtrahls nur einen Zoll geringer ſey, als 5 Fuß. Er ſchließt hieraus, man könne annehmen, wenn der Strahl 5 Fuß hoch ſteigen ſolle, daß die Waſſerhöhe 5 Fuß 1 Zoll ſeyn müſſe. Alſo wird bey nochmahl ſo hohem Waſſerſtrahl von 10 Fuß der Unterſcheid von der Waſſerhöhe 4 Zoll betragen, nach der Proportion $B^2 : b^2 = A - B : a - b$; eben dieſer Unterſcheid wird 9 Zoll betragen, wenn der Waſſerſtrahl dreymahl höher, als 15 Fuß hoch ſeyn ſoll, u. ſ. f. Hierauf gründet ſich die Berechnung nachſtehender Tafel, die Mariotte a. a. O. pag. 309. mittheilt.

Höhe des Waſſerſtrahls.	Die zugehörige Waſſer-Höhe.		
5 Fuß	5 Fuß	1 Zoll.	
10	10	4	
15	15	9	
20	20	16	
25	25	25	
30	30	36	oder 33 Fuß.
35	35	49	
40	40	64	
45	45	81	
50	50	100	
55	55	121	
60	60	144	oder 72 Fuß.
65	65	169	
70	70	196	
75	75	225	

80 Fuß	80 Fuß	256 Zoll.
85	85	289
90	90	324 oder 117 Fuß.
95	95	361
100	100	400 oder 133 Fuß 4 Zoll.
120	120	576 oder 168 Fuß.

Setzt man alſo in dem Ausdruck $E = \frac{B^2}{A - B}$, (27 §.) nach Mariotts Verſuchen $B = 5$ Fuß $=$ 60 Zoll, $A - B = 1$ Zoll; ſo erhält man $E = 3600$, da dann die Höhen, wenn man aus den Gleichungen des 27 §. rechnen will, in Zollen ausgedruckt werden müſſen. Will man ſie in Fuſſen ausdrücken; ſo wird $E = \frac{5^2}{\frac{1}{12}} = 300$. Folgende Verſuche, die Mariotte a. a. O. p. 312. 313. 314. 315. mittheilt, dienen nun, die angenommene Regel zu prüfen.

Waſſerhöhe	Durchmeſſer der Oeffnung.	Höhe des Strahls.
24 Fuß 5 Zoll.	6 Linien	22 Fuß 10 Zoll.
	4 Linien.	22 Fuß $8\frac{1}{2}$ Zoll.
	3 Linien.	22 Fuß 2 Zoll.
$12\frac{1}{3}$ Fuß.	6 Linien.	12 Fuß.
26 Fuß 1 Zoll.	6 Linien.	24 Fuß 2 bis 3 Zoll.
	10 Linien.	23 Fuß 9 Zoll.
	3 Linien.	22 Fuß.
34 Fuß $11\frac{1}{2}$ Zoll.	6 Linien.	31 Fuß 8 bis 9 Zoll.
	3 Linien.	28 Fuß.
	4 Linien.	30 Fuß.
	15 Linien.	27 Fuß.

Bey allen dieſen Verſuchen war der Waſſerbehälter AEFD (5 Fig.) einen Fuß, und die Fallröhre BC 3 Zoll im Durchmeſſer weit.

29 §.

In der zwoten Columne ſind die Durchmeſſer der Oefnungen, durch welche das Waſſer ſprützte, deswegen angegeben, weil die Höhe des Strahls auch von der Gröſſe dieſer Oefnungen abhängt, wie die Verſuche beſtätigen. Es giebt für jede Waſſerhöhe ein gewiſſes Maaß der Oefnung, wobey der Strahl am höchſten ſteigt, vorausgeſetzt, daß die Fall- und Leitröhren die gehörige Weite haben. Je enger die Oefnungen ſind, deſto ſtärker iſt die Friction, wenn die übrigen Umſtände einerley ſind. Weil nun die Friction auch ohne Zweifel bey gröſſern Waſſerhöhen ſtärker iſt, als bey geringern, ſo erfordern gröſſere Waſſerröhren gröſſere Oefnungen. Je gröſſer aber die Oefnungen werden, deſto gröſſer wird der Widerſtand der Luft, nebſt der Maſſe des zurückfallenden Waſſers, weswegen die Höhe des Waſſerſtrahls wieder abnehmen muß. Man vergleiche hiemit Graveſands Phyſices Elem. Math. Lib. III. Cap. VIII. pag. 455. 458. §. 1596. 1607-1710. Wenn man demnach Mariotts Regel, die Höhe des Strahls zu berechnen, anwenden will; ſo muß man vorausſetzen, daß die Oefnung nach Proportion der Waſſerhöhe, und der Weite der Leitröhren die gehörige Gröſſe habe. Dieſe Umſtände liegen auch bey dem Verſuch, wodurch E im 28 §. beſtimmt iſt, zum Grunde, und dies war noch zu wiſſen nöthig, um eine Vergleichung der Verſuche mit Mariotts Regel anzuſtellen.

30 §.

Im erſten Verſuch war die gröſte Höhe des Strahls 22 Fuß 10 Zoll, oder 274 Zoll, bey einer Oefnung von 6 Linien. Dies giebt $\frac{h^2}{E} = \frac{75376}{3600}$ = 20,9 Zoll, alſo die zugehörige Waſſerhöhe $a = h + \frac{h^2}{E}$ (27 §.) = 24 Fuß 6,9 Zoll, welches mit dem Verſuch ſehr nahe übereinkommt.

Beym zweyten Verſuch war die Höhe des Strahls 12 Fuß, alſo $\frac{h^2}{E} = \frac{144}{300}$ Fuß = 5,7 Zoll, und nach dem Verſuch müſten es 4 Zoll ſeyn.

Der dritte Verſuch gab den Strahl 24 Fuß 3 Zoll = 24,25 Fuß, alſo $\frac{h^2}{E} = \frac{588,06}{300}$ = 1 Fuß, 11½ Zoll, und nach dem Verſuch war es 1 Fuß 10 bis 11 Zoll.

Nach dem vierten Verſuch war die gröſte Höhe des Strahls 31,75 Fuß, alſo $\frac{h^2}{E}$ = 3 Fuß $4\frac{1}{5}$ Zoll; nach dem Verſuch waren es 3 Fuß und etwa 3 bis 4 Zoll.

Mariotts Regel ſtimmt alſo mit dieſen Verſuchen gut genug überein, und er erwehnt a. a. O. p. 315, noch einiger bey einer Waſſerhöhe von 50 Fuß angeſtellten Verſuche, die ebenfalls die Regel beſtätiget haben. Durch Oefnungen von 6 bis 7 Linien gieng der Strahl am höchſten.

Ein andermahl brauchte er bey einer Waſſerhöhe von 5½ Fuß eine ſehr weite Leit-Röhre, und der

Strahl ſprang, durch Oefnungen von 3, 4 und 6 Linien, $5\frac{1}{2}$ Fuß weniger 15 bis 16 Linien hoch. Der Unterſchied war hier bey den verſchiedenen Oefnungen unbeträchtlich, und betrug bey den Oefnungen von 3 und 6 Linien kaum eine Linie. Die Rechnung giebt

$$\frac{b^2}{E} = \frac{64,75^2}{3600} = 1,2 \text{ Zoll, oder } 14\tfrac{1}{5} \text{ Lin.,}$$

welches etwa nur eine Linie weniger iſt, als der Verſuch gegeben hat.

31 §.

Es iſt die Gröſſe der Oefnung $= f$, nebſt der Höhe des Waſſers über dieſe Oefnung $= a$ gegeben: man frägt, wie viel Waſſer in gegebener Zeit t aus dem Gefäß ausſtröme, vorausgeſetzt, daß das auslaufende Waſſer beſtändig durch neues erſetzt werde, damit das Gefäß beſtändig auf einerley Höhe angefüllt bleibe.

Aufl. Dafern die Schwere und andre Urſachen die Richtung und Geſchwindigkeit des durch die Oefnung ſchon durchgelaufenen Waſſers nicht änderten; ſo würde der Waſſerſtrahl die Geſtalt eines graden Cylinders oder Priſma annehmen, deſſen Grundfläche die Oefnung wäre. In der Zeit t würde die Länge dieſes Waſſerſtrahls ſo groß werden, als der Weg, den die im erſten Anfang der Zeit t durchgelaufenen vorderſten Waſſertheilchen in dieſer Zeit zurücklegen müſten; alſo $= c \cdot t$, wenn c ihre Geſchwindigkeit iſt (6 §. Mech.). Demnach wäre die ausgelaufene Waſſermenge $= fct$. Ob nun gleich die Richtung und Geſchwindigkeit der ſchon ausgelaufe-

laufenen Waſſertheilchen wegen äuſſerlicher Urſachen Aenderungen leiden, ſo fällt doch leicht in die Augen, daß dies nichts in der ausgelaufenen Waſſermenge ändere. Setzt man alſo dieſe Waſſermenge $= q$, ſo hat man $q = fct$; und weil $c = 2\sqrt{ga}$ iſt, (14 §.) ſo wird $q = 2ft\sqrt{ga}$.

Iſt die Oefnung f ein Kreis, und der Halbmeſſer $= r$. oder der Durchmeſſer $= d$, ſo wird $f = \pi rr = \frac{1}{4}\pi dd$, alſo $q = 2\pi rrt\sqrt{ga} = \frac{1}{2}\pi ddt\sqrt{ga}$.

32 §.

Hätte es mit den Vorausſetzungen, worauf ſich dieſe Rechnung gründet, in allen Stücken ſeine völlige Richtigkeit; ſo lieſſe ſich aus der beobachteten Menge Waſſer, die aus einem Gefäß in bekannter Zeit ausgeworfen iſt, die Geſchwindigkeit des Waſſers finden. Die Gleichung $q = fct$ giebt nämlich $c = \frac{q}{ft}$, und wenn man die dieſer Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $= v$ ſetzt, ſo wäre $v = \frac{qq}{4gfftt}$. Dieſe müſte nun mit der Höhe des Waſſers über der Oefnung einerley ſeyn. Eben dieſe Formul würde alſo dienen, wenn man finden wollte, wie hoch das Waſſer im Gefäß über der Oefnung ſtehen müſſe, damit in gegebener Zeit eine gegebene Menge ausflieſſe.

Aus der Gleichung $q = 2ft\sqrt{ga}$ hat man auch $t = \frac{q}{2f\sqrt{ga}}$, und dieſer Ausdruck würde dienen, die Zeit zu finden, binnen welcher eine gegebene Waſſermenge bey gegebener Waſſerhöhe durch eine gegebene Oefnung läuft.

Um

Um dieſe Theorie mit der Erfahrung zu vergleichen, hat man über die Menge Waſſer, welche aus ſolchen Gefäſſen in gegebener Zeit ausläuft, ſchon im vorigen Jahrhundert und im Anfange des gegenwärtigen viele Verſuche angeſtellt, und beſtändig befunden, daß eine beträchtlich geringere Menge auslaufe, als nach der Theorie auslaufen ſollte. **Mariotte** im Traité du mouvement des eaux, III Partie II Diſcours p. 265. verſichert, er habe durch viele genau angeſtellte Verſuche gefunden, **daß durch eine kreisrunde Oefnung von 3 Linien im Durchmeſſer in einer Minute 14 Pariſer Pinten laufen, wenn das Waſſer 13 Fuß hoch über der Oefnung ſteht.** Ein Behälter, der ungefähr 20 Pinten faßte, war mit einer hinlänglich weiten Röhre verbunden, die vertical abwärts gieng, unten aber wieder aufwärts gebogen war, wie die Röhre BKCI in der 5 Fig. Am äuſſern Ende war ſie mit einer Platte HI verſchloſſen, und in ihrer Mitte befand ſich die runde Oefnung. Nach **Mariotts** Bericht wiegt eine Pariſer Pinte eigentlich 2 Pfund weniger 7 Drachmen, a. a. O. III Partie I Diſc. p. 245. Um aber die Brüche zu vermeiden, nimmt er nachher an, daß eine Pinte grade 2 Pfund wäge, wenn das Pintenmaaß bis zum überlaufen voll iſt (a. a. O. p. 260.) Solcher Pinten gehen alsdenn 35 auf einen Cubicfuß. **Mariotts** Ueberſetzer hat das franzöſiſche: *pintes*, durch das teutſche: **Kannen** gegeben.

33 §.

Um dieſen Verſuch mit der bisherigen Theorie zu vergleichen, berechne man erſtlich aus der Formul

$q =$

$q = 2\pi rrt\sqrt{ga}$ die Waſſermenge, und ſetze in ſolcher Abſicht $r = 1,5$ Linien, $t = 60$ Secunden, $a =$ 13 Fuß $= 1872$ Linien, $g = 15$ Fuß 1 Zoll (182 §. Mech.) $= 2172$ Linien, und die Rechnung giebt

$$l\,a = 3,2723058$$
$$l\,g = 3,3368598$$
$$6,6091656$$

$$l\sqrt{ag} = 3,3045828$$
$$l\,2t = 2,0791812$$
$$l\,\pi = 0,4971498 \quad (467\ \text{§. G.})$$
$$2l\,r = 0,3521826$$
$$l\,q = 6,2330964$$

Die zugehörige Zahl drückt q in Cubiclinien aus. Wenn man aber hievon

$l\,12^3 = 3,2375436$ ſubtrahirt, ſo iſt

der Reſt $= 2,9955528$,

und die zugehörige Zahl drückt q in Cubiczollen aus, ſo, daß man $q = 989,81$ Cubiczoll erhält. Da nun 35 Pinten einen Cubicfuß, oder 1728 Cubiczoll geben, ſo hält eine Pinte 49,37 Cubiczoll, und es wird $q = 20$ Pinten, welches 6 Pinten mehr ſind, als der Verſuch gegeben hat.

Man ſetze nun, es ſey v die der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe, welche das Waſſer bey dieſem Verſuch gehabt hat, und ſuche ſie aus der bekannten Waſſermenge $q = 14$ Pinten $= \frac{2}{5}$ Cubicfuß $= 691,2$ Cubiczoll $= 691,2 \times 1728$ Cubiclinien, vermittelſt der Formul $v = \dfrac{q}{4gfftt}$ (32 §.), wo $f = \pi rr$ iſt, ſo erhält man

$l\,g =$

$$l\ g = 3,3368598$$
$$l\ 4tt = 4,1583624$$
$$l\ \pi^2 = 0,9942996$$
$$l\ r^4 = 0,7043652$$
$$l\ 4g\pi^2 r^4 tt = 9,1938870$$

Ferner $l\ 691,2 = 2,8396037$

$l\ 1728 = 3,2375437$

$l\ q = 6,0771474$

alſo $l\ qq = 12,1542948$

Hievon abgezogen $9,1938870$

Bleibt Reſt $= 2,9604078$

Die zugehörige Zahl würde v in Linien geben. Man ſubtrahire alſo

$l\ 144 = 2,1583615$

ſo wird $l\ v = 0,8020453$

und $v = 6,3393$. Aber die Waſſerhöhe war 13 Fuß, ſo, daß die Rechnung noch nicht die Hälfte davon giebt, und es hat das Anſehen, als wenn das Waſſer mit einer viel kleinern Geſchwindigkeit hervorſpringe, als mit derjenigen, welche der Waſſerhöhe zugehört: da doch die Verſuche über die Weite, die der horizontale Waſſerſtrahl erreicht (23 §.), ſehr nahe diejenige Geſchwindigkeit geben, welche der Waſſerhöhe zugehört.

34 §.

Joh. Poleni hat dieſen Mariottiſchen Verſuch wiederhohlt, und noch andere ähnliche Verſuche angeſtellt. Er erzählt dieſe Verſuche in der Epiſtola ad Jo. Jac. Marinonium, in qua agitur de Solis defectu A. 1724. Patavii obſervato, & de aliquibus experimentis pertinentibus ad aquas fluentes.. Sie iſt in dem

dem von ihm herausgegebenen Faſciculo epiſtolarum mathematicarum Patavii 1729. die dritte. Er ließ bey der Waſſerhöhe von 13 Pariſer Fuß das Waſſer laufen, veränderte aber die Beſchaffenheit der Oefnung, ſo daß er es bald durch eine dünne durchlöcherte Platte, bald durch eine Röhre laufen ließ. Durch eine dünne eiſerne Platte liefen in einer Minute 607 Cubiczoll, alſo noch viel weniger, als nach Mariotts Verſuch, da es 691 Cubiczoll waren. Poleni brauchte hierauf auch eine meßingene Platte, die etwas weniges über $\frac{1}{4}$ Linie dick war. Die innere Fläche der Oefnung war bis auf die Hälfte coniſch ausgefeilt, ſo, daß ſie die Geſtalt einer ſolchen Kegelfläche bekam, wovon die Seitenlinie gegen die Grundfläche unter einem halben rechten Winkel geneigt iſt. Durch dieſe Platte liefen in einer Minute 627 Cubiczoll Waſſer, wenn die coniſche Seite auswärts gekehrt war, und 713 Cubicfuß, wenn die Platte umgekehrt, und die cylindriſche Seite auswärts gekehrt war. Dieſe letztere Waſſermenge kommt der Mariottiſchen am nächſten. Mariotte beſchreibt nicht deutlich genug, was die von ihm gebrauchte Röhre an ihrer Mündung für eine Geſtalt gehabt habe: ich ſchlieſſe nur aus ſeiner Zeichnung, daß ſie mit einer Platte geſchloſſen geweſen ſey, und Poleni a. a. O. muthmaſſet eben daſſelbe. Staat der Platte brauchte Poleni hiernächſt eine cylindriſche ebenfalls 3 Linien im Durchmeſſer weite Röhre bey eben der Waſſerhöhe. Die Röhre war anfangs 13 Linien lang, und in einer Minute liefen 809 Cubiczoll Waſſer durch. Die Röhre ward darauf um 2 Linien verkürzt, und an dem einen Ende eben ſo coniſch ausgefeilt, wie vorhin die meßingene Platte.

Dies

Dies coniſche Ende ward mit dem Gefäß verbunden, und ſo liefen in einer Minute 889 Cubiczoll Waſſer durch. Endlich ward dieſelbe Röhre noch um 4 Linien verkürzt, ſo, daß ſie nur 7 Linien lang blieb, und wie vorhin am Gefäß angeſetzt; da dann 905 Cubiczoll in einer Minute durchliefen.

Beym letzten Verſuch kam demnach die Waſſermenge derjenigen am nächſten, welche, vermöge der im Anfang des vor. §. vorgetragenen Rechnung, bey dieſer Waſſerhöhe und Oefnung in einer Minute durchlaufen müſte: dies waren nämlich 989,8 Cubiczoll. Setzt man aber die Waſſermenge von 905 Cubiczoll, oder 905×1728 Cubiclinien, zum Grunde, und berechnet daraus v, wie im 33 §., ſo findet man

$$
\begin{aligned}
l\,905 &= 2{,}9566486 \\
l\,1728 &= \underline{3{,}2375437} \\
l\,q &= 6{,}1941923 \\
l\,qq &= 12{,}3883846 \\
l\,4g\pi^2 r^4 tt &= \underline{9{,}1938870} \quad (33\ \S.) \\
& \ 3{,}1944976 \\
l\,144 &= \underline{2{,}1583625} \\
l\,v &= 1{,}0361351
\end{aligned}
$$

Alſo wäre $v = 10{,}868$ Fuß, und dieſe Zahl kommt der Waſſerhöhe von 13 Fuß viel näher, als die im vor. §. aus dem Mariottiſchen Verſuch für v gefundene Zahl. Muſſchenbröck in der Introd. ad Ph. Nat. T. II. Cap. 24. §. 1294. p. 496. führt dieſen Verſuch aus dem Poleni an, rechnet aber ſo, als wenn Poleni Bononiſches Maaß gebraucht hätte. Hätte

Hätte dies ſeine Richtigkeit, ſo würde nach dieſem Verſuch die Höhe v der Waſſerhöhe noch viel näher kommen, und zwiſchen 12 und 13 Fuß fallen. Nach einer Vergleichungstafel, die in Leupolds Theatro Arithmethico-Geometrico im XXI Cap. 335 §. 151 S. ſteht, iſt das Verhältniß des Bononiſchen Fuſſes zum Rheinländiſchen = 16824 : 13913, alſo $g = \frac{13913}{16824} \cdot 15{,}625 = 12{,}923$ Bononiſche Fuß, oder 12 Fuß 11 Zoll. Dieſe Zahl bey obiger Rechnung ſtatt g gebraucht, würde $v = 12{,}685$ Fuß geben. Allein Poleni ſagt auf der 6 Seite des angeführten Briefes ausdrücklich, daß er Pariſer Maaß gebraucht habe. Deswegen iſt die Uebereinſtimmung mit der Theorie nicht ſo groß, als ſie Muſſchenbröck macht.

35 §.

Aus der Vergleichung aller ſechs Verſuche des H. Poleni ergiebt ſich, daß allemahl viel weniger Waſſer auslaufe, als die Theorie erfordert, wenn es durch ein Loch ſtrömt, das in einer ſehr dünnen Platte befindlich iſt: und daß im Gegentheil die würklich ausgelaufene Waſſermenge beynahe mit derjenigen übereinkomme, welche der Theorie gemäß iſt, wenn an der Oefnung eine kurze cylindriſche Röhre angebracht iſt, durch welche das Waſſer ausläuft.

Weil man anfangs bey dieſen Verſuchen das Waſſer gewöhnlich durch eine durchlöcherte Platte laufen ließ; ſo veranlaßte dies viele Naturlehrer, dafür zu halten, daß die Höhe, welche der Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers zugehört, kleiner ſey, als die Waſſerhöhe: und weil die Verſuche lehrten, daß bey verſchiedenen Höhen der Waſſermenge der Qua-

Quadratwurzel aus dieſer Höhe beynahe proportional ſey, ſo ſchloß man, daß ſich wenigſtens die den Geſchwindigkeiten zugehörigen Höhen, wie die Waſſerhöhen verhielten. Wenn bey den Waſſerhöhen A, a, den Geſchwindigkeiten die Höhen V, v, zugehören; ſo ſchloß man, es ſey $A : a = V : v$, alſo $v = \frac{V}{A} \cdot a$. Das Verhältniß $\frac{V}{A}$ ſuchte man durch einen Verſuch, welches alſo nach Mariotts Verſuch ungefähr $= \frac{1}{2}$ wäre. Verſuche, die ungefähr eben das geben, haben vermuthlich Hrn. Newton veranlaſſet, daß er in den Princip. Phil. Nat. Math. Lib. II. Prop. XXXVII. Probl. IX. p. 330. Ed. I. durch theoretiſche Gründe zu beweiſen ſucht, es ſey allemahl $v = \frac{1}{2}a$. Nach einem Verſuch, welchen Gulielmini angeſtellt hat, wäre $\frac{V}{A}$ etwa nur $= \frac{1}{4}$. (De menſura aquarum fluentium. Append. poſt Lib. VI.)

36 §.

Die eigentliche Urſache aber, woher es kommt, daß die nach dem 31 §. berechnete Waſſermenge in vielen Fällen ſo ſehr von derjenigen unterſchieden iſt, welche man durch Verſuche findet, liegt darin, weil die Vorausſetzung im 31 §. nicht ſo ſchlechthin richtig iſt, daß alle Waſſertheilchen, die zugleich durch die Oefnung laufen, 1) mit gleichen Geſchwindigkeiten, und 2) nach einerley Richtung fortgehen. Wegen der Friction werden diejenigen Theilchen, welche zunächſt am inneren Umfange der Oefnung durchlaufen, etwas aufgehalten, und laufen lang-

langſamer, als die, ſo durch die Mitte gehen. Am allerwenigſten aber kann die Vorausſetzung, daß alle Waſſertheilchen durch die Oefnung nach parallelen Richtungen laufen, bey einer genauern Prüfung beſtehen. Im 18 §. iſt bereits erinnert worden, daß diejenigen Waſſertheilchen, welche der Oefnung ſehr nahe liegen, vor ihrem Ausfluß eine Art eines Strudels bilden müſſen. Wenn man nun, um die Vorſtellung, wie es etwa damit zugehe, zu erleichtern, ein vertical ſtehendes Gefäß ABCD betrachtet, das 7 Fig. in der Mitte des Bodens eine Oefnung FG hat; ſo ſiehet man wohl, daß nur diejenigen Waſſertheilchen, welche durch die Mitte der Oefnung laufen, nach verticaler Richtung ausflieſſen können. Wenn gleich die Wege aller im Gefäß herabſinkenden Waſſertheilchen vertical ſind, ſo werden doch nur diejenigen, welche ſich über die Mitte der Oefnung befinden, nach dieſer Richtung auslaufen. Die Wege aller übrigen müſſen ſich nahe über dem Boden insgeſammt gegen die Oefnung beugen, etwa ſo, wie es die 7 Figur vorſtellet, ſo, daß diejenigen, welche am nächſten an den Seitenwänden des Gefäſſes herabſinken, ſich nahe am Boden faſt in die horizontale Richtung lenken, und ſo gegen die Oefnung zu flieſſen müſſen. Dies wird den Erfolg haben, daß der ausflieſſende Waſſerſtrahl nicht die Geſtalt eines graden Cylinders oder Priſma annehmen kann. Die zunächſt am Umfang des Lochs durchſtrömenden Waſſertheilchen laufen auch noch nach dem Durchgang nach Richtungen, die gegen die Axe des Waſſerſtrahls zu convergiren, und eben deswegen muß ſich der Waſſerſtrahl nahe vor der Oefnung noch etwas enger zuſammen ziehen, ſo, daß ſeine Querſchnitte kleiner werden, als

die Fläche der Oefnung iſt. Der Waſſerſtrahl wird daher nahe vor der Oefnung etwa die Geſtalt FG*gf* annehmen, und man muß dieſe Zuſammenziehung des Waſſerſtrahls von einer andern Verengerung deſſelben unterſcheiden, die in gröſſerer Entfernung von der Oefnung deswegen erfolgt, weil die herausfallenden Waſſertheilchen von der Schwere beſchleuniget werden, und die voran laufenden Theilchen dieſerwegen etwas ſchneller, als die nachfolgenden, laufen. (Eben dieſe Beſchleunigung iſt die Urſache, warum der Waſſerſtrahl nur auf eine gewiſſe Weite von der Oefnung zuſammenhängend bleibt, und ſich hiernächſt in Tropfen zertheilt.) So macht Herr Daniel Bernoulli in der Hydrodynamica Sect. IV. §. 3. pag. 62. die Sache vorſtellig, und er hat dergleichen Bewegungen des Waſſers nahe am Boden des Gefäſſes oft wahrgenommen, wenn ſich im Waſſer kleine Stückchen Siegellack befanden, die mit demſelben ausliefen. Eine ähnliche Zuſammenziehung des Waſſerſtrahls wird nun auch erfolgen, wenn das Waſſer nach horizontaler, oder einer jeden andern Richtung, ausläuft: allemahl wird das Waſſer von allen Seiten gegen das Loch zuflieſſen. Ja, dieſe Zuſammenziehung wird beym horizontalen Waſſerſtrahl noch ſichtbarer, als beym verticalen, zu unterſcheiden ſeyn, weil die andere von der Beſchleunigung der Schwere abhängende Zuſammenziehung ſich nicht einmiſcht.

37 §.

Ueber dieſe Zuſammenziehung des Waſſerſtrahls hat ſchon Newton Verſuche angeſtellt, und Joh. Poleni hat dieſe Verſuche mit noch mehrerer Sorgfalt

falt und Aufmerkſamkeit auf alle dabey eintretende Umſtände wiederholt. Er erzählt dieſe Verſuche in ſeinem Buch de caſtellis, per quae derivantur fluviorum aquae, habentibus latera convergentia, Patavii 1718. S. 15. u. f., worauf ſich Daniel Bernoulli a. a. O. : §. 61 S. beziehet. So viel Poleni ſelbſt und andere bemerkt haben, iſt dieſe Zuſammenziehung des Waſſerſtrahls alsdenn am beträchtlichſten, wenn das Waſſer durch ein Loch in einer ſehr dünnen Platte läuft. Läßt man aber das Waſſer durch eine kleine cylindriſche Röhre laufen, ſo ſcheint dieſe Zuſammenziehung gröſtentheils wegzufallen. Erwählt man ſtatt der cylindriſchen eine coniſche Röhre, die ſich gegen die äuſſere Mündung zu verengert, ſo zieht ſich der Strahl ebenfalls zuſammen. Wenn alſo die Platte, worin eine Oefnung, um das Waſſer durchzulaſſen, befindlich iſt, eine etwas beträchtliche Dicke hat, und das Loch genau cylindriſch iſt, ſo wird ſich der Strahl nicht ſo ſehr zuſammen ziehen, als wenn die Platte ſehr dünne iſt. Uebrigens lehrt die Erfahrung, daß die Zuſammenziehung des Strahls deſto geringer ſey, je gröſſer die Oefnung in Vergleichung mit den Querſchnitten des Gefäſſes iſt. Die Urſache davon fällt leicht in die Augen, weil nämlich die Bewegung des Waſſers nahe am Boden deſto weniger Schiefe bekommt, je größer das Loch iſt. Schwerer iſt es auszumachen, ob bey einerley Oefnung die Zuſammenziehung bey einer größern Waſſerhöhe ſtärker ſey, als bey einer geringern. Weil bey größerer Waſſerhöhe die Geſchwindigkeit des Ausfluſſes größer iſt; ſo verurſacht dies auch wohl eine etwas ſtärkere Zuſammenziehung des Strahls, daß es alſo auf die Waſſerhöhe ſowohl, als auch

auf die Größe der Oefnung bey dieſer Zuſammenziehung ankommt. Es würde ſeine großen Schwierigkeiten haben, wenn man das Geſetz dieſer Zuſammenziehung aus theoretiſchen Gründen ſchließen wollte. Deswegen begnügt man ſich damit, den kleinſten Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls in beſondern Fällen durch Verſuche zu finden, der auch ſchlechthin der **Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls** (ſectio venae contractae) heiſt.

38 §.

Dies läßt ſich nun durch unmittelbare Meſſung bewerkſtelligen, ob es gleich nicht wohl mit der Schärfe geſchehen kann, die man wünſchen mögte. So hat es **Newton** gemacht Phil. Nat. Princip. Math. Lib. II. Prop. XXXVI. Probl. VIII. Ed. III. Er ließ das Waſſer durch ein rundes Loch in einer ſehr dünnen Platte nach horizontaler Richtung laufen, deſſen Durchmeſſer $\frac{5}{8}$ Zoll groß war, und maß aufs genaueſte den Durchmeſſer vom kleinſten Querſchnitt des Waſſerſtrahls. Er fand dieſen Durchmeſſer des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls ungefähr in der Entfernung eines $\frac{1}{2}$ Zolles von der Oefnung $\frac{21}{40}$ Zoll groß; alſo das Verhältniß des Durchmeſſers der Oefnung zum kleinſten Durchmeſſer des Waſſerſtrahls $= 25 : 21$, folglich das Verhältniß der Fläche der Oefnung zur Fläche des kleinſten Querſchnitts des Waſſerſtrahls $= 25^2 : 21^2 = 1,41 : 1$, beynahe $= \sqrt{2} : 1$. Die im Anfang des vorigen §. ſchon erwähnten Verſuche, welche **Poleni** nach der Zeit angeſtellet hat, geben ungefähr eben daſſelbe Verhältniß. Bey 1 Fuß 9 Zoll 4 Linien Waſſerhöhe

höhe lief das Waſſer durch eine Oefnung in einer dünnen Platte. Dieſer Oefnung Durchmeſſer war 26 Linien, des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls Durchmeſſer aber $20\frac{1}{2}$ Linien. Dies giebt das Verhältniß der Durchmeſſer $= 52 : 41$, und der Flächen $= 52^2 : 41^2 = 1{,}59 : 1$ etwas größer, als das Newtonſche. (Man ſ. die Anmerkungen der Hrn. *le Seur* und *Jaquier* zu der oben angeführten Stelle aus Newtoni Principiis). Bey 1 Fuß 2 Zoll 10 Lin. Waſſerhöhe lief das Waſſer durch eine Oefnung von 9 Linien im Durchmeſſer in einer dünnen Platte, und des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls Durchmeſſer war $7\frac{1}{2}$ Linien; alſo das Verhältniß der Flächen $= 18^2 : 15^2 = 1{,}44 : 1$. Nachdem Newton dieſe Zuſammenziehung bemerkt hatte, ſchloß er in der zwoten Ausgabe der Princip. daraus, das zwar das Waſſer durch die Oefnung ſelbſt mit einer Geſchwindigkeit laufe, die der halben Waſſerhöhe zugehört, wie in der erſten Ausgabe angenommen war; durch den Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls aber mit einer Geſchwindigkeit, die der ganzen Waſſerhöhe zugehört, weil ſich die Geſchwindigkeiten umgekehrt, wie die Querſchnittte verhalten.

Herr Hofr. Käſtner hat in ſeinen neulich herausgegebenen Anfangsgründen der Hydrodynamik I. Abſchnitt 117 bis 148 §. 79 bis 95 S. des Hrn. Poleni Verſuche vollſtändig erzählt.

39 §.

Wenn man nun dies alles, was die Verſuche gelehret haben, zuſammennimmt; ſo ſiehet man wohl, daß die Theorie von dem Erfolg nicht beträchtlich

abweichen werde, wenn die im 31 §. vorgetragene Regel für die Berechnung der Waſſermenge ſo verbeſſert wird: **Man muß ſtatt der Fläche der Oefnung, durch welche das Waſſer läuft, in ſolchen Fällen den Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls brauchen,** wenn die Geſtalt der Oefnung ſo beſchaffen iſt, daß die Zuſammenziehung erfolgen muß; alſo vornämlich alsdenn, wenn das Waſſer durch ein Loch in einer dünnen Platte, oder durch eine coniſche Röhre läuft, die ſich gegen die äuſſere Mündung zu verengert. (Nach **Polenis** Verſuchen ſcheint auch bey cylindriſchen Röhren eine wiewohl geringe Zuſammenziehung zu erfolgen, in dem Verhältniß $52^2 : 49^2 = 1{,}06 : 1$. Die bey dem Verſuch gebrauchte Röhre war 91 Linien lang, ihr Durchmeſſer 26 Linien, die Waſſerhöhe 1 Fuß 9 Zoll 4 Linien, des Waſſerſtrahls kleinſter Durchmeſſer $24\frac{1}{2}$ Linien.) Wenn man, um ſich an keine Hypotheſe zu binden, das Verhältniß der Oefnung zum Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls $= \alpha : 1$ ſetzt, und es iſt f die Fläche der Oefnung; ſo iſt gedachter Querſchnitt $= \frac{f}{\alpha}$, und man muß in den Formuln des 31 und 32 §. $\frac{f}{\alpha}$ ſtatt f ſchreiben. Dies giebt $q = 2\frac{f}{\alpha}t\sqrt{ga}$ (31 §.) und $v = \frac{\alpha\alpha qq}{4gfftt}$ (32 §.) Nimmt man $\alpha = \sqrt{2} = 1{,}414$, ſo muß man im 33 §. das dort gefundene $q = 989{,}81$ Cubiczoll noch durch 1,414 dividiren, und dies giebt 700 Cubiczoll, welches mit dem Erfolg genau genug übereinkommt. Es

gab

gab nämlich der Verſuch 691 Cubiczoll. Nach Polenis Verſuchen (38 §.) wäre für die durchlöcherte Platte $\alpha = 1,59$, alſo $q = \frac{989,8}{1,59} = 622$ Cubiczoll, und der Verſuch gab 607 Cubiczoll.

40 §.

Weil es ſehr ſchwer iſt, den Durchmeſſer des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls genau genug zu meſſen; ſo könnte man nun dieſe Formuln brauchen aus der beobachteten Waſſermenge das Verhältniß der Zuſammenziehung des Strahls zu ſchließen. Wenn bey einem Verſuch durch die Oefnung F in der Zeit T bey der Waſſerhöhe A die Waſſermenge Q fließt; ſo hat man $Q = \frac{2F}{\alpha} . T\sqrt{gA}$, alſo $\alpha = \frac{2F . T\sqrt{gA}}{Q}$. Man müſte alſo die nach der Regel des 31 §. berechnete Waſſermenge durch die würklich ausgelaufene dividiren, um α zu finden. Nach Mariotts Verſuch wäre alſo $\alpha = \frac{10}{7} = 1,428$, beynahe $= \sqrt{2}$. Nach Polenis Verſuch am Ende des 39 §. aber $\alpha = \frac{989,8}{607} = 1,63$, beträchtlich größer als $\sqrt{2}$.

Aus der Gleichung $q = \frac{2f}{\alpha} t\sqrt{ga}$ folgen zwo andere, die f oder a beſtimmen, wenn das übrige gegeben iſt, nämlich $f = \frac{\alpha q}{2t\sqrt{ga}}$, und $a = \frac{\alpha\alpha qq}{4gfftt}$. Hätte man alſo eine ſichere Regel α

zu finden, ſo würden dieſe Gleichungen folgende zwo Aufgaben auflöſen.

1) Die Waſſerhöhe iſt gegeben, man ſoll finden, wie groß die Oefnung ſeyn muß, damit eine gegebene Menge in gegebener Zeit auslaufe, und

2) Die Oefnung iſt gegeben, man ſoll finden, wie groß die Waſſerhöhe ſeyn muß, damit in gegebener Zeit eine gegebene Menge auslaufe.

Weil auch $t = \frac{\alpha q}{2f\sqrt{ga}}$, ſo lieſſe ſich

3) finden, in wie vieler Zeit eine gegebene Menge bey gegebener Höhe durch eine gegebene Oefnung läuft.

41 §.

Belidor in der Architectura Hydraulica I. Buch III. Cap. 8 Abth. 491 u. f. §. 67 u. f. S. der Ueb. nennt die Waſſermenge, ſo wie ſie nach der Regel des 31 §. gefunden wird, die natürliche Waſſermenge, und unterſcheidet ſie von der würklichen, welche die Verſuche geben. Den Unterſchied zwiſchen beyden, welchen er den Waſſerverluſt nennet, ſchreibt er blos der Friction am Umfang der Oefnung zu, und giebt alsdenn eine Regel, in jedem Fall den Waſſerverluſt zu berechnen. Hiebey nimmt er an, das Verhältniß zwiſchen der natürlichen Waſſermenge und dem Waſſerverluſt ändere ſich eben ſo, wie ſich das Verhältniß zwiſchen den Zahlen ändert, welche die Fläche der Oefnung und ihren Umfang ausdrücken. Zwo Oefnungen F, f, haben den Umfang P, p, die natürlichen Waſſermengen ſind M, m, die Abgänge N, n; ſo iſt nach Belidors Vorausſetzung $\frac{M}{N} : \frac{m}{n} = \frac{F}{P} : \frac{f}{p}$.

Wenn

Wenn nun F und f Kreiſe, D, d, ihre Durchmeſſer ſind, ſo wäre $\frac{M}{N} : \frac{m}{n} = \frac{\frac{1}{4}\pi DD}{\pi D} : \frac{\frac{1}{4}\pi dd}{\pi d}$ $= D : d$. Nun ſetzt er Mariotts Verſuch zum Grunde, vermöge deſſen $\frac{M}{N} = \frac{10}{3}$ und $D = 3$ Linien iſt, dies giebt $\frac{10}{3} : \frac{m}{n} = 3 : d$, alſo wäre $\frac{m}{n}$ $= \frac{10}{9} d$, oder $\frac{n}{m} = \frac{9}{10d}$, wo d in Linien ausgedrückt werden muß. Nach Belidors fernerer Vorſchrift müſte nun die berechnete natürliche Waſſermenge mit der Zahl $\frac{9}{10d}$ multiplicirt werden, um den Waſſer-Verluſt zu haben, der denn ferner von der natürlichen Waſſermenge abgezogen, die würkliche gäbe. Wenn alſo die natürliche Waſſermenge $= M$ iſt, ſo wäre die würkliche

$$= \left(1 - \frac{9}{10d}\right) M = \frac{10d - 9}{10d} M.$$

Wenn die Waſſerhöhen gleich ſind, ſo iſt $M : m$ $= DD : dd$, und dann läſt ſich die Proportion $\frac{M}{N} : \frac{m}{n} = D : d$, wenn die Oefnungen Kreiſe ſind, auch ſo ausdrücken $\frac{DD}{N} : \frac{dd}{n} = D : d$. Dies gäbe $\frac{D}{N} : \frac{d}{n} = 1 : 1$, alſo $N : n = D : d$, und es würden ſich die Waſſer-Abgänge, wie die Durch-

Durchmeſſer der Oefnungen verhalten. Belidor glaubt, dieſe Regel werde zutreffen, wenn gleich die Waſſerhöhe nicht 13 Fuß, wie bey dem Mariottiſchen Verſuch, ſondern jede andre ſey (a. a. O. 497 §.) Allein dieſer Vorausſetzung darf man wohl nicht trauen. Ich führe dieſe Regel nicht an, weil ich ſie für erwieſen richtig halte, ſondern nur deswegen, um eines ſo berühmten und verdienten Schriftſtellers Gedanken von dieſer Sache nicht mit Stillſchweigen zu übergehen. Ich finde nicht, daß H. Belidor des Umſtandes von der Zuſammenziehung des Waſſerſtrahls gedenket, und wenn man dieſe Rechnung mit dem 39 und 40 §. vergleicht, ſo ſiehet man wohl, daß hier $\frac{10d}{10d - 9}$ das wäre, was dort α war: nur würde hier, nach Belidors Vorausſetzung, α veränderlich ſeyn, und von der Oefnung f abhängen. Wollte man alſo die im 40 §. erwehnten drey Aufgaben auflöſen, ſo müſte man nach Belidors Gedanken ſo verfahren.

42 §.

Es iſt die würkliche Waſſermenge $q = 2ft\sqrt{ga}$, wenn f den Querſchnitt des zuſammengezogenen Strahls bedeutet, oder $q = ftv$, wenn man $2\sqrt{ga} = v$ ſetzt, da dann v die Geſchwindigkeit des Waſſers iſt. Bey einem Verſuch, wo $f = \mathrm{F}$, $t = \mathrm{T}$, $v = \mathrm{V}$ war, ſey $q = \mathrm{Q}$ gefunden, ſo iſt $\mathrm{Q} = \mathrm{F.T.V}$, folglich $\mathrm{Q} : q = \mathrm{F.T.V} : ftv$, woraus $q = \frac{\mathrm{Q}ftv}{\mathrm{F.T.V}}$ gefunden wird. Wenn nun die zu f und F gehörigen Oefnungen Kreiſe, ihre Durchmeſ-

ſer

ſer d und a ſind; ſo iſt jene Oefnung $= \pi dd$, dieſe πaa. Ich wähle hier mit Fleiß Belidors Bezeichnung, um ſeine Formuln deſto leichter zu überſehen, und will deswegen ſtatt des bisherigen a, welches die Waſſerhöhe bedeutete, nun h ſchreiben: dieſe ſey alſo bey dem Verſuch $=$ H. Man ſetze ferner, bey dem Verſuch habe ſich die natürliche Waſſermenge zum Waſſerverluſt $= a : b$ verhalten, alſo die natürliche Waſſermenge zur würklichen $= a : a - b$, ſo iſt $a : a - b = \pi aa : \mathrm{F}$, und $\mathrm{F} = \pi (aa - ab)$. Für die Oefnung f verhalte ſich die natürliche Waſſermenge zum Verluſt $= d : e$, alſo die natürliche Menge zur würklichen $= d : d - e$, ſo iſt $f = \pi (dd - de)$. Aber nach Belidors Meynung verhalten ſich die Waſſerabgänge wie die Durchmeſſer (41 §.), alſo wäre $a : d = \pi ab : \pi de$; folglich müſte $e = b$ ſeyn, und es wäre $f = \pi (dd - bd)$. Die Werthe von F und f in die Gleichung für q geſetzt, geben

$$q = \frac{\mathrm{Q} . t . v (dd - bd)}{\mathrm{T} . \mathrm{V} (aa - ab)}.$$

Daraus folgt,

$$q\mathrm{T} (aa - ab) \mathrm{V} = \mathrm{Q}t (dd - bd) v,$$

und man findet ferner

$$dd - bd = \frac{q\mathrm{T} (aa - ab) \mathrm{V}}{\mathrm{Q}tv},$$

alſo

$$1)\ d = \tfrac{1}{2}b + \surd \left(\frac{q\mathrm{T} (aa - ab) \mathrm{V}}{\mathrm{Q}tv} + \tfrac{1}{4}bb \right).$$

Dieſelbe Gleichung giebt

$$2)\ v = \frac{q\mathrm{T} . \mathrm{V} . (aa - ab)}{\mathrm{Q}t (dd - bd)},$$

wor-

woraus die Waſſerhöhe gefunden wird, wenn man $2\sqrt{gh}$ und $2\sqrt{gH}$ ſtatt v und V ſetzt, nemlich

$$\sqrt{h} = \frac{q\mathrm{T}\,.\,(aa - ab)\sqrt{\mathrm{H}}}{\mathrm{Q}\,.\,t\,(dd - bd)}.$$

Ferner iſt

$$3)\ t = \frac{q\,.\,\mathrm{T}\,.\,\mathrm{V}\,(aa - ab)}{\mathrm{Q}\,.\,v\,.\,(dd - bd)}.$$

M. ſ. Belidor a. a. O. 505 - 509 §. woſelbſt dieſe Formuln richtig aus der angenommenen Vorausſetzung hergeleitet werden. Daſelbſt iſt m und M was hier q und Q heiſt. Wer aber die gegebenen Exempel nachrechnen will, wird finden, daß hier (vielleicht nur in der Ueberſetzung, welches ich nicht ſagen kann, weil ich das Original nicht zur Hand habe) allemahl die Geſchwindigkeit des Waſſers und die ihr zugehörige Höhe mit einander verwechſelt worden; denn V und v bedeuten in den Formuln Geſchwindigkeiten, und nicht die zugehörigen Höhen. Es wird vermöge des Mariottiſchen Verſuchs $a = 3$ Linien, $\mathrm{T} = 1$ Minute, $\mathrm{M} = 14$ Kannen und $\mathrm{V} = 13$ Fuß geſetzt (506 §. a. a. O.) Das letztere iſt falſch, es muß $\mathrm{V} = \sqrt{13}$ geſetzt werden. Ferner wird nun geſucht, wie groß d ſeyn muß, wenn bey der Waſſerhöhe von 20 Fuß (ſo verſtehehe ich es wenigſtens) 30 Kannen in 2 Minuten durchlaufen ſollen; es wird zwar richtig $t = 2$ Min. und $m = 30$ Kannen, aber unrichtig $v = 20$ geſetzt: man muß $v = \sqrt{20}$ ſetzen. Es kommt nemlich nur auf die Verhältniſſe $\frac{m}{\mathrm{M}} = \frac{30}{14} = \frac{15}{7}$, $\frac{\mathrm{T}}{t}$

=

$= \frac{1}{2}$, $\frac{V}{v} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{20}}$ an, um das Product $\frac{q.T.V}{Q.t.v}$ zu berechnen. Vermöge der übrigen angenommenen Vorausſetzungen iſt $a : b = 10 : 3$, alſo $b = \frac{3}{10} a = \frac{9}{10}$ Lin. $ab = \frac{27}{10}$, und $aa - ab = \frac{63}{10}$; alſo wird $\frac{q.T.V(aa-ab)}{Q.t.v} = \frac{30.6,3.\sqrt{13}}{14.2\sqrt{20}}$ $= \frac{15.0,9.\sqrt{13}}{2\sqrt{20}} = 6,75 : \sqrt{\frac{20}{13}} = 5,443$. Hiezu $\frac{1}{4}bb = 0,2025$ addirt giebt 6,6455, und die Quadratwurzel iſt 2,333; alſo wird $d = 2,783$ Lin. Nach der Rechnung im überſetzten Belidor kommt nur $d = 2,602$ Lin. Der Unterſcheid iſt zwar nur klein aber hier doch beträchtlich.

Im 508 §. a. a. O. wird geſucht, wie groß die Waſſerhöhe ſeyn muß, wenn durch ein Loch $2\frac{2}{3}$ Lin. im Durchmeſſer in Zeit von 2 Minuten 30 Kannen Waſſer laufen ſollen. Man muß aus der Gleichung

$$\sqrt{h} = \frac{m.T.(aa-ab)\sqrt{H}}{M.t.(dd-bd)}$$

dieſe Höhe ſuchen, und man erhält $\sqrt{h} = \frac{15}{7} . \frac{1}{2}$

$. \frac{6,3}{4,711} . \sqrt{13} = \frac{15 . 0,9}{2 . 4,711} \sqrt{13} =$

$\frac{15 . 0,9}{9,422} \sqrt{13} = \frac{13,5}{9,422} \sqrt{13}$, alſo

$$h = \frac{13,5^2}{9,422^2} . 13.$$ Es iſt aber

$$l\,13{,}5 = 1{,}1303338$$
$$l\,13{,}5^2 = 2{,}2606676$$
$$l\,13 = 1{,}1139434$$
$$l\,13{,}5^2 \,.\, 13 = 3{,}3746110$$
$$l\,9{,}422 = 0{,}9741431$$
$$l\,9{,}422^2 = 1{,}9482862$$
$$l\,h = 1{,}4263248$$

Demnach iſt $h = 26{,}688$ Fuß und dies iſt die geſuchte Waſſerhöhe, nicht aber 19 Fuß 10 Zoll 9 Linien, wie beym überſetzten Belidor.

43 §.

Ich habe hiemit nur zeigen wollen, wie man aus Herrn Belidors Formuln ſeinen Vorausſetzungen gemäß richtig rechnen müſſe: ſonſt denke ich, daß es am beſten ſey, bey dem Verfahren des 40 §. zu bleiben. Das dort aus einem Verſuch zu beſtimmende α, wird wenigſtens gebraucht werden können, wenn Oefnungen und Waſſerhöhen nicht zu ſehr von denjenigen unterſchieden ſind, die bey dem Verſuch gebraucht wurden. Ueberdem aber wird die auf ſolche Art für α gefundene Zahl auch nur gebraucht werden können, wenn man die Waſſermenge in ſolchen Fällen berechnet, wo das Waſſer auf eben die Art ausläuft, wie es bey dem Verſuch that, durch deſſen Hülfe α beſtimmt ward. Die Werthe von α ſind unterſchieden, nachdem das Waſſer durch ein Loch in einer dünnen Platte, oder durch Röhren läuft: und zwar im letzten Fall wiederum, nachdem die Röhren coniſch, oder cylindriſch ſind. Selbſt bey einerley Art Röhren wird α verſchieden ſeyn, nachdem die Röhre länger oder kürzer iſt, denn durch be-

trächtlich längere Röhren läuft das Waſſer wegen der ſtärkern Friction langſamer, als durch kürzere. Nimmt man nun an, daß alle dieſe Umſtände einerley ſind, ſo werden α und g in der Formul $q = 2\frac{f}{\alpha}t\sqrt{ga}$ beſtändige Zahlen ſeyn, wenn gleich f, t und a verändert werden; und es flieſſen daraus folgende gewöhnlich angenommene Sätze.

44 §.

Bey gleichen Höhen des Waſſers im Gefäß, und einerley Oefnung iſt die Menge des auslaufenden Waſſers der Zeit proportional. Es verhält ſich nämlich $q = 2\frac{f}{\alpha}t\sqrt{ag}$ wie t, wenn f und a einerley iſt.

Die aus verſchiedenen Oefnungen bey gleicher Waſſerhöhe in gleichen Zeiten auslaufenden Mengen Waſſer verhalten ſich wie die Oefnungen, alſo wie die Quadrate der Halbmeſſer oder Durchmeſſer, wenn die Oefnungen Kreiſe ſind.

Sind aber die Oefnungen gleich, und die Höhen ungleich, ſo verhalten ſich die Mengen des in gleichen Zeiten auslaufenden Waſſers, wie die Quadratwurzeln der Höhen.

Wenn aus einem andern Gefäß die Menge Q in der Zeit T durch die Oefnung F ausläuft, und die Höhe des Waſſers über der Oefnung = A iſt; ſo hat man $Q = \frac{2}{\alpha} . F . T . \sqrt{A . g}$. Iſt alſo $Q = q$, und $A = a$, ſo hat man $t : T = F : f$, oder die Zeiten verhalten ſich umgekehrt, wie die Oefnungen.

Wenn aber $Q = q$ und $F = f$ iſt, ſo wird $t : T = \sqrt{A} : \sqrt{a}$, oder die Zeiten verhalten ſich umgekehrt, wie die Quadratwurzeln der Höhen.

Alle dieſe Verhältniſſe treffen aber in der Erfahrung nur zu, ſo lange die Höhen und Oefnungen nicht ſehr viel von einander unterſchieden ſind, und dies deswegen, weil α bey ſehr verſchiedenen Höhen und Oefnungen nicht mehr einerley bleibt, wenn das Waſſer gleich durch einerley Art Wege läuft. Wenn nun die Menge des Waſſers, die bey gegebener Höhe, aus einer gegebenen Oefnung, in gegebener Zeit ausläuft, durch einen Verſuch bekannt iſt; ſo läßt ſich, vermittelſt dieſer Geſetze, finden, in wie vieler Zeit eben die Menge bey einer andern Höhe, oder einer andern Oefnung ausläuft: oder auch, wie viel Waſſer in eben der Zeit, bey einer andern Höhe, oder durch eine andere Oefnung ausſtrömt, u. ſ. f. Dies Verfahren hat man ſonſt gewöhnlich gebraucht, die Waſſermenge zu finden, ohne jedoch die Beſchaffenheit der Wege, wodurch das Waſſer läuft, dabey in Betrachtung zu ziehen.

45 §.

Wenn der Durchmeſſer eines Cylinders einen Fuß lang und der Cylinder einen Fuß hoch iſt; ſo heiſt er in der Hydraulik ein Cylindriſcher Fuß. Ein Cubicfuß verhält ſich zum Cylindriſchen, wie $1 : \frac{1}{4}\pi = 1 : 0{,}7853981 = 452 : 355$ (475. 369 §. Geom.) Eben ſo werden hier die Namen eines cylindriſchen Zolles, einer cylindriſchen Linie u. ſ. f. gebraucht. Man kann alſo leicht Cubicmaaß auf Cylindriſches, und umgekehrt, dieſes auf jenes bringen.

Graveſand theilt in den Elem. Phyſ. Lib. III. Cap. IX. p. 469. §. 1637. eine Tafel mit, woraus zu erſehen iſt, in wie vieler Zeit ein Rheinländiſcher Cylinderfuß Waſſer durch eine kreisrunde Oefnung von einem halben Rheinl. Zoll im Durchmeſſer bey verſchiedenen Höhen des Waſſers über der Oefnung durchlaufe. Sie gründet ſich auf den im 32 §. angeführten Mariottiſchen Verſuch, und Graveſand nimmt bey ſeiner Berechnung an, der Pariſer Fuß verhalte ſich zum Rheinländiſchen, wie 144 : 139. Das folgende wird Graveſands Rechnung erläutern.

46 §.

Die Höhe des Waſſers in einem Gefäß über eine Oefnung von $\frac{1}{2}$ Rheinl. Zoll im Durchmeſſer iſt 13 Rheinl. Fuß: man ſoll finden, in wie vieler Zeit ein Cylinderfuß Waſſer durch dieſe Oefnung laufe.

Aufl. Man ſuche zuerſt in wie vieler Zeit in der Höhe von 13 Rheinl. Fuß 14 Pariſer Kannen durch eine Oefnung von $\frac{1}{4}$ Par. Zoll laufen. Dieſe Zeit ſey $= T$, ſo giebt der Mariottiſche Verſuch

$$\sqrt{139} : \sqrt{144} = 60 \text{ Secunden} : T.$$

Soll nun die Oefnung $\frac{1}{2}$ Par. Zoll und die zugehörige Zeit $= T'$ ſeyn, ſo wird $4 : 1 = T : T'$, alſo

$$T' = \tfrac{1}{4} T = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{139}} \cdot 60.$$

Iſt ferner die Oefnung $\frac{1}{2}$ Rheinl. Zoll, und die zugehörige Zeit T'', ſo hat man $139^2 : 144^2 = T' : T''$, alſo

$$T'' = \frac{144^2}{139^2} \cdot T' = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{144^2}{139^2} \cdot \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{139}} \cdot 60.$$

Sollen nun weiter ſtatt 14 Kannen 35 Pariſ. Kannen, oder ein Par. Cubicfuß auslaufen, und zwar in der Zeit T''', ſo iſt

$$14 : 35 = T'' : T''', \text{ folglich}$$

$$T''' = \frac{35}{14} . T'' = \tfrac{1}{4} . \frac{35}{14} . \frac{144^2}{139^2} . \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{139}} . 60.$$

Soll es überdem ein Rheinl. ſtatt eines Pariſer Cubicfuſſes ſeyn, ſo wird

$$144^3 : 139^3 = T''' : T^{IV}, \text{ wenn}$$

T^{IV} die zugehörige Zeit iſt.

Nun ſucht man eigentlich die Zeit für einen Rheinländ. Cylinderfuß. Dieſe ſey t, ſo wird

$$452 : 355 = T^{IV} : t.$$

Alſo iſt die geſuchte Zeit

$$t = \frac{355}{452} T^{IV} = \frac{355}{452} . \frac{139^3}{144^3} . T''',$$

oder endlich

$$t = \tfrac{1}{4} . \frac{35}{14} . \frac{\sqrt{139}}{\sqrt{144}} . \frac{355}{452} . 60 \text{ Secunden.}$$

Da dann $\sqrt{144} = 12$ iſt.

So kommt Graveſand auf dieſen Ausdruck a. a. O. 1666 §. 479 S. Man hat ihn kürzer aus der dritten Gleichung des 40 §., $t = \frac{\alpha q}{2f\sqrt{ga}}$. Wenn nämlich beym Mariottiſchen Verſuch das Q, F, A, T heiſt, was überhaupt mit q, f, a, t bezeichnet iſt; ſo hat man $\alpha = \frac{2F.T.\sqrt{gA}}{Q}$, alſo $t = \frac{qF.T.\sqrt{A}}{Q.f.\sqrt{a}}$. Im gegenwärtigen

Fall

Fall iſt $\frac{q}{Q} = \frac{35}{14} \cdot \frac{139^3}{144^3} \cdot \frac{355}{452}$,

$\frac{F}{f} = \frac{1}{4} \cdot \frac{144^2}{139^2}$, $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{139}}$, T = 60 Sec. Dieſe Werthe in die Gleichung geſetzt, geben eben den Ausdruck.

Nun giebt die Rechnung

$l\,139 = 2{,}1430148$	
$l\sqrt{139} = 1{,}0715074$	$l\,48 = 1{,}6812412$
$l\,35 = 1{,}5440680$	$l\,14 = 1{,}1461280$
$l\,355 = 2{,}5502284$	$l\,452 = 2{,}6551384$
$l\,60 = 1{,}7781513$	$5{,}4825076$
$6{,}9439551$	
$-\ 5{,}4825076$	
$l\,t = 1{,}4614475$	

Alſo $t = 28{,}936$ Secunden.

Man kommt auf eben dieſes Reſultat bis auf eine Kleinigkeit, wenn man $\alpha = \frac{10}{7}$ ſetzt, wie dem 40 §. gemäß iſt. Drückt man alsdenn alles in Rheinländiſchen Zollen aus, ſo iſt

$$t = \frac{\frac{10}{7} \cdot 1728 \cdot \frac{1}{4}\pi}{2 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{4}\sqrt{15{,}625 \times 12 \times 13 \times 12}}$$

$$= \frac{20 \cdot 1728}{7\sqrt{29250}}.$$

47 §.

Will man nun wiſſen, in wie vieler Zeit eben ſo viel Waſſer durch eben die Oefnung laufe bey einer andern Höhe deſſelben, z. E. von 21 Rheinl. Fuß, ſo ſchließt man

$\sqrt{21} : \sqrt{13} = 28{,}936$ Secunden geſuchte Zeit.

Vom $l21 = 1,3222193$
ſubtr. $l13 = 1,1139434$
giebt $0,2082759$
2)
$0,1041379$ Dies abgezogen
vom $lt = 1,4614475$ (46 §.)
läſt $1,3573096$

Die zugehörige Zahl 22,767 iſt die geſuchte Zeit für 21 Fuß Höhe. Iſt überhaupt die Höhe $= a$, die Zeit t; ſo iſt

$$t = \frac{28,94\sqrt{13}}{\sqrt{a}} = 28,94\sqrt{\frac{13}{a}}, \text{ alſo}$$

$$lt = l28,94 + \tfrac{1}{2}(l13 - la) = l28,94 - \tfrac{1}{2}(la - l13).$$

So lieſſen ſich die übrigen Graveſandſchen Zahlen in folgender Tafel berechnen:

Höhe des Waſſers.	Zeit, worin ein Cylinderfuß ausflieſt
4 Fuß.	52, 16 Secunden.
5	46, 66
6	42, 59
7	39, 43
8	36, 89
9	34, 78
10	32, 99
11	31, 55
12	30, 12
13	28, 94
14	27, 88
15	26, 94
16	26, 08
17	25, 30
18	24, 59
19	23, 93
20	23, 33
21	22, 71

Gra-

Graveſand erinnert, daß man dieſe Tafel nicht ohne merklichen Fehler auf gröſſere oder kleinere Höhen erweitern könne.

48 §.

Ein ähnliches Verfahren dienet, die Menge des in einer Minute aus einer Oefnung von 3 Linien im Durchmeſſer bey verſchiedenen Höhen auslaufenden Waſſers zu finden. Frägt man z. E. wie viel Waſſer durch eine ſolche Oefnung in einer Minute läuft, wenn es 25 Fuß hoch über der Oefnung ſteht, ſo beantwortet dies die Proportion

$$\sqrt{13} : \sqrt{25} = 14 \text{ Kannen} : \text{geſ. Zahl},$$

oder $13 : \sqrt{25 \times 13} = 14 \text{ Kan.} : \text{geſ. Zahl},$

und man findet 19,4 Kannen. Iſt die neue Höhe $= a$, die geſuchte Waſſermenge $= q$, ſo iſt überhaupt

$$14\sqrt{\frac{a}{13}} = q; \text{ alſo } lq = l14 + \tfrac{1}{2}(la - l13) =$$

$$l14 - \tfrac{1}{2}(l13 - la).$$

Moriotte a. a. O. III Partie II Diſcours p. 268. theilt folgende Tafel mit:

Höhe des Waſſers über der Oefnung von 3 Lin. im Durchmeſſer:	Menge des in einer Minute auslaufenden Waſſers.
6 Fuß	$9\frac{1}{2}$ Pinten
9 "	$11\frac{2}{3}$ "
13 "	14 "
18 "	$16\frac{1}{2}$ "
25 "	$19\frac{1}{3}$ "
30 "	$21\frac{1}{3}$ "
40 "	$24\frac{1}{2}$ "
52 "	28 "

Leupold im Theatr. Machin. Gen. 20 Cap. 475 §. 142 S. hat dieſe Tafel auf einzelne Fuße von 1 Fuß bis 52 Fuß erweitert. Es iſt in derſelben Pariſer Maaß und Gewicht zu verſtehen, ſo daß eine Kanne 2 Pariſer Pfund wiegt.

49 §.

Wenn nun für eine bekannte Höhe z. E. von 13 Fuß bekannt iſt, wie viel Waſſer die Oefnung von 3 Linien in einer Minute giebt; ſo findet man leicht, wie viel bey eben der Höhe in eben der Zeit eine andre Oefnung ſchüttet. Iſt z. E. die Oefnung 1 Zoll oder 12 Linien im Durchmeſſer, ſo ſchließt man $3^2 : 12^2 = 14$ Kannen zur geſ. Anzahl Kannen. Dieſe Anzahl wird $\frac{144 \times 14}{9} = 16 . 14 = 224$ Kannen. Iſt der neuen Oefnung Durchmeſſer in Linien ausgedrückt $= d$, die Waſſermenge q, ſo wird überhaupt $q = \frac{14}{9} dd$. Leupold a. a. O. 495 §. 148 S. theilt eine auf dieſe Art berechnete Tafel für die Höhe von 13 Fuß mit, woraus zu erſehen, wie viel Waſſer in einer Minute, durch Oefnungen von 1 Linie bis zu 24 Linien oder 2 Zoll im Durchmeſſer ausläuft.

Der

Der III. Abſchnitt.

Von Viſirung der Quellen, und Berechnung der Waſſermenge, nach Zollen.

50 §.

Es iſt ſchon erinnert worden, daß die Regeln des 46 = 49 §. in der Anwendung ihre Gränzen haben, und daß ſie die Menge des auslaufenden Waſſers nicht mehr geben, wenn die Höhen ſehr viel von 13 Fuß und die Oefnungen im Durchmeſſer beträchtlich von 3 Linien unterſchieden ſind. Wenn die Oefnung zur Seite des Gefäſſes befindlich iſt, und das Waſſer nur eine oder etliche wenige Linien hoch über ihren oberſten Rand ſtehet, ſo muß man erwegen, daß das Waſſer um die Mitte der Oefnung einen beträchtlich ſtärkern Druck leide, als das am obern Rande ausflieſſende leidet, und daß überhaupt dieſer Druck deſto gröſſer ſey, je näher man dem untern Rande kommt. Deswegen werden die Waſſertheilchen mit ſehr ungleicher Geſchwindigkeit auslaufen, ihre Geſchwindigkeit wird deſto gröſſer ſeyn, je näher ſie dem untern Rande der Oefnung liegen. Wollte man nun z. E. wiſſen, wieviel Waſſer eine kreisrunde Oefnung von 1 Zoll im Durchmeſſer in einer Minute giebt, wenn ihr oberſter Rand nur eine Linie tief unter Waſſer ſtehet, ſo würde man eine viel zu kleine Zahl nach obiger Regel finden, wenn man die Höhe des Waſſers über dieſe Oefnung in der Rechnung =

 1 Linie

1 Linie ſetzen wollte; ſo wie man eine zu groſſe Zahl herausbringen würde, wenn man für die Höhe des Waſſers diejenige nehmen wollte, um welche die Oberfläche deſſelben über den untern Rand der Oefnung erhaben iſt. Die Rechnung trift einigermaſſen mit dem Erfolg zuſammen, wenn man für dieſe Höhe diejenige nimmt, um welche der Mittelpunkt der Oefnung unter Waſſer ſtehet, welches auch der obigen Vorausſetzung im 20 §. gemäß iſt.

51 §.

Um alſo zu finden, wieviel Waſſer eine kreisrunde Oefnung von 1 Zoll im Durchmeſſer in einer Minute giebt, wenn ihr oberer Rand eine Linie unter Waſſer ſtehet; muß man erwegen, daß ihr Mittelpunkt 7 Linien unter Waſſer ſtehe, und al dann ſchlieſſen

$\sqrt{13}$ Fuß : $\sqrt{\frac{7}{144}}$ Fuß = 224 Kannen (49 §.) zur vierten Zahl: oder

$\sqrt{1872}$ Lin. : $\sqrt{7}$ Lin. = 224 Kann. : viert. Z.

wo man das erſte Verhältniß auch = 1872 : $\sqrt{7 \times 1872}$ ſetzen kann. Die geſuchte Zahl wird alſo =

$$\frac{224\sqrt{7 \times 1872}}{1872} = \frac{14\sqrt{13104}}{117} =$$

13,7 Kannen. Dieſe Rechnung trift mit Mariotts Verſuch a. a. O. III Partie I Diſc. p. 245. ziemlich überein. Eine runde Oefnung von 1 Zoll im Durchmeſſer, wenn ihr oberer Rand 1 Linie unter Waſſer ſtand, gab in einer Minute $13\frac{3}{8}$ Kannen Waſſer, wovon jede 2 Pfund weniger 7 Drachmen wiegt.

52 §.

Die Brunnen- und Kunſt-Meiſter ſind gewohnt, die Menge des Waſſers, welches die Quellen geben, nach Quadrat-Zollen und Linien der Fläche einer Oefnung anzugeben, durch welche in einer gewiſſen Zeit eben ſo viel Waſſer laufen würde, als in eben der Zeit aus der Quelle hervor kommt. Mariotte a. a. O. III. p. 239 erinnert ſchon, daß ſie deswegen nicht genau anzugeben wiſſen, wieviel dieſe Zolle in gewiſſer Zeit geben, weil die Menge Waſſer, die durch eine ſolche Oefnung läuft, ſehr verſchieden ſeyn muß, nachdem die Höhe deſſelben über der Oefnung verſchieden iſt, und dieſe Höhe von ihnen nicht genugſam beſtimmt wird. Dieſem Mangel ſucht Mariotte dadurch abzuhelfen, daß er einen Zoll Waſſer diejenige Menge deſſelben nennt, die in einer Minute durch eine runde Oefnung von 1 Zoll im Durchmeſſer läuft, wenn ihr oberer Rand 1 Linie unter Waſſer ſtehet. Dies wären alſo nachdem angeführten Verſuch 13$\frac{3}{8}$ Kann. zu 2 Pf. weniger 7 Drachm. Weil es aber an ſich willkührlich iſt, wie groß die Menge ſeyn ſoll, die man auf einen Zoll in gegebener Zeit rechnen will; ſo ſetzt Mariotte a. a. O. p. 260. feſt, er wolle auf einen Waſſerzoll 14 Pinten oder Kannen, jede zu 2 Pfund rechnen. Seit der Zeit iſt dies Maaß eingeführt worden, und man ſagt, eine Quelle giebt einen Zoll Waſſer, wenn daraus alle Minuten 14 Pariſer Kannen hervor kommen. Demnach giebt ein Zoll Waſſer in einer Stunde 3 Pariſer Tonnen (muids), und in 24 Stunden 72 Tonnen, wovon jede 280 Kannen hält.

53 §.

Eine Quelle viſiren, nennen die Brunnenmeiſter unterſuchen, wieviel Waſſer dieſelbe binnen gewiſſer Zeit giebt. Man bewerkſtelliget dieſes folgendergeſtalt. Man faſſet die Quelle mit Brettern gehörig ein, ſo daß alles Waſſer, was die Quelle
8 Fig. giebt, in einen Behälter AB geſammlet wird. Dieſer Behälter wird mit einer Röhre bey C verſehen, wodurch das Waſſer ablaufen kann. Nun muß man mit einem ſogenannten Eich-Gefäß wie DE verſehen ſeyn, welches die Geſtalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi hat, und gewöhnlich aus Kupfer einen Fuß lang, 8 Zoll breit, und 8 Zoll hoch verfertiget wird. Die Abmeſſungen können nach Beſchaffenheit der Umſtände gröſſer oder kleiner ſeyn. An der vordern Fläche EK befinden ſich kreisrunde Oefnungen, deren Durchmeſſer einen Zoll, auch weniger als einen Zoll lang ſind, und ihre Mittelpunkte werden nach Bions Vorſchrift in der Math. Werkſchule V Buch III. Cap. 197 S. Ueb. in grader Linie geſetzt, ſo daß der obere Rand der einzolligen Löcher 2 Linien unter dem Rande des Gefäſſes ſtehet, alſo die Mittelpunkte 8 Linien unter dieſem Rande liegen. Die kleinern Löcher werden von der Gröſſe gemacht, daß ihre Fläche die Hälfte, den vierten Theil u. ſ. f. der Fläche der einzolligen Löcher faſſet. Bion nennt ſie halbe Cirkel-Zolle, Viertel-Cirkel-Zolle, u. ſ. f. ſo wie die Löcher, die 1 Zoll im Durchmeſſer halten, ganze Cirkel-Zolle heiſſen. Demnach hält der Durchmeſſer eines halben Cirkel-Zolles 8,48 Linien, eines Viertel-Cirkel-Zolles 6 Linien, u. ſ. f. Leupold im Theatr. Mach. Gener. 475 u. f. §.

142

142 u. f. S. nennt den zwölften Theil der Fläche eines Cirkel-Zolles eine Linie, ſo daß der Durchmeſſer einer Waſſer-Linie 3,463 Linien groß ſeyn müſte. Aber Belidor in der Archit. Hydraul. I Th. IV Buch, IV Cap. 1392 §. ſagt, daß die Brunnenmeiſter den Waſſer-Zoll in 144 Waſſerlinien eintheilen, ſo daß eine Waſſer-Linie bey ihnen diejenige Menge Waſſer iſt, die in einer Minute durch eine kreisrunde Oefnung von 1 Linie im Durchmeſſer läuft.

Die am Eich-Gefäß befindlichen Oefnungen werden mit kleinen viereckten Schiebern von Kupfer verſehen, damit man ſie nach Gefallen verſchlieſſen und öfnen kann. Leupold tadelt es am Bion, daß die Mittelpunkte der Löcher gleich tief unter Waſſer liegen ſollen (Theatr. Mach. Gen. 469 §. 140 S.) weil alsdenn ſeiner Meynung nach die kleinen Löcher zuviel Druck bekommen. Weil aber das Waſſer auch aus den einzolligen Löchern ohngefehr mit derjenigen Geſchwindigkeit ausſtrömt, die der Höhe von 7 Linien zugehört (50 §.); ſo denke ich, daß Bion recht habe. Sonſt hat Leupolds Einrichtung mit einer einzigen viereckten Oefnung und gehörig eingetheiltem Schieber (a. a. O.) ihre Vortheile. Das Eich-Gefäß DE hat überdem ohngefehr in der Mitte eine mit der vordern Fläche parallele Scheidewand ILM, jedoch reicht ſie nicht bis am untern Boden, ſondern iſt davon ohngefehr um einen Zoll entfernt. Sie iſt überdem mit verſchiedenen Löchern durchboret, damit das Waſſer was in die hintere Abtheilung DM fällt frey durchgehe, und in beyden Abtheilungen gleich hoch ſteige.

Man

Man ſetzt dies Gefäß unter der Röhre C des Waſſer-Behälters AB, ſo daß das durch C auslaufende Waſſer in die hintere Abtheilung DM fällt, und wartet, bis es in dem ganzen Gefäß DE bis um eine Linie über den Rand der einzolligen Löcher geſtiegen iſt, wobey noch dies in acht zu nehmen iſt, daß der Boden des Gefäſſes DE horizontal ſtehen muß, damit die Seiten vertical ſtehen. Hierauf öfnet man eins, oder mehrere von den Löchern, und ſucht es dahin zu bringen, daß das Waſſer im Gefäß DE beſtändig dieſelbe Höhe von einer Linie über die einzolligen Löcher behalte, indem es durch die geöfneten ausläuft. Alsdenn iſt man verſichert, daß ſoviel Waſſer hinein laufe, als herausgehet, und daß die Quelle ſoviele Zolle, und Theile eines Zolles Waſſer gebe, als man Löcher geöfnet hat.

54 §.

Aus der bekannten Oefnung eines Gefäſſes in bekannter Tiefe unter dem Waſſer läuft das Waſſer beſtändig ab: man frägt, wie viel Zoll Zufluß das Waſſer haben müſſe, damit das Gefäß beſtändig voll bleibe.

Aufl. Man berechne nach den Regeln des 39 und 40 §. wieviel Waſſer in gegebener Zeit, z. E. einer Minute, aus der Oefnung läuft. Da nun der Auslauf von 14 Kannen Waſſer in einer Minute 1 Cirkel-Zoll Oefnung erfordert 52 §. und man hier immer einerley Tiefe der Zolle unter Waſſer vorausſetzt; ſo ſchlieſt man nach der Regel Detri:

14 Kannen zur Anzahl Kannen, die aus der gegebenen Oefnung, in bekannter Tiefe läuft, wie 1 Zoll zur vierten Zahl.

Dieſe

Dieſe vierte Zahl giebt die Anzahl der Zolle, oder Theile eines Zolles, durch welche in eben der Zeit eben ſo viel Waſſer läuft.

Z. E. In der Tiefe von 23 Fuß geben 3 Linien Oefnung $18\frac{2}{3}$ Kannen Waſſer, wieviel Zolle Zufluß ſind nöthig?

14 Kannen — 1 Zoll — $18\frac{2}{3}$ Kannen?

Antw. $\frac{18\frac{2}{3}}{14} = 1\frac{1}{3}$ Zoll oder $1\frac{4}{12}$ Zoll.

Nach Leupolds Sprachgebrauch 53 §. kann man alſo ſagen: ein Ausfluß von 3 Linien im Durchmeſſer 23 Fuß tief unter der wagrechten Waſſerfläche erfordere 1 Zoll 4 Linien Zufluß. Wenn man dies weis, ſo wird man auch die vierte mit D bezeichnete Columne der im 48 §. angeführten Leupoldiſchen Tabelle, imgleichen die dritte mit C bezeichnete Columne der im 49 §. angeführten Leupoldſchen Tafel berechnen können. Sonſt iſt es natürlicher, einen Waſſerzoll in 144 Waſſerlinien zu theilen, und dies würde im gegenwärtigen Exempel 1 Zoll 48 Linien geben.

55 §.

Ein Waſſerbehälter hat eine bekannte Anzahl Zolle, oder Theile eines Zolles Zufluß. Das Waſſer ſoll aus einer Oefnung in bekannter Tiefe unter der wagrechten Waſſerfläche abflieſſen: man frägt, wie groß die Oefnung ſeyn müſſe, damit der Behälter keinen Abgang leide.

Aufl. Wenn man nach dem vor. §. berechnet hat, wie viel Zoll Zufluß in eben der Tiefe eine willkührlich angenommene Oefnung, z. E. von 3 Linien, erfordere; ſo kann man ſchlieſſen: dieſe gefundene

Anzahl

Anzahl Zolle zur gegebenen Anzahl, wie das Quadrat des Durchmeſſers jener Oefnung, zum Quadrat des Durchmeſſers der geſuchten.

Z. E. Wenn die Tiefe 13 Fuß und der Zufluß 64 Zoll iſt, ſo weiß man, daß in dieſer Tiefe auf 3 Linien Oefnung 1 Zoll Zufluß gehöre; alſo ſchließt man

$$1 \text{ Zoll} : 64 \text{ Zoll} = \begin{matrix}(3 \text{ Linien})^2 \\ \text{oder } (\tfrac{1}{4} \text{ Zoll})^2\end{matrix} : \text{Quadrat des}$$

Durchmeſſers der geſuchten Oefnung. Die Rechnung giebt $\frac{64}{16} = 4$ Zoll; alſo muß die Fläche der Oefnung 4 Cirkel-Zoll halten, und ihr Durchmeſſer 2 Zoll lang ſeyn.

56 §.

Ich trage dieſe Rechnungs-Regeln hier ſo vor, wie man ſie bey den practiſchen Schriftſtellern gewöhnlich antrift, erinnere aber zum Ueberfluß nochmahl, daß die Gefäſſe in Vergleichung mit den Oefnungen ſehr weit ſeyn müſſen, wenn die Rechnung mit dem Erfolg erträglich übereinſtimmen ſoll. Wenn die Oefnung in der Seitenwand des Gefäſſes befindlich, und ihre Fläche vertical iſt; ſo darf man ſich auf dieſe Rechnungs-Regeln nicht verlaſſen, dafern die Waſſerhöhe in Vergleichung mit dem Durchmeſſer der Oefnung nicht ſehr groß iſt. Eine genauere Regel, wie man ſich verhalten müſſe, wenn eine verticale Oefnung eine beträchtliche Gröſſe hat, wird im V. Abſchnitt vorkommen, jedoch nur in der Vorausſetzung, daß die Oefnung die Geſtalt eines Rechtecks habe. Ausführlichere Unterſuchungen darüber ſtellt Belidor an, in der Architectura Hydraulica I Buch III Cap. 9 und 10te Abth. und H. Hofr. Käſtner

hat

hat nunmehro in ſeinen Anfangsgründen der Hydrodynamik 186-216 §. Belidors Vortrag abgekürzt und verbeſſert. Der Fall, wo die Oefnung viereckt iſt, kommt in der Ausübung am meiſten vor. Kreisförmige Oefnungen erfordern eine etwas weitläuftige Rechnung.

57 §.

Ueber die eingeführte Gewohnheit, die Ausgabe einer Quelle, eines Waſſerbehälters, Brunnens, einer Waſſerkunſt und dergleichen, nach Zollen zu berechnen, findet man beym Belidor an der im 53 §. ſchon angeführten Stelle eine ausführliche Beurtheilung. An ſolchen Orten, wo das zum gemeinen Gebrauch beſtimmte Waſſer durch koſtbare Waſſerwerke in die Höhe gebracht, in gewiſſe dazu beſtimmte Behälter geſammlet, und aus denſelben wiederum in die öffentlichen Brunnen ausgetheilt werden muß, iſt bey dieſer Austheilung die Berechnung nach Waſſerzollen und Waſſerlinien ebenfalls üblich. Die groſſen Behälter oder Eichkuffen ſind mit kleinen ſo genannten Eichröhren verſehen, durch welche das Waſſer in kleine Eichkeſſel abläuft, die es den Einwohnern zuführen. Die runde Geſtalt der Ausgußlöcher hat allerhand Unbequemlichkeiten, und unter andern dieſe, wenn die Mittelpuncte gleich hoch ſtehen: daß in ſolchen Fällen, wenn das Waſſer in der groſſen Eichkuffe wegen verminderten Zufluſſes unter dieſe Mittelpuncte fällt, die kleinen Eichröhren aufhören müſſen, Waſſer zu geben, wenn es durch die gröſſern noch ablaufen kann, und zwar deſto mehr, je gröſſer ſie ſind. Dies giebt zu gegründeten Beſchwerden der Einwohner Anlaß, denen man bey der

erwähnten Einrichtung nicht abhelfen kann. Deswegen ſchlägt Belidor a. a. O. 1401 §. vor, ſtatt der runden lieber viereckte Löcher zu wählen, und ihnen allen eine gleiche Höhe, etwa von 4 Linien, aber ungleiche Grundlinien, zu geben. Bey einer Grundlinie von 3 Zoll, oder 36 Linien, wäre die Fläche alsdenn einen Quadratzoll, oder 144 Quadratlinien, groß, und wenn der obere Rand einer ſolchen Oefnung etwa 1 Linie unter Waſſer ſtünde, ſo würde ſie ebenfalls in einer Minute ohngefähr 14 Pinten Waſſer geben. Hiebey fielen nun die vorhin erwähnten Unbequemlichkeiten weg. Geſetzt, das Waſſer in der groſſen Eichkuffe fiele auch unter den obern Rand dieſer Eichlöcher, ſo würde doch kein einziges aufhören, Waſſer zu geben, bis ſie alle aufhörten, und es würden beſtändig alle, die Antheil daran haben, eine proportionirliche Waſſermenge bekommen. Wegen der bequemern Rechnung bey der Vertheilung wäre es noch beſſer, den Werth eines Waſſerzolles auf 18 Kannen in einer Minute zu ſetzen, da dies eine an ſich ganz willkührliche Sache iſt. Man dürfte alsdenn nur die Eichlöcher in der Tiefe unter dem Waſſer anbringen, welche dieſe Waſſermenge erfordert. Ein Umſtand bleibt indeſſen hiebey noch zu erwägen übrig, dem man nicht abhelfen kann, die Geſtalt der Eichlöcher mag ſeyn, welche ſie wolle. Man ſetzt voraus, daß die durch verſchiedene dieſer Oefnungen laufende Menge Waſſer dem Quadratinhalt der Oefnungen proportional ſey. Dies iſt nicht genau richtig, wenn ein und eben daſſelbe Gefäß verſchiedene Oefnungen hat. Der Zufluß gegen die gröſſern Oefnungen iſt ſtärker, als gegen die kleinen, ſo, daß jene dieſen einen Theil des Waſſers entzie-

entziehen, was dadurch laufen ſollte. Man wird leicht ermeſſen, daß dieſerwegen die bisher erklärten Geſetze von dem Ausfluß des Waſſers durch dergleichen Oefnungen ſtarke Einſchränkungen leiden, wenn ein und eben daſſelbe Gefäß mit mehrern dergleichen Löchern verſehen iſt.

Der IV. Abſchnitt.

Von Gefäſſen, die ganz auslaufen, wenn die Oefnungen klein ſind.

58 §.

Wenn das Gefäß ABCD, aus welchem das Waſſer durch die Oefnung GH abläuft, keinen Zufluß hat; ſo ſiehet man wohl, daß das Waſſer nicht mit unveränderlicher Geſchwindigkeit durch GH laufen, ſondern dieſe Geſchwindigkeit vielmehr nach und nach abnehmen werde. Wenn nun die Oefnung in Vergleichung mit den Querſchnitten des Gefäſſes ſehr klein iſt; ſo befindet ſich das Waſſer für jede unmerklich kleine Zeit unter eben den Umſtänden, unter welchen es ſich in Gefäſſen befindet, die beſtändigen Zufluß haben. Es ſey die Oberfläche AD in der Zeit t bis EF geſunken, ſo wird ſie in der folgenden ſehr kleinen Zeit Δt ſehr wenig ſinken, und dies deſto weniger, je gröſſer die Querſchnitte des Gefäſſes in Vergleichung mit der Oefnung ſind, und je kleiner die Zeit Δt angenommen wird. Man wird 9 Fig.

alſo annehmen können, daß die Geſchwindigkeit des durch die Oefnung laufenden Waſſers in jedem Augenblick der Waſſerhöhe BE zugehöre.

59 §.

9 Fig. Die Abmeſſungen des Cylindriſchen oder Prismatiſchen Gefäſſes *ABCD* ſind gegeben, nebſt der Gröſſe der Oefnung *GH* im Boden deſſelben: man ſoll die Zeit finden, binnen der ein gegebener Theil *AEFD* des Gefäſſes ausgeleert wird.

Aufl. Es ſey $BE = x$, und $AB = a$, ſo iſt $AE = a - x$, und die Geſchwindigkeit der Fläche EF für jede gegebene Zeit t iſt $= -\frac{d \cdot (a-x)}{dt}$ (106 §. Mech.) Eben dieſe Geſchwindigkeit iſt $= \frac{GH}{BC} \cdot 2\sqrt{gx}$ (58. 4 §.), alſo erhält man $\frac{dx}{dt} = -\frac{2GH\sqrt{g}}{BC}\sqrt{x}$, und hieraus folgt $x^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{2GH\sqrt{g}}{BC}dt$. Wenn man dies nach dem 314 §. Mech. integrirt, ſo wird $2x^{\frac{1}{2}} = C - \frac{2GH\sqrt{g}}{BC}t$. Nun muß $t = 0$ ſeyn, wenn $AE = 0$, alſo $x = a$ iſt. Folglich wird $C = 2\sqrt{a}$, und dies ſtatt C geſetzt, giebt $\sqrt{x} = \sqrt{a} - \frac{GH \cdot \sqrt{g}}{BC}t$, woraus $t = \frac{BC}{GH\sqrt{g}}\sqrt{a} - \frac{BC}{GH\sqrt{g}}\sqrt{x}$ gefunden wird.

Wenn

Wenn man AE = AB = a, alſo $x = 0$ ſetzt; ſo giebt dieſe Gleichung die Zeit der völligen Ausleerung des Gefäſſes $= \frac{BC}{GH\sqrt{g}}\sqrt{a}$. Setzt man dieſe $= T$, ſo hat man $t = T - \frac{BC}{GH\sqrt{g}}\sqrt{x}$, wo t die Zeit iſt, binnen der das Stück AEFD ausgeleeret wird.

60 §.

Aus der letzten Gleichung des vor. §. folgt $T - t = \frac{BC}{GH\sqrt{a}}\sqrt{x}$, wo $T - t$ die Zeit iſt, binnen welcher der Reſt BEFC ausläuft. Hieraus folgt $(T - t)^2 = \frac{BC^2}{g \,.\, GH^2}x$, daher iſt BE dem Quadrat der Zeit proportional, worin der Reſt BEFC ausläuft. Iſt alſo die Horizontalfläche des Waſſers in MN, wenn nur noch ein Zeittheil z. E. eine Minute fehlt, bevor das Gefäß ganz ausgeleert iſt; ſo muß dieſelbe Fläche 2 Minuten vorher in OP, und BO = 4BM ſeyn, ſo wie dieſe Fläche 3 Minuten vor der völligen Ausleerung in QR ſeyn, und BQ = 9BM ſeyn muß, u. ſ. f., ſo, daß BM, MO, OQ, u. ſ. f. wie die ungraden Zahlen wachſen.

61 §.

Wenn eine Seitenfläche des Gefäſſes auf dieſe Art eingetheilt iſt; ſo kann daſſelbe ſtatt einer Uhr, die Zeit anzuzeigen, gebraucht werden. Iſt MN die Stelle, wo das Waſſer eine Stunde vor dem völligen Auslauf ſtehet, ſo wird es zwey Stunden vorher

her in OP, und 3 Stunden vorher in QR ſtehen, u. ſ. f. Die Alten haben dergleichen Waſſeruhren gebraucht, und wenn man eine Uhr von der Art ſo einrichten wollte, daß ſie 12 Stunden liefe; ſo könnte man die Höhe AB $= a$ aus der Gleichung $\frac{BC}{GH\sqrt{g}}\sqrt{a} = T$ finden, wenn man T = 12 St. ſetzte. Man erhielte nämlich $a = \frac{g.GH^2}{BC^2}T^2$. Allein es iſt am ſicherſten, durch einen Verſuch auszumachen, wieviel Waſſer in 12 Stunden herausläuft. Wenn man nun das übrige aus dem Gefäß wegnimmt, und die herausgelaufene Menge wieder eingießt, ſo hat man AB $= a$ zuverläßiger. Iſt nun BM die Höhe für die 12te Stunde, ſo iſt BM : AB $= 1 : 12^2 = 1 : 144$, alſo BM $= \frac{1}{144}$ AB. Für die zwote Stunde wird BO $= \frac{4}{144}$ AB $= 4$BM, u. ſ. f., ſo, daß die Zwiſchenräume BM, MO, OQ, u. ſ. f. wie die ungraden Zahlen wachſen, und ſich insgeſammt von ſelbſt ergeben, wenn man die ganze Höhe AB in 144 gleiche Theile eintheilt.

62 §.

Aus der Gleichung $T = \frac{BC}{GH\sqrt{g}}\sqrt{a}$ folgen noch dieſe Sätze:

Wenn das Waſſer aus Gefäßen von ungleichen Grundflächen und Höhen durch ungleiche Oefnungen fließt; ſo iſt das Verhältniß der Zeiten der gänzlichen Ausleerung zuſammen geſetzt, aus den Verhältniſſen der Grundflächen, der Quadratwurzeln der Höhen, und dem umgekehrten Verhältniß der Oefnungen,

nungen. Woraus denn ferner die ſpeciellen Sätze fließen.

Bey gleichen Höhen und Oefnungen verhalten ſich die Zeiten wie die Grundflächen: bey gleichen Grundflächen und Oefnungen, wie die Quadratwurzeln der Höhen, und bey gleichen Grundflächen und Höhen, umgekehrt wie die Oefnungen.

63 §.

Wird das Gefäß beſtändig voll gehalten, ſo findet man die Zeit, worin ſoviel ausläuft, als das ganze Gefäß faſſet, aus dem 32 §. Es war daſelbſt $t = \frac{q}{2f\sqrt{ag}}$. Wenn nun q die Menge Waſſer ſeyn ſoll, die das Gefäß ABCD faſſet, das die 9 Fig. Oefnung GH hat, ſo wird $f = GH$, $q = AB \,.\, BC$, und $a = AB$, wie im 59 §. Dies giebt $t = \frac{AB \,.\, BC}{2GH \,.\, \sqrt{AB} \,.\, \sqrt{g}}$, oder $t = \frac{BC}{2GH\sqrt{g}}\sqrt{a}$. Demnach iſt T (59 §.) $= 2t$, und es verfließt noch mahl ſo viele Zeit, wenn ſich das Gefäß nach und nach ohne Zufluß ausleert, als wenn es beſtändig voll gehalten wird. Aus dem beſtändig vollen Gefäß läuft alſo in einerley Zeit noch mahl ſoviel Waſſer als aus einem andern prismatiſchen Gefäß von eben der Grundfläche und Höhe, durch eine eben ſo groſſe Oefnung ohne Zufluß ausläuft, wenn es ſich ganz ausleert.

64 §.

Wenn *abcd* und ABCD ein paar grade Prismen 10 oder Cylinder von gleichen Grundflächen ſind, aus Fig. welchen das Waſſer durch gleiche Oefnungen läuft,

und es iſt $AB = 4 . ab$, ſo vergeht doppelt ſoviel Zeit, indem das viermahl höhere Gefäß ausläuft, als nöthig iſt, wenn das niedrige *abcd* ganz auslaufen ſoll. In der erſten Hälfte der Zeit wird der Raum AEFD leer, deſſen Höhe $AE = 3 . ab = \frac{3}{4} AB$ iſt, und in eben der Zeit läuft *abcd* ganz aus. Fängt man alſo das aus ABCD auslaufende Waſſer in einem eben ſo weiten Gefäß GHIK auf, deſſen Höhe $GH = AE = 3 . ab$ iſt, ſo wird letzteres in eben der Zeit voll werden, in welcher *abcd* ganz ausläuft. Graveſand hat den Verſuch angeſtellt, und dies der Erfahrung gemäß befunden. Phyſ. Element. Math. T. I. Lib. III. Cap. IX. §. 1644. p. 471.

65 §.

Wenn aber die Erfahrung in allen Stücken, und insbeſondere in Anſehung der Menge, die in gegebener Zeit ausläuft, mit der Theorie übereinkommen ſoll; ſo muß man der Gleichung des 59 §. ſtatt der Oefnung GH den Queerſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls brauchen. Wenn alſo $BC = h$, $GH = f$ iſt, und der Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls $= \frac{f}{\alpha}$; ſo hat man eigentlich

$$t = \frac{\alpha h}{f\sqrt{g}}(\sqrt{a} - \sqrt{x}) = \frac{\alpha h\sqrt{a}}{f\sqrt{g}}\left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right).$$

Dafern α von der Waſſerhöhe abhienge, ſo würde bey gegenwärtiger Unterſuchung α veränderlich ſeyn. Dies würde verurſachen, daß die Differentialgleichung des 59 §., die nun folgende wäre: $\alpha x^{-\frac{1}{2}} dx$

=

$= - \frac{2f\sqrt{g}}{h} dt$, auf eine andere Integralgleichung führte, weil nun auch α durch eine Function von x ausgedrückt werden müſte. Weil aber wenigſtens alsdenn der Werth von α keine merkliche Aenderung leidet, wenn die Höhen nicht viel von einander unterſchieden ſind, ſo kann man bey der Integration α als eine beſtändige Gröſſe betrachten, und die vorhin ſchon erwehnte Gleichung

$t = \frac{\alpha h}{f\sqrt{g}} (\sqrt{a} - \sqrt{x})$ beybehalten.

66 §.

Hat man nun durch einen Verſuch gefunden, in wie vieler Zeit aus einem ſolchen Gefäß, das keinen Zufluß hat, ein gewiſſer Theil des Waſſers, womit es bis auf eine bekannte Höhe angefüllt war, durch eine bekannte Oefnung ausgelaufen iſt, ſo läſt ſich daraus α finden. Es wird nemlich $\alpha = \frac{ft\sqrt{g}}{h(\sqrt{a} - \sqrt{x})}$

Dergleichen Verſuche hat Daniel Bernoulli angeſtellt. Ein grades cylindriſches Gefäß, das aus dünnem Blech verfertiget, und 4 Zoll 3 Linien nach Engliſchem Maaß im Durchmeſſer weit war, hatte ſeitwärts eine Oefnung von $4\frac{52}{125}$ Lin. im Durchmeſſer. Anfangs ſtand das Waſſer über dem Mittelpunct der Oefnung 4 Zoll 8 Lin. hoch, und in $4\frac{1}{2}$ Secunden lief ſo viel Waſſer aus, daß die Höhe nur 3 Zoll blieb. Man ſetze $a = 56$ Lin., $x = 36$ Linien, ſo iſt $\sqrt{a} = 7{,}482$ und $\sqrt{x} = 6$, alſo $\sqrt{a} - \sqrt{x} = 1{,}482$. Ferner iſt $\frac{f}{h} = \frac{4{,}416^2}{51^2}$, und

 $g =$

$g = 16,1$ Engl. Fuß (181 §. Mech.) $= 2318,4$, Lin.

alſo $\alpha = \frac{4,416^2 \cdot 4,5 \cdot \sqrt{2318,4}}{51^2 \cdot 1,482}$.

Die fernere Rechnung giebt

$$\begin{array}{rl} l\,4,416 & = 0,6450291 \\ l\,4,416^2 & = 1,2900582 \\ l\,2318,4 & = 3,3651884 \\ l\sqrt{2318,4} & = 1,6825942 \\ l\,4,5 & = 0,6532125 \\ \hline \text{Log. des Zehlers} & = 3,6258649 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} l\,51 & = 1,7075702 \\ l\,51^2 & = 3,4151404 \\ l\,1,482 & = 0,1708482 \\ \hline \text{Log. des Nenners} & = 3,5859886 \\ l\,\alpha & = 0,0398763 \end{array}$$

Dazu gehört die Zahl $\alpha = 1,096$, aber Bernoulli findet $\alpha = 1,43$, beynahe $= \sqrt{2}$. So viel ich ſehe, iſt hier entweder ein Rechnungsfehler eingeſchlichen, oder es iſt auch die anfängliche Waſſerhöhe nicht 4 Zoll 8 Linien, ſondern nur 4 Zoll 3 Lin. geweſen. Ich finde ſonſt alles ſo, wie Bernoulli, $\frac{h}{f} = \frac{51^2}{4,416^2} = 133$, $\sqrt{\frac{x}{g}} = \sqrt{\frac{36}{2318,4}} = 0,1246$. Dagegen finde ich $\sqrt{\frac{a}{g}} = 0,1554$, und Bernoulli $\sqrt{\frac{a}{g}} = 0,1483$. Alſo wird nach meiner Rechnung $t = 4,5 = 4,0964 \cdot \alpha$, und $\alpha = \frac{4,5}{4,0964} = 1,098$, wie

vor-

vorhin, bis auf eine Kleinigkeit. Aus Hrn. Bernoulli Zahl $\sqrt{\frac{a}{g}} = 0{,}1483$ folgt $a = 0{,}1483^2 g$,

$$\begin{aligned} \text{und es iſt } l\,0{,}1483 &= 0{,}1711412 - 1 \\ l\,0{,}1483^2 &= 0{,}3422824 - 2 \\ l\,(g = 193{,}2 \text{ Zoll}) &= 2{,}2860071 \\ \hline l\,a &= 0{,}628\;895 \\ \text{alſo } a &= 4{,}249 \text{ Zoll} \end{aligned}$$

oder faſt $a = 4{,}25$ Zoll $= 4$ Zoll 3 Lin. Ich vermuthe alſo, daß 4 Zoll 8 Lin. ein Druckfehler ſey, und daß es 4 Zoll 3 Lin. für die anfängliche Waſſerhöhe ſeyn ſollen; ſonſt würde dieſer Verſuch einen Werth geben, der von $\alpha = \sqrt{2}$ ſehr unterſchieden wäre. Indeſſen iſt die Bernoulliſche Zahl 1,43 noch ein wenig gröſſer, als $\sqrt{2} = 1{,}41$, (nach einer noch genauern Rechnung kommt eigentlich nur 1,428 grade ſo, wie beym Mariottiſchen Verſuch im 40 §.) und Bernoulli meint, wenn die Geſchwindigkeit des Waſſers ganz genau hätte gemeſſen werden können, ſo wäre ſie etwas kleiner befunden, als die, ſo der ganzen Waſſerhöhe zugehört. Wegen dieſer geringern Geſchwindigkeit wäre nun ſchon die Zeit des Verſuchs gröſſer, als ſie die Rechnung nach dem 59 §. giebt: alſo könnte der Querſchnitt des zuſammengezogenen Strahls würklich etwas gröſſer, folglich α etwas kleiner ſeyn, als aus der angeſtellten Rechnung folgt. Man ſ. Dan. Bernoulli Hydrod. Sect. IV. Exper. I. p. 79.

67 §.

Ein anderer Verſuch a. a. O. Exper. 3. p. 80. 81. ſollte entſcheiden, ob bey einer beträchtlich gröſſern

Waſſer-

Waſſerhöhe ein merklich unterſchiedener Werth von α würde gefunden werden. Hiezu ward ein priſmatiſches Gefäß gebraucht, und es war die anfängliche Waſſerhöhe 13 Zoll 10 Lin. Engl., die zweyte 12 Zoll $1\frac{3}{5}$ Lin., ſo weit fiel das Waſſer in 10 Secund. Ueberdem war $\frac{h}{f} = 404$, und die vorigen Zahlen geben $a = 166$ Linien, $x = 145{,}6$, alſo $\sqrt{a} = 12{,}806$, $\sqrt{x} = 12{,}065$, folglich $\sqrt{a} - \sqrt{x} = 0{,}741$, und nach dem 59 §,

$$t = \frac{404 \cdot 0{,}741}{\sqrt{2318{,}4}} = \frac{404 \cdot 0{,}741}{48{,}1497} = 6{,}872$$

Sec. beynahe $= 6\frac{7}{8}$ Secund. Die Zeit des Verſuchs durch die gefundene dividirt, giebt $\alpha = 1{,}45$. Hiebey bringt Bernoulli aus einem ähnlichen Grunde, wie im vor. §., noch eine Verbeſſerung an. Er hatte mit möglichſter Sorgfalt die Einrichtung ſo gemacht, daß das Waſſer genau nach horizontaler Richtung ausſtrömen muſte, und vermittelſt des im 23 §. beſchriebenen Verfahrens gefunden, daß die eigentliche Geſchwindigkeit, womit das Waſſer bey dieſem Verſuch durch die Oefnung, oder eigentlich durch den Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls zu laufen angefangen, der Höhe von $158\frac{1}{2}$ Linien gehört habe, als die Waſſerhöhe 166 Linien war. Deswegen bedarf die für α gefundene Zahl einer Verbeſſerung, die auf folgende Art gefunden wird.

68 §.

Wenn gleich der Waſſerſtrahl keine Zuſammenziehung litte, ſo würde doch wegen der würklichen Geſchwindigkeit des Waſſers, die geringer iſt, als

die Theorie annimmt, die Zeit des Verſuchs gröſſer ſeyn, als die berechnete Zeit. Man ſuche alſo, wie groß dieſe Zeit ſeyn müſte, mit Beyſeitſetzung der Zuſammenziehung. In ſolcher Abſicht nehme man an, die Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers gehöre der Höhe μx, ſo daß μ ein eigentlicher Bruch iſt, den man hier als eine beſtändige Zahl betrachten kann, ſo lange x nicht ſehr beträchtliche Aenderungen leidet. Berechnet man alsdenn, wie im 59 §. die Zeit, ſo findet man

$t = \frac{h}{f\sqrt{\mu g}}(\sqrt{a} - \sqrt{x})$. Alſo muß die berechnete Zeit noch durch $\sqrt{\mu}$ dividirt, oder durch $\sqrt{\frac{1}{\mu}}$ multiplicirt werden. Aber α wird gefunden, wenn man die beobachtete Zeit T durch die berechnete t dividirt. Weil nur hier $\frac{t}{\sqrt{\mu}}$ aus dem vorhin berechneten t wird, ſo wird eigentlich $\alpha = \frac{T}{t}\sqrt{\mu}$.

Im gegenwärtigen Exempel iſt $\mu = \frac{158,5}{166}$, und $\sqrt{\mu} = 0,977$. Dies giebt nach des H. Bernoulli Rechnung $\alpha = 1,41665$, beynahe $= \sqrt{2}$, und er ſchlieſt daraus, daß α ſich nicht merklich ändere, wenn gleich die Waſſerhöhen ziemlich unterſchieden ſind. Wäre im vorigen Verſuch die gröſte Waſſerhöhe würklich 4 Zoll 8 Linien geweſen, ſo würden beyde Verſuche beſtätigen, daß α bey gröſſern Höhen und eben der Oefnung merklich wachſe.

69 §.

69 §.

Bernoulli hat mehr Verſuche von dieſer Art, unter andern auch in der Abſicht angeſtellt, um zu erfahren, ob die Bewegung des durchlaufenden Waſſers mehr oder weniger verzögert werde, nachdem es in dieſer oder einer andern Richtung entweder vertical aufwärts oder abwärts, oder horizontal, oder nach einer geneigten Richtung ausſtrömt. Er hat gefunden, daß das Waſſer allemahl in einerley Zeit um eine gleiche Tiefe im Gefäß geſunken iſt, es mögte nach einer Richtung ſtrömen, nach welcher es wollte. Er hat auch den Strahl in einer Entfernung von etwa 3 Linien von der Oefnung ſo aufgefangen, daß derſelbe gegen eine ihm entgegengeſetzte Fläche ſenkrecht ſprützen müſſen: dies hat keine Verzögerung des durchlaufenden Waſſers verurſachet (a. a. O. Exper. 2 pag. 80.). Bey allen Verſuchen von dieſer Art, iſt es eine Hauptregel, daß man dem Waſſer nicht ehe den Durchgang verſtattete, bis es im Gefäß völlig ruhig iſt. Beym Hineingieſſen wird das Waſſer im Gefäß in eine wirbelförmige Bewegung gebracht, und wenn dieſe noch nicht aufgehört hat, ſo wird dadurch der Ausfluß ſehr verzögert.

70 §.

Ueber die Zeit der gänzlichen Ausleerung hat Bernoulli ebenfalls Verſuche angeſtellt. Aus einem Cylinder von 4 Zoll Höhe lief das Waſſer, in $21\frac{1}{2}$ Secunden, wenn ſeine Querſchnitte 110mahl gröſſer waren, als die Fläche der Oefnung. Setzt man in die Gleichung $T = \frac{h\sqrt{a}}{f\sqrt{g}}$ (59 §.) die

Zah-

Zahlen $\frac{h}{f} = 110, a = \frac{1}{3}$ Fuß, $g = 16,1$ Fuß, ſo

wird $T = \frac{110}{\sqrt{48,3}} = \frac{110}{6,95} = 15,83$ Sec.

Die beobachtete Zeit von 21,5 Secunden hiedurch dividirt giebt $\alpha = 1,36$ etwas kleiner als $\sqrt{2}$. Die Urſache hievon ſchreibt Bernoulli dem Umſtand zu, weil der Boden des Gefäſſes eine Dicke von nicht völlig $\frac{2}{3}$ Linien, alſo das Loch die Natur einer kleinen eben ſo langen cylindriſchen Röhre hatte, wodurch die Zuſammenziehung ein wenig vermindert worden (a. a. O.) Exper. 4. p. 81. 82.).

Bey einem neuen Verſuch (ebendaſ. Exp.) lief das Waſſer durch eine kurze Röhre 3 Linien lang und 5 Linien im Durchmeſſer. Die beobachtete Zeit war $11\frac{1}{4}$ Secunden, und die berechnete $10\frac{2}{3}$ Secunden. Dies gäbe $\alpha = 1,055$, ohngefehr ſo, wie nach Poleni Verſuch 39 §. Uebrigens haben andre Verſuche gelehrt, daß die Geſchwindigkeiten des Waſſers deſto mehr von derjenigen unterſchieden geweſen, welche der ganzen Waſſerhöhe gehört, je enger und je länger die Röhren und je gröſſer die Waſſerhöhe geweſen.

71 §.

Am Boden eines 4 Zoll hohen cylindriſchen Gefäſſes war eine verticale cylindriſche Röhre einen Fuß lang angebracht, die Querſchnitte des Gefäſſes waren 110mahl weiter, als die Querſchnitte der Röhre, und durch die Röhre lief das Waſſer aus dem Gefäß in $6\frac{1}{2}$ Secunden aus. In die Gleichung $t = \frac{h}{f\sqrt{g}}(\sqrt{a} - \sqrt{x})$ ſetze man $\frac{h}{f} = 110, x = 1$

Fuß,

Fuß, $a = 1\frac{1}{3}$ Fuß, $g = 16,1$ Fuß, ſo hat man $\sqrt{a} = 1,1547$, $\sqrt{a} - \sqrt{x} = 0,1547$, $\sqrt{g} = 4,0124$,

alſo $t = \frac{110 . 0,1547}{4,0124} = 4,241$ Sec. Bernoulli findet $4\frac{1}{3}$ Sec. Falls nun hier keine Zuſammenziehung des Strahls ſtatt gehabt hat; ſo iſt die Verzögerung theils dem Reiben und Anhängen des Waſſers an der innern Fläche der Röhre, theils dem Widerſtande der Luft zuzuſchreiben.

Ein andres Gefäß hatte eben die Abmeſſungen, nur war die Röhre coniſch, und das Waſſer floß in die engere Mündung ein, durch die weitere aber aus. Dieſe verhielte ſich zu jener wie 25 : 16, alſo iſt das jetzige $f = \frac{25}{16}$ des vorigen. Vorhin war $\frac{h}{f} = 110$,

alſo jetzt $\frac{h}{f} = \frac{110 \times 16}{25} = 70,4$. Dies giebt

$t = \frac{70,4 . 0,1547}{4,0124} = 2,714$ Sec. Der Verſuch aber gab $4\frac{1}{3}$ Secunden (a. a. O. Exp. 6. p. 83.)

72 §.

Bey einem neuen Verſuch ward eine 4 Zoll lange coniſche Röhre ſeitwärts in horizontaler Lage am Gefäß angebracht, und das Waſſer lief ebenfalls aus der gröſſern Oefnung aus. Ihr Durchmeſſer war $6\frac{1}{2}$ Lin., und die kleinere hielte 5 Linien im Durchmeſſer. Die Querſchnitte des Gefäſſes waren 201 mahl gröſſer als die gröſſere Mündung. Das Gefäß war 13 Zoll 10 Linien hoch über die Axe der Röhre mit Waſſer gefüllt, und in $8\frac{1}{3}$ Secunden fiel das Waſſer um 2 Zoll 8 Linien. Um die Vergleichung

chung mit der Theorie anzuſtellen, ſetze man $\frac{h}{f} = 201$, $a = 166$ Linien, $\sqrt{a} = 12{,}8841$, $x = 134$ Linien, $\sqrt{x} = 11{,}5758$, $\sqrt{a} - \sqrt{x} = 1{,}3083$, und $t = \frac{201 . 1{,}3083}{48{,}1497} = 5{,}46$ Secunden, beynahe $= 5\frac{1}{2}$ Secunden. Hat nun die Geſchwindigkeit des Waſſers eigentlich der Höhe μx zugehört, ſo iſt, wie im 68 §., $t = \frac{h}{f\sqrt{\mu g}}(\sqrt{a} - \sqrt{x})$, und dies müſte die Zeit des Verſuchs ſeyn. Es wäre alſo $8\frac{1}{3} = \frac{5\frac{1}{2}}{\sqrt{\mu}}$, und $\sqrt{\mu} = \frac{5\frac{1}{2}}{8\frac{1}{3}} = \frac{33}{50}$ beynahe $= \frac{2}{3}$. Demnach hätte die Geſchwindigkeit der Höhe $\frac{4}{9}x$ zugehört, alſo der Höhe $\frac{4}{9} . 166$ Linien $= 6$ Zoll 2 Lin. im Anfang der Bewegung. Ein nach dem 23 §. angeſtellter Verſuch aber gab für dieſe Höhe nur 4 Zoll 10 Linien. Beydes wird mit einander vereiniget, wenn man mit **Bernoulli** a. a. O. Sect. IV. §. 15. annimmt, daß ſich der Waſſerſtrahl nicht zuſammenziehe, ſondern vielmehr erweitere, wenn das Waſſer durch eine coniſche Röhre läuft, die gegen die äuſſere Mündung zu weiter wird. Man muß alsdenn in den obigen Formuln ſtatt der Fläche f der Oefnung ſelbſt den Querſchnitt des erweiterten Waſſerſtrahls brauchen, vermöge dieſer Vorausſetzung hat die Geſchwindigkeit in der Oefnung der Höhe 6 Zoll 2 Linien, im Querſchnit des erweiterten Waſſerſtrahls aber der Höhe 4 Zoll 10 Linien zugehört. Hieraus fließt das Verhältniß zwiſchen dem Querſchnitt des erweiterten Waſſer-

Bayerische Staatsbibliothek München

ſtrahls und der Oefnung $= \sqrt{74} : \sqrt{58}$, alſo das Verhältniß der zugehörigen Durchmeſſer

$$= \sqrt[4]{74} : \sqrt[4]{58}.$$

Der V. Abſchnitt.

Vom Lauf des Waſſers in Canälen und Flüſſen.

73 §.

11 Wenn das Waſſer in einem Canal, der die Geſtalt
12 eines rechtwinklichten Parallelepipedi hat, wie
Fig. ACBD, von A nach B fortflieſſet, und man ſtellt ſich eine Ebene vor, die auf dem Boden und den Seitenflächen des Canals ſenkrecht iſt; ſo heiſt die Durchſchnittsfigur CEBG mit dem Canal und der Oberfläche des Waſſers ein Querſchnitt des Fluſſes. Die Canäle, worin die natürlichen Flüſſe auf der Erde fortlaufen, heiſſen ihre Betten. Dieſe haben eine ſehr irregulare Geſtalt, die ſich ſchwerlich als eine Geometriſche Figur betrachten und in Rechnung bringen läſt. Die Canäle aber, welche man durch die Kunſt anlegt, dergleichen z. E. die Mühlgräben ſind, haben gewöhnlich die Geſtalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi. Wenn man zuförderſt über die Bewegung des Waſſers in dergleichen regulären Canälen Unterſuchungen anſtellt; ſo läſt ſich die Sache hiernächſt auch einigermaaſſen auf die Bewegung des Waſſers in natürlichen Flüſſen anwenden.

74 §.

74 §.

Fließt das Waſſer im Canal ABCD ſo fort, daß in gleichen Zeiten, durch jede zwo Querſchnitte des Fluſſes BC und AD, allemahl eine gleiche Menge Waſſer läuft; ſo wird die Oberfläche des Waſſers beſtändig einerley Figur behalten, ſie wird ſich an keinem Orte weder mehr von dem Grunde des Canals erheben, noch tiefer ſenken, als vorher. Wenn *bc* ein dritter Querſchnitt des Fluſſes zwiſchen den beyden vorigen, und *ce* die Durchſchnittslinie mit der Oberfläche des Fluſſes iſt, ſo wird ſie dies beſtändig bleiben: das Waſſer wird nie über *ce* oder unter *ce* weglaufen, ſo lange durch alle Querſchnitte in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Waſſer läuft. Man ſagt in dieſem Fall, der Fluß ſey im **Beharrungs-Stande**.

Es iſt übrigens auch umgekehrt wahr. Wenn die Oberfläche des Fluſſes beſtändig einerley Figur behält, nnd ſich an keinem Orte weder mehr hebt, noch ſenkt, als vorher; ſo folgt, daß durch jede zwo Querſchnitte des Fluſſes in gleicher Zeit eine gleiche Menge Waſſer laufe.

75 §.

Wenn der Canal ABCD ein rechtwinklichtes Parallelepipedum iſt, und die Grundfläche horizontal liegt, wenn ferner auf der einen Seite AD beſtändig ein hinlänglicher Zufluß von Waſſer iſt, um den Canal voll zu erhalten, der Canal ſelbſt aber auf der andern Seite bey BC offen iſt; ſo fließt das Waſſer durch jeden Querſchnitt, wie BECG, nach eben den Geſetzen, nach welchen es aus der Seitenöfnung 11 Fig.

eines beſtändig vollen Gefäſſes abläuft. In jeder Tiefe EP unter der Oberfläche iſt die Geſchwindigkeit ſo groß, als diejenige, die ein ſchwerer Körper von der Höhe EP erlangt. Wenigſtens kann man feſtſetzen, daß ſich in verſchiedenen Tiefen EP EQ, die Geſchwindigkeit des Waſſers wie $\sqrt{EP} : \sqrt{EQ}$ verhalten. Man ſetze PM und QN auf EB ſenkrecht, und nehme an, daß PM und QN die Geſchwindigkeiten des Waſſers in P und Q ſind, ſo hat man $EP : EQ = PM^2 : QN^2$, und wenn BF die Geſchwindigkeit des unterſten Waſſers iſt, ſo hat man $EP : EB = PM^2 : BF^2$. Für jeden Werth von EP hat PM einen andern Werth, ſo, daß beyde als ein paar veränderliche Gröſſen betrachtet werden können, die von einander abhängen. Es ſey $EP = x$, $PM = y$, $EB = a$, $BF = c$; ſo wird $x : a = y^2 : c^2$, alſo $y^2 = \frac{cc}{a}x$. Stellet man ſich demnach eine Linie vor, die durch alle Puncte M gehet, ſo erhellet aus dem 95 §. Mech., daß dies eine Parabel ſey, deren Parameter $= \frac{cc}{a}$ iſt. Wäre $c = 2\sqrt{ag}$, wie aus dem 20 §. folgen würde; ſo hätte man $\frac{cc}{a} = 4g$, und $y^2 = 4gx$, ſo, daß der Parameter $= 4g$ wäre. Wer mit Gulielmini und einigen andern Schriftſtellern annimmt, die Geſchwindigkeit in jeder Stelle P gehöre nicht der ganzen Waſſerhöhe x, ſondern nur einem Theile μx derſelben: der muß $\frac{cc}{4g} = \mu a$, alſo $\frac{cc}{a} = 4\mu g$ ſetzen, und nach dieſer Vor-

aus-

ausſetzung wäre der Parameter der Parabel $= 4\mu g$. Weil übrigens der Canal beſtändig voll bleibt, ſo iſt die Bewegung der Waſſertheilchen gleichförmig, und die Geſchwindigkeit aller derer, die gleich tief flieſſen, einerley.

76 §.

An der gegenüberſtehenden Seitenlinie CG des Querſchnitts EBGC ſey in der Ebene DG eine gleiche und ähnliche Parabel CH Verzeichnet, ſo wird FH mit GB parallel ſeyn. Wenn ferner $Cp = EP$ genommen wird; ſo iſt $pm = PM$, und $Mm \# BG$. Alle die Linien Mm liegen in einer krummen paraboliſchen Fläche, und der Körper, den dieſe Fläche mit den Ebenen EBF, CGH, EG und BH einſchlieſt gehört in die Claſſe prismatiſcher und cylindriſcher Körper, EBF, CGH ſind ſeine Grundflächen, und BG iſt ſeine Höhe. Die Menge Waſſer, welche in einer Secunde durch den Querſchnitt EBGC läuft, würde dieſen körperlichen Raum füllen: alſo kommt es darauf an, daß man den Inhalt dieſes Körpers berechnen könne, wenn man wiſſen will, wie viel Waſſer in gewiſſer Zeit durch einen ſolchen Querſchnitt läuft.

77 §.

Die Berechnung des Inhalts von dieſem Körper 11
hängt, wie man leicht ſiehet, von der Berechnung Fig.
des Inhalts ſeiner Grundflächen EBF und CGH ab. Uebrigens erhält man den Inhalt dieſes Körpers in Cubicmaaß, wenn man den Quadratinhalt ſeiner Grundfläche mit der Höhe multiplicirt. Wenn nämlich PQRM, QBSN Rechtecke ſind, die man, wie im 114 §. Mech., in der Grundfläche beſchreibt, und man ſetzt auf ſie in der Höhe BG recht-

winklichte in dem Körper beſchriebene Parallelepipeda, ſo iſt die letzte Summe derſelben dem Körper gleich. Ihrer aller Summe iſt das Product aus der Summe der Grundflächen in BG, alſo iſt der Körper ſelbſt das Product aus der letzten Summe dieſer Grundflächen in BG, folglich der Körper = BEMNF × BG.

78 §.

Den Inhalt der Fläche *EBF* zu finden.

Aufl. Wenn EP $= x$, PM $= y$; ſo iſt der Inhalt von EPM $= \int y dx$ (114 §. Mech.) Da nun $yy = \frac{cc}{a} x$, alſo $y = \frac{c}{\sqrt{a}} x^{\frac{1}{2}}$, ſo wird $\int y dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{\sqrt{a}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{\sqrt{a}} x \sqrt{x}$ (314 §. Mech.) Weil EPM $= 0$ iſt, für $x = 0$, ſo wird keine conſtans zugeſetzt. Da nun dieſer Ausdruck jedes unbeſtimmte Stück EPM durch EP $= x$ ausdrückt, ſo darf man nur $x =$ EB $= a$ ſetzen, um EBF zu erhalten, und es wird EBF $= \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{\sqrt{a}} \cdot a \sqrt{a} = \frac{2}{3} ac$.

79 §.

Die Tiefe *a* und Breite *b* des horizontalen Canals iſt gegeben: man ſucht die Menge des in gegebener Zeit durch jeden Querſchnitt laufenden Waſſers.

Aufl. Wenn BG $= b$ geſetzt wird, ſo iſt des Körpers BECGHF Inhalt $\frac{2}{3} abc$, und ſo viel Waſſer, als dieſen füllt, flieſt in einer Secunde durch den Querſchnitt BECG; folglich in jeder andern Zeit t die Menge $\frac{2}{3} abct$. Man ſetze die in einer Secunde durch-

durchflieſſende Menge $= M$, und $c = 2\sqrt{\mu a g}$ (75 §.), ſo hat man $M = \frac{2}{3}b \,.\, a\sqrt{\mu a} \,.\, 2\sqrt{g}$. Für jede andere Zeit t, die in Secunden ausgedrückt werden muß, iſt alsdenn die Waſſermenge $= M \,.\, t$. Will man $\mu = 1$ ſetzen; ſo iſt $M = \frac{2}{3}b \,.\, a\sqrt{a} \,.\, 2\sqrt{g}$.

80 §.

Es ſey $BK = \frac{2}{3}BF$, und über BECG ein rechtwinklichtes Parallelepipedum in der Höhe BK verzeichnet, ſo erhellet, wenn alle Waſſertheilchen mit einerley Geſchwindigkeit, die $=$ BK wäre, durch BECG lieſen, daß in einer Secunde ſo viel Waſſer durchlaufen würde, als dies Parallelepipedum füllet. Da nun dies ebenfalls $= \frac{2}{3}abc$ iſt, ſo würde mit der durchgängig gleichen Geſchwindigkeit $= \frac{2}{3}c$ eben ſo viel Waſſer durchlaufen, als nun in eben der Zeit wegen der ungleichen Preſſung des Waſſers auf die untern Schichten durchläuft. Man nennt überhaupt diejenige Geſchwindigkeit die mittlere Geſchwindigkeit des Waſſers, womit alle Theilchen deſſelben durch einen gewiſſen Querſchnitt des Fluſſes laufen müſten, wenn in einerley Zeit eben ſo viel Waſſer durchlaufen ſollte, als bey den würklich verſchiedenen Geſchwindigkeiten deſſelben durchläuft. In dem vorhin betrachteten Fall iſt alſo die mittlere Geſchwindigkeit $\frac{2}{3}$ von derjenigen, womit die niedrigſten Theilchen fortlaufen. Sie iſt demnach $\frac{2}{3} \,.\, 2\sqrt{ag} = 2\sqrt{\frac{4}{9}ag}$, und die ihr zugehörige Höhe $= \frac{4}{9}a$, in der Vorausſetzung, daß $\mu = 1$ ſey: ſonſt ſchreibt man μa ſtatt a. 11 Fig.

81 §.

So wie ich hier die Theorie von der Berechnung der Geſchwindigkeit und Menge des durch jeden

Querſchnit laufenden Waſſers in einem horizontalen Canal vortrage, eben ſo findet man ſie beym Guglielmini de menſura aquarum fluentium, und andern Schriftſtellern ausgeführt. Ich muß aber bemerken, daß die dabey zum Grunde liegende Vorausſetzung, als wenn die Geſchwindigkeit der durchflieſſenden Waſſertheilchen allein von der darüber befindlichen Waſſerhöhe abhänge, ſtarke Einſchränkungen leide. Soll $c = 2\sqrt{\mu a g}$ ſeyn, alſo $y = 2\sqrt{\mu g x}$; ſo iſt $y = 0$, wenn $x = 0$ iſt, μ mag ſeyn, was es wolle. Das heiſt, an der Oberfläche eines horizontalen Canals flieſt das Waſſer gar nicht fort. Ich denke nicht, daß dies in der Natur ſich ſo verhalte. Wegen des obwohl geringen Zuſammenhangs der Waſſertheilchen unter einander werden die Waſſertheilchen, die ſich jetzt in einer horizontallinie, wie Qq, befinden, die zunächſt darüber liegenden etwas beſchleunigen, und das wird für alle höher liegende bis an CE eben ſo gehen, ſo, daß wegen des Zuſammenhangs diejenigen, welche ſich in der Oberfläche des Waſſers befinden, eine ziemliche Beſchleunigung leiden, und keinesweges völlig in Ruhe bleiben können. Ich ſehe alſo die bisher vorgetragenen Rechnungen nur als Näherungen an, bey einer Unterſuchung, die keine völlig ſcharfe Rechnung verſtattet. Wären die angenommenen Vorausſetzungen völlig richtig, ſo würde das Waſſer auf der Oberfläche gar nicht flieſſen: es würde daſelbſt völlig in Ruhe ſeyn, und gar nichts von D nach C kommen. Iſt die Vorſtellung richtig, die ich mir von der Sache mache, ſo dünkt mich, könne man nicht mit dem Hrn. Hofr. Käſtner (Hydrodynam. 266 §. 193 S.) auf die Art ſagen, daß Waſſer von D nach C komme, ohne

ne Geſchwindigkeit zu haben, wie man von jemanden ſagt, er ſitze im Wagen ſtill, und werde vom Wagen fortgeführt. Die relative Geſchwindigkeit der im Wagen ſitzenden Perſon, in Anſehung des Wagens, iſt zwar = o, aber nicht ihre abſolute Geſchwindigkeit, da doch die abſolute Geſchwindigkeit der in der Oberfläche des Canals befindlichen Waſſertheilchen den obigen Vorausſetzungen gemäß = o seyn müſte. Deswegen könnte man auch wohl nicht ſagen, daß ſie von dem unter ihnen befindlichen Waſſer fortgetragen werden, ohne zugleich die Vorausſetzung, daß ihre Geſchwindigkeit = o ſey, wieder aufzuheben.

82 §.

Wenn ABCD ein Mühlgraben, und BC ein Schutzbrett iſt, ſo berechnet man ebenfalls nach dem 79 §. die Menge des durch das Gußloch laufenden Waſſers, dafern das Schutzbrett ſo weit in die Höhe gezogen iſt, daß der ganze Waſſerkörper BEFGHC durchſchieſſen kann; es darf nur alsdenn durch b die Breite der Ausguß-Oefnung verſtanden werden. Wäre die Höhe dieſer Oefnung kleiner, als die Höhe BE des Waſſers im Canal; ſo würde man die Menge des in einer Secunde durchſchieſſenden Waſſers vermittelſt einer ähnlichen Rechnung finden. Es ſey EQ = α die Höhe des Waſſers über den obern Rand der Oefnung, ſo iſt $a - \alpha$ die Höhe der Oefnung ſelbſt. Man ſtelle ſich eben den paraboliſchen Körper, wie im 76 §. vor, ziehe Qq mit BG parallel, und lege durch Qq die horizontale Ebene QNnq; ſo erhellet, wie im 76 §., daß, ſo viel Waſſer in einer Secunde durchſchieſſen werde, als den paraboliſchen

Raum BQNFGHnq füllt. Der Inhalt dieſes Körpers iſt $=$ BQNF $\times$ BG, und BQNF $=$ EBF $-$ EQN $= \frac{2}{3}$(EB.BF $-$ EQ.QN) (78 §.). Setzt man nun, wie bisher, EB $= a$, BG $= b$, BF $= c$, und überdem QN $= k$, ſo erhält man die Menge des in einer Secunde durchſchieſſenden Waſſers $= \frac{2}{3}(ac - \alpha k)\,b$. Wird ferner $c = 2\sqrt{g\mu a}$, $k = 2\sqrt{g\mu\alpha}$ geſetzt, und die Menge des in einer Secunde durchſchieſſenden Waſſers $=$ M; ſo hat man

$$M = \tfrac{4}{3}(a\sqrt{a} - \alpha\sqrt{\alpha})\,b\sqrt{\mu g}.$$

Der Inhalt der Ausguß-Oefnung iſt $=$ BQ $\times$ BG $= (a - \alpha)\,b$. Wenn man den für die Waſſermenge in einer Secunde gefundenen Ausdruck hiemit dividirt, ſo erhält man die mittlere Geſchwindigkeit

$$= \tfrac{2}{3} \cdot \frac{ac - \alpha k}{a - \alpha} = \tfrac{2}{3}\left(c + \frac{\alpha(c - k)}{a - \alpha}\right)$$

$$= \tfrac{2}{3}\left(\sqrt{a} + \frac{\alpha(\sqrt{a} - \sqrt{\alpha})}{a - \alpha}\right) \cdot 2\sqrt{\mu g},$$

oder eben dieſe mittlere Geſchwindigkeit

$$= \tfrac{2}{3}\,\frac{a\sqrt{a} - \alpha\sqrt{\alpha}}{a - \alpha} \cdot 2\sqrt{\mu g}.$$

Wenn alle Theilchen mit dieſer Geſchwindigkeit durchlieſen, ſo würde in eben der Zeit eben ſo viel Waſſer durchſchieſſen.

Quadrirt man dieſen Ausdruck, und dividirt ihn durch $4g$, ſo erhält man die der mittlern Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $= \frac{4}{9} \cdot \frac{(ac - ak)^2}{4(a - \alpha)^2 g}$, oder eben dieſe Höhe $\frac{4}{9} \cdot \frac{(a\sqrt{a} - \alpha\sqrt{\alpha})^2}{(a - \alpha)^2} \cdot \mu$.

Man

Man ſiehet leicht, daß dieſe erwieſene Regel allemahl gebraucht werden könne, wenn die Menge Waſſer geſucht werden ſoll, die aus einer vertical ſtehenden rechteckten Seiten-Oefnung eines Gefäſſes läuft. Dies iſt alſo die im 56 §. verſprochene Regel.

83 §.

Will man die Regeln feſtſetzen, wornach ſich der Lauf des Waſſers in ſolchen Canälen richtet, die gegen den Horizont geneigt ſind; ſo muß man ebenfalls die Vorausſetzung annehmen, daß der Waſſerabgang durch beſtändigen Zufluß erſetzt werde. Es ſey demnach *abcd* ein groſſer Waſſerbehälter, worin ſich ſte- 12
hendes Waſſer befindet, welches aus demſelben in Fig.
den Canal ABCD durch die Oefnung AODN abflieſſet. Ueberdem ſetze man zum Grunde, daß dies ablaufende Waſſer durch neuen Zufluß in den Behälter erſetzt werde, ſo daß es in demſelben beſtändig einerley Höhe behält. Der Boden des Behälters ſey horizontal, und AN ſey die grade Linie, worin die Grundfläche des Canals ABGN den Boden des Behälters ſchneidet; ſo iſt AN horizontal. Weil nun überdem die Vorausſetzung bleibt, daß der Canal die Geſtalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi habe, ſo ſind die Seitenflächen OABE und DNGC vertical. Man ziehe BG mit AN parallel, ſo iſt auch BG horizontal, und wenn man durch AN und BG ein paar Ebenen auf ABGN ſenkrecht ſetzt, ſo ſind die Durchſchnitts-Figuren AXYN, BECG, Querſchnitte des Fluſſes (73 §.). Die Ebene der Oefnung AODN ſey vertical, und ſie ſelbſt ſey ein Rechteck, ſo daß AO und ND vertical ſind, und die erweiter-

weiterten Seitenflächen des Canals durch AO und ND gehen. Die Ebene ASTN ſey horizontal, ſo iſt AN auf AB und AS ſenkrecht, folglich BAS der Grundfläche des Canals Neigungswinkel gegen den Horizont.

84 §.

Es ſey Bl vertical, und ſchneide AS in l, ſo iſt Bl das Gefälle des Fluſſes. Setzt man $BAS = \eta$, ſo wird $Bl = AB \sin\eta$, und das Gefälle iſt für die gegebene Entfernung AB vom erſten Querſchnitt AXYN bekannt, wenn der Neigungswinkel η bekannt iſt. Wenn nun die zunächſt am Boden befindlichen Waſſertheilchen im erſten Querſchnitt bey AN ihre Bewegung von der Ruhe anfingen, und hiernächſt nach den Geſetzen des Falles ſchwerer Körper auf der ſchiefen Ebene ABGN herunter giengen; ſo wäre ihre Geſchwindigkeit, in dem Augenblick, da ſie in BG anlangen, $= 2\sqrt{g \,.\, Bl}$ (64 §. Mechan.). Wenn aber AO die Höhe des Waſſers im Behälter $abcd$ iſt; ſo treten ſie durch AN mit einer Geſchwindigkeit in den Canal hinein, die der Höhe $\mu \,.\, AO$ zugehört (75 §.). Folglich laufen ſie durch BG mit einer der Höhe $\mu \,.\, AO + Bl$ zugehörigen Geſchwindigkeit. In der Seitenfläche AOEB ziehe man OV horizontal, und BE verlängert, ſchneide dieſe Horizontallinie in V. Ferner ſey EK vertical, ſo iſt EK das Gefälle des Fluſſes an ſeiner Oberfläche. Die durch OD in den Canal eintretenden Waſſertheilchen fangen ihre Bewegung von der Ruhe an, folglich gehört die Geſchwindigkeit der in der Oberfläche des Fluſſes durch EC laufenden Waſſertheilchen der Höhe EK zu, ſie mögen übrigens in einem graden oder gekrümmten Wege von OD nach EC laufen (132 §. Mech.)

85 §.

Es ſey nun Pp mit BG parallel, ſo laufen alle Waſſertheilchen durch Pp mit einerley Geſchwindigkeit, und die ihr zugehörige Höhe müſte man ſo ſuchen. Der jetzt in P befindliche Punct ſey beym Durchgang durch die Oefnung ANDO in Π geweſen, und man ziehe ΠQ horizontal, Pk vertical; ſo iſt P um die Tiefe $Pk = PQ \cos\eta$ gefallen, wenn η wie vorhin den Neigungswinkel des Grundes gegen den Horizont bedeutet. Aber in Π trat eben dieſer Punct mit einer Geſchwindigkeit ein, die der Höhe $\mu O\Pi = \mu . VQ \cos\eta$ zugehört: demnach gehört die Geſchwindigkeit des durch P laufenden Puncts der Höhe $\mu . VQ \cos\eta + PQ \cos\eta$. Weil nun $PQ = VP - VQ$, ſo wird eben dieſe Höhe $= ((\mu - 1) VQ + VP) \cos\eta$. Man ziehe PM mit AB parallel, alſo auf VP ſenkrecht, und es ſey $PM = y$ die zugehörige Geſchwindigkeit; ſo hat man $yy = ((\mu - 1) VQ + VP) 4g \cos\eta$. Um nun eine Gleichung zwiſchen $VP = x$ und $PM = y$, zu haben, müſte man VQ durch VP und beſtändige Gröſſen ausdrücken können. Ich ſehe aber nicht, wie ſich eine ſolche Gleichung zwiſchen VQ und VP finden lieſſe, und deswegen weiß ich auch keine Gleichung zwiſchen VP und PM anzugeben, ohne nur in dem Fall, wenn man $\mu = 1$ ſetzt. Alsdenn iſt $yy = 4g . VP . \cos\eta$. Bey dieſer Vorausſetzung tritt das Waſſertheilchen P durch Π mit einer Geſchwindigkeit, die der Höhe $O\Pi = VQ \cos\eta$ zugehört, und indem es in P kommt, iſt es noch um die Höhe $Pk = QP \cos\eta$ gefalleu: deswegen gehört ſeine Geſchwindigkeit der Höhe $(VQ + QP) \cos\eta = VP \cos\eta$.

86 §.

Bey der angenommenen Vorausſetzung $\mu = 1$ die Menge Waſſer zu finden, die in einer Secunde durch den Querſchnitt *BECG* des geneigten Canals läuft.

Aufl. Wenn man VP = x ſetzt, ſo ſiehet man wohl, daß die Gleichung $yy = 4gx \operatorname{cof}_\eta$ (85 §.) einer Parabel gehöre, deren Parameter = $4g \operatorname{cof}_\eta$ iſt. Es ſey VHMF dieſe Parabel, und EH, BF, ſo wie PM auf VB ſenkrecht; ſo erhellet wie im 76 und 82 §., daß die in einer Secunde durch den Querſchnitt BECG laufende Waſſermenge einen paraboliſch-prismatiſchen Körper fülle, deſſen ebene Grundfläche BEHF, und Höhe BG iſt. Es iſt aber die Grundfläche BEHF = BVHF − EVH = $\frac{2}{3}$(BV . BF − EV . EH), folglich die Menge des durchflieſſenden Waſſers = $\frac{2}{3}$ BG . (BV . BF − EV . EH). Setzt man nun BL = a, EK = α; ſo hat man BV = $\frac{a}{\operatorname{cof}_\eta}$, EV = $\frac{\alpha}{\operatorname{cof}_\eta}$.
Ferner ſey BG = b, BF = c, EH = k, die Menge des in einer Secunde durchflieſſenden Waſſers = M; ſo iſt M = $\frac{2}{3} b \cdot \frac{ac - \alpha k}{\operatorname{cof}_\eta}$. Weil überdem $c = 2\sqrt{g} . \text{VB} \operatorname{cof}_\eta = 2\sqrt{ga}$, und $k = 2\sqrt{g} . \text{VE} : \operatorname{cof}_\eta = 2\sqrt{g\alpha}$; ſo wird auch M = $\frac{2}{3} b . \frac{a\sqrt{a} - \alpha\sqrt{\alpha}}{\operatorname{cof}_\eta} . 2\sqrt{g}$.

Wenn man die gefundene Waſſermenge M = $\frac{2}{3}$ BG (BV . BF − EV . EH) durch die Fläche des Querſchnitts BG (BV − EV) dividirt; ſo erhält man die mittlere Geſchwindigkeit = $\frac{2}{3} . \frac{\text{BV.BF} - \text{EV.EH}}{\text{BV} - \text{EV}}$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{a} - \alpha\sqrt{\alpha}}{a - \alpha} \cdot 2\sqrt{g}$, und die zugehörige Höhe $= \frac{4}{9} \cdot \frac{(a\sqrt{a} - \alpha\sqrt{\alpha})^2}{(a - \alpha)^2} \cdot 4g$. Nimmt man alſo $VP = \frac{4}{9} \cdot \frac{(a\sqrt{a} - \alpha\sqrt{\alpha})^2}{(a - \alpha)^2 \cos\eta} \cdot 4g$, und ziehet Pp in der Ebene des Querſchnitts horizontal; ſo laufen die Waſſertheilchen durch Pp mit der mittlern Geſchwindigkeit.

87 §.

Wenn der gegen den Horizont geneigte Canal durchgängig gleich breit, und das durchflieſſende Waſſer im Beharrungsſtande iſt, ſo nehmen die Höhen der Querſchnitte deſto mehr ab, je weiter der Fluß ſich von ſeinem Urſprung entfernt, und die Geſchwindigkeiten an der Oberfläche und am Grunde nähern ſich deſto mehr der Gleichheit.

Bew. Weil der Fluß im Beharrungsſtande iſt, ſo flieſt in jeder Secunde durch jeden Querſchnitt einerley Menge Waſſer. Demnach muß der Ausdruck $M = \frac{2}{3}b \cdot \frac{a\sqrt{a} - \alpha\sqrt{\alpha}}{\cos\eta} \cdot 2\sqrt{g}$ einerley Waſſermenge geben, der Querſchnitt EBGC mag wo man will angenommen werden. Aber je gröſſer AB wird, deſto gröſſer werden a und α. Demnach müſſen ſich a und α ſo ändern, daß $a\sqrt{a} - \alpha\sqrt{\alpha}$ eine beſtändige Gröſſe bleibt. Es iſt aber $a\sqrt{a} - \alpha\sqrt{\alpha} =$

$$a\sqrt{a}\left(1 - \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{a\sqrt{a}}\right) = a^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\right), \text{ und}$$

der

der Factor $a^{\frac{3}{2}}$ wächſt mit a, folglich muß der andre Factor $1 - \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$ abnehmen; und wenn dies letztere geſchehen ſoll, ſo muß der Bruch $\frac{\alpha}{a}$ wachſen. Dies erfordert, daß α und a, weil beyde zugleich wachſen, einander immer näher kommen, folglich auch $2\sqrt{ga}$ und $2\sqrt{g\alpha}$, als die Geſchwindigkeiten am Grunde und an der Oberfläche. Daraus fließt ferner, daß auch $\frac{a-\alpha}{\cos\eta} = BE$ abnehmen müſſe, weil $a - \alpha$ abnimmt.

Weil $a - \alpha = BE \cos\eta$, alſo $\alpha = a - BE \cos\eta$; ſo iſt $\frac{\alpha}{a} = 1 - \frac{BE \cos\eta}{a}$. Daraus flieſt noch der beſondre Satz, daß die Geſchwindigkeiten an der Oberfläche und am Grunde des Fluſſes in jedem Querſchnitt deſto weniger von einander unterſchieden ſind, je gröſſer der Winkel η iſt; denn deſto kleiner iſt $\cos\eta$.

Wenn die Breite des Fluſſes gröſſer würde, und derſelbe doch im Beharrungsſtande bliebe, ſo würde die Höhe des Querſchnitts durch B noch kleiner als BE ſeyn müſſen, alſo würden α und a ſich noch um ſo mehr der Gleichheit nähern.

88 §.

Die Höhe des erſten Querſchnitts $AXYN$ zu finden, wenn die Höhe des Waſſers im Behälter und der Neigungswinkel des Canals gegen den Horizont gegeben ſind.

Aufl.

Aufl. Weil angenommen wird, daß der Fluß im Beharrungsſtande ſey; ſo ſind die Mengen Waſſer gleich, die in gegebener Zeit durch die Oefnungen AODN und AXYN laufen. Aber in einer Secunde läuft durch AODN die Menge $\frac{4}{3}ba\sqrt{ag}$ (79 §.), weil hier $\mu = 1$ angenommea wird: und durch jeden Querſchnitt des Canals die Menge = 12 Fig.

$\frac{4}{3}b \cdot \frac{a\sqrt{a} - \alpha\sqrt{\alpha}}{\cos\eta}\sqrt{g}$ (86 §.) Es ſey XZ auf AO ſenkrecht, und $AO = f$, $AX = h$; ſo iſt $OZ = f - h\cos\eta$. Was nun in dem allgemeinen Ausdruck a und α iſt, das iſt hier für den erſten Querſchnitt f und $f - h\cos\eta$. Braucht man dieſe Werthe, und ſetzt beyde Waſſermengen gleich; ſo wird

$$f\sqrt{f} - (f - h\cos\eta)\sqrt{(f - h\cos\eta)} = f\cos\eta\sqrt{f},$$

oder $f^{\frac{3}{2}} - (f - h\cos\eta)^{\frac{3}{2}} = f^{\frac{3}{2}}\cos\eta$.

Daraus folgt $f^{\frac{3}{2}}(1 - \cos\eta) = (f - h\cos\eta)^{\frac{3}{2}}$,

alſo ferner $f(1 - \cos\eta)^{\frac{2}{3}} = f - h\cos\eta$,

dies giebt $h = \frac{f(1 - (1 - \cos\eta)^{\frac{2}{3}})}{\cos\eta}$.

89 §.

Die Höhe eines jeden Querſchnitts *BECG* zu finden, deſſen Entfernung *AB* vom erſten Querſchnitt gegeben iſt: vorausgeſetzt, daß der Fluß im Beharrungsſtande ſey, und immer gleich breit bleibe.

Aufl. Die durch den erſten Querſchnitt laufende Waſſermenge iſt $\frac{4}{3}b \cdot \frac{f^{\frac{3}{2}}(f - h\cos\eta)^{\frac{3}{2}}}{\cos\eta}\sqrt{g}$; und

durch BECG läuft die Menge $\frac{4}{3}b \cdot \frac{a - \alpha^{\frac{3}{2}}}{\cos\eta} \sqrt{g}$.

Weil beyde gleich ſind, ſo erhält man

$$f^{\frac{3}{2}} - (f - h\cos\eta)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}}.$$

Kürze halber ſetze man $f^{\frac{3}{2}} - (f - h\cos\eta)^{\frac{3}{2}} = \mathrm{H}$, ſo wird $\alpha^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} - \mathrm{H}$, und $\alpha = (a^{\frac{3}{2}} - \mathrm{H})^{\frac{2}{3}}$. In dieſem Ausdruck iſt $a = \mathrm{BL} = \mathrm{AO} + \mathrm{B}l = f + \mathrm{AB}\sin\eta$ bekannt. Ueberdem iſt $\alpha = \mathrm{EK} = a - \mathrm{BE}\cos\eta$, und dies ſtatt α geſetzt, giebt $\mathrm{BE}\cos\eta = a - (a^{\frac{3}{2}} - \mathrm{H})^{\frac{2}{3}}$, folglich wird die geſuchte Höhe

$$\mathrm{BE} = \frac{a - (a^{\frac{3}{2}} - \mathrm{H})^{\frac{2}{3}}}{\cos\eta}.$$

90 §.

Auſſer der Geſchwindigkeit, womit das Waſſer in einem Canal fortflieſſet, würde nun noch der Druck des Waſſers gegen die Seitenflächen des Canals, die Ufer, eine beſondere Unterſuchung verdienen. In der Vorausſetzung, daß das Waſſer im Canal ruhig ſey, läſt ſich dieſer Druck nach den Regeln des 9 §. Hydroſt. berechnen. Wenn das Waſſer aber nach der Richtung des Canals fortläuft, ſo iſt der Druck gegen die Ufer etwas geringer, als er ſeyn würde, wenn das Waſſer nicht in Bewegung wäre. Die Berechnung dieſes Drucks findet ihre Anwendung bey Anlegung der ſogenannten Deiche oder Dämme und anderer Uferbefeſtigungen: und weil man dabey eine zulängliche Sicherheit ſucht, ſo pflegte man den Druck dagegen eben ſo zu berechnen, als wenn das Waſſer

in Ruhe wäre. Bey natürlichen Flüſſen leiden die Ufer, auſſer dieſem Druck, auch ſonſt noch mehr Gewalt. Weil ihre Geſtalt ſehr irregulär iſt, ſo ſtößt das Waſſer, wenn es ſchnell ſtrömt, mit groſſer Stärke gegen die dem Strom im Wege liegenden Theile: und man ſieht leicht, daß die Gewalt dieſes Stoſſes deſto gröſſer ſeyn müſſe, je gröſſer die Geſchwindigkeit des Stroms iſt. Je höher dabey das Waſſer ſteigt, deſto ſtärker iſt der vorhin erwehnte hydroſtatiſche Druck. Daher wird begreiflich, woher es komme, daß hohe Fluthen in ſchnellen Strömen oft ſo groſſe Verheerungen der Ufer anrichten.

91 §.

Man betrachtet auch die **natürlichen Flüſſe** auf der Erde gewöhnlich nur als offene Canäle, in welchen das Waſſer vermittelſt eines beſtändigen Gefälles fortläuft, bis es ſich endlich durch das äuſſerſte Ende dieſes Canals, welches die **Mündung** des Fluſſes heiſt, in die See, oder ſonſt wohin, ergieſt. Allein dies iſt es nur, was bey einem Strom unmittelbar in die Augen fällt. Jeder einigermaſſen beträchtliche Strom iſt vielmehr eine See, deren gröſter Theil längſt den Ufern hinab unter der Erde verborgen liegt, und der offene Fluß iſt nur der Canal des Ab- und Zufluſſes. Gewöhnlich haben die Strombetten einen ſandigen Grund, in welchen das Waſſer ſehr tief nach allen Seiten eindringt, ſo, daß dadurch die umliegenden Gegenden unter der Erde zu beyden Seiten des Ufers, ſo weit ſich der lockere Sand erſtreckt, bis auf eben die Höhe, worauf das Stromwaſſer ſteigt, wie ein Schwamm mit Waſſer angefüllet werden. Wenn dies ein ſehr grober Kiesſand iſt, ſo wird der-

ſelbe eine groſſe Menge Waſſer faſſen, und aus einer ſolchen unterirrdiſchen Sandlage, oder Bank, wie man ſie gewöhnlich nennt, wird das Waſſer mit groſſer Gewalt hervorbrechen, wenn ſie tiefer liegt, als die Oberfläche des nahe gelegenen Stroms, und man beym Brunnengraben und ähnlichen Arbeiten darauf geräth. Man ſ. hievon Hrn. Silberſchlags Preisſchrift vom Waſſerbau an Strömen. Leipzig 1756. 1 Cap. 1 - 8 §.

92 §.

Dieſe unterirrdiſchen Waſſerbehälter ſind die Urſache vieler ſonſt ſonderbar ſcheinender Begebenheiten bey den Strömen. Oft ſteigt das Waſſer oberwärts des Stroms wegen vieler und ſtarker Regengüſſe und anderer Urſachen, und deswegen ſollte das Waſſer längſt des ganzen Canals ebenfalls ſteigen. Dem ungeachtet merkt man dies zuweilen unterhalb des Stroms gar nicht, oder nur allererſt viele Tage nachher, da es doch nach den Geſetzen des Falles ſchwerer Körper viel früher erfolgen ſollte. Dies könnte nicht ſeyn, wenn das Waſſer nicht im Vorbeyzuge von dem unterirrdiſchen Sande verſchlungen würde. Je tiefer vorher der Strom gefallen war, und je mehr daher die im Sande verborgenen Waſſerbehälter ausgetrocknet waren, deſto langſamer muß ſich der Ueberfluß des Gewäſſers fortbewegen. Man führet an den Ufern der Ströme, die zu Zeiten ſo hoch anſchwellen, daß das Waſſer über die natürlichen Ufer ſteigt, Wälle von Erde, die ſo genannten Dämme oder Deiche auf, um dadurch die umliegenden Gegenden gegen Ueberſchwemmungen zu ſchützen. Aber der Strom bricht dennoch oft hinter den Dämmen aus dem Grunde

hervor,

hervor, welches ein deutlicher Beweis iſt, daß ſich das Waſſer des Stroms weit unter der Erde fort erſtrecke. Von eben dieſen unterirrdiſchen Waſſerbehältern rührt es her, daß ein ſchnell fallender Strom den Ufern und umliegenden Gegenden eben ſo ſchädlich, als eine ſchnelle Fluth werden kann. Das Waſſer, womit noch ganze Felder, die an den Ufern gränzen, angefüllt ſind, dringt von allen Seiten her in den Strom zurück, und nimmt ganze Lagen Sand mit ſich fort. Hiedurch werden die Ufer untergehölet, und müſſen einſtürzen. Die Oberfläche der benachbarten Gegenden ſenket ſich allmählig, weil ihr der Grund entzogen wird, und der Sand, welcher in dem Strom nach und nach niederfällt, erhöhet das Flußbette, und ſetzet ſich an manchen Stellen ſo häufig auf einander, daß Inſeln daraus werden.

Man ſiehet hieraus, daß kein natürlicher Strom in der Welt ſey, deſſen Geſchwindigkeit ſich nach theoretiſchen Regeln genau berechnen laſſe. Indeſſen läſt ſich überhaupt unterſuchen, unter welchen Umſtänden der Strom ſchneller oder langſamer flieſſen, ſteigen oder fallen werde, wenn man blos die Geſtalt des Strombettes und der Ufer in Betrachtung ziehet.

93 §.

Die Ufer ſind ebene, verticale und parallele Flächen, das Grundbette aber iſt eine gebrochene Fläche, wovon die ebenen Stücke insgeſammt auf den Ufern ſenkrecht ſind: man ſoll die Umſtände finden, unter welchen der Strom ſchneller oder langſamer flieſſen, ſteigen oder fallen wird.

13 Fig. Aufl. Es ſtelle ACEFGOM eine verticale mit den Seitenflächen parallele Durchſchnittsfigur des Canals vor, ſo wird die gebrochene Linie ACEFG der Durchſchnitt mit dem Grundbette ſeyn. Wäre dies eine grade Linie, ſo hätte das Waſſer in G die Geſchwindigkeit, die ein ſchwerer Körper durch den Fall von der Höhe GH erlangt, wenn *h*H die urſprüngliche Horizontallinie iſt, diejenige nämlich, welche OV im 85 §. war. Allein nun kann die Geſchwindigkeit ſo groß nicht ſeyn, weil das Waſſer bey jedem Winkel, wie E, F, einen Theil der ſchon erlangten Geſchwindigkeit verliert (118 §. Mechan.). Wäre ACE eine grade Linie, und ES = 4CR, ſo liefe das Waſſer in E nochmahl ſo geſchwind, als in C, und man könnte nach dem 89 §. berechnen, wie tief der Fluß bey E ſeyn müſte. Weicht CE noch mehr als AC von der Horizontallinie ab, ſo werden die Querſchnitte des Waſſers bey C anfangen, merklicher abzunehmen, weil von dieſer Stelle die Geſchwindigkeit ſchneller zunimmt, als bisher. Nun ſollte das Waſſer in E eigentlich die der Höhe ES zugehörige Geſchwindigkeit haben. Weil aber das Bette bey E ſo gebrochen iſt, daß EF nicht ſo viel als CE von der Horizontallinie abweicht, ſo muß das Waſſer, indem es an E anſtößt, einen Theil ſeiner Geſchwindigkeit verlieren (118 §. Mechan.). Wenn die Geſchwindigkeit c der Höhe ES zugehört, und der Winkel FEK $= \alpha$ iſt, ſo läuft das Waſſer mit der Geſchwindigkeit $c - c\,\text{ſin}v\alpha$ über E weg; wegen der vou A bis E beſtändig zunehmenden Geſchwindigkeit ſollte nun das Waſſer deſto mehr fallen, je weiter es nach E kommt, und in E ſollte es am niedrigſten ſtehen. Weil hier aber von der ſchon erlang-

langten Geſchwindigkeit c auf einmahl wieder der Theil $c - c \sin v\alpha$ abgehet, ſo muß das Waſſer bey E aufſchwellen und dem nachfolgenden Waſſer hinderlich fallen, daß es die der Höhe SE zugehörige Geſchwindigkeit nicht völlig erreicht, auch an einer zwiſchen C und E liegenden Stelle, etwa bey P am ſchnelleſten läuft, und zugleich daſelbſt am niedrigſten ſtehet.

Eben der Fall ereignet ſich bey F, der Strom verliert daſelſt einen Theil ſeiner Geſchwindigkeit, der durch den Fall auf EF wieder zugenommen hatte. Gegen F zu fällt alſo der Strom wieder, muß aber nicht weit von F in der Gegend Q wieder anfangen aufzuſchwellen. Liegt nun FG horizontal, ſo bleibt die Geſchwindigkeit, alſo auch die Tieſe des Stroms auf dieſer Strecke einerley: wenn ſich aber FG ebenfalls gegen G zu ſenkt, ſo wächſt die Geſchwindigkeit aufs neue u ſ. f. Ich bemerke hiebey, daß der Kürze wegen nur die Geſchwindigkeit der am Grunde fortlaufenden Waſſertheilchen ſey in Betrachtung gezogen worden. Man ſiehet wohl, daß mit den Geſchwindigkeiten der in höhern Stellen laufenden Waſſertheilchen ebenfalls ſchleunige Aenderungen vorgehen müſſen, wenn ſie in die Gegenden über C, E, F, G, kommen. Genauere Beſtimmungen verſtatten die hiemit verbundenen Schwierigkeiten nicht.

94 §.

Dieſe Betrachtungen dienen einigermaſſen davon zu urtheilen, wie weit die Ungleichheiten des Grundbettes natürlicher Ströme in ihrer Geſchwindigkeit Aenderungen verurſachen können. Es ſey die krumme Linie ABCDEFLG die Durchſchnittsfigur des Grundbettes mit einer den Ufern parallelen Verticalfläche,

fläche, ſo, daß C, D, E, F, G, Untiefen ſind. Die höchſten Stellen dieſer Untiefen ziehe man mit graden Linien AC, CE, EF, FG, zuſammen, und übergehe dabey diejenigen, welche niedriger, als die nächſtfolgenden liegen, dergleichen D iſt. Nun erhellet leicht, daß der Strom auf dem gebrochenen Bette ACEFG eben ſo fortlaufen würde, wie er auf dem krummen Bette ABCDEFLG läuft. Das Waſſer, was von A nach B geſunken iſt, läuft nicht wieder von B nach C hinauf. Es läuft nicht über C hinüber, bevor das baſſin ABC angefüllet iſt, und ſoviel Waſſer, als dies baſſin faſſet, bleibet in demſelben ruhig ſtehen. Das übrige läuft auf AC, wie auf einer ebenen Fläche herab. Eben ſo verhält es ſich mit dem baſſin CDE, wobey D für keine Untiefe zu rechnen iſt, weil, wenn man gleich CD und DE ziehen wollte, auch in dem gebrochenen Bette ein baſſin entſtehen würde, daß ſich mit ſtehendem Waſſer anfüllte. Der Strom wird alſo bey jeder ſolchen Untiefe, wie C, merklich ſchneller, die über der graden Linie, welche zwiſchen der vorhergehenden und nachfolgenden fällt, hervorragt: bey andern aber, wie E, die unter der erwähnten Linie liegen, wird der Strom merklich langſamer.

Hr. Silberſchlag handelt hievon in ſeiner Abhandlung vom Waſſerbau an Strömen, im 20 bis 24 §. des Theoret. Th. Das bisherige wird ſeinen Vortrag erläutern, und zugleich einige theoretiſche Unrichtigkeiten verbeſſern. So verhalten ſich nämlich die Geſchwindigkeiten der Ströme an verſchiedenen Orten nicht wie ihr Gefälle, wie es im 20 §. heiſt; ſondern wie die Quadratwurzeln dieſes Gefälles. Daher iſt der Strom auch nicht in E nochmahl ſo ſchnell, als in C, wenn das Gefälle ES nochmahl

ſo

ſo groß, als CR, ſondern alsdann allererſt, wenn ES = 4CR iſt. Auch kann man nicht ſagen, das Waſſer laufe von C bis E noch mahl ſo geſchwinde, als von A bis C, wenn gleich ES = 4CR wäre. Nur allererſt bey E würde die Geſchwindigkeit doppelt ſo groß, als bey C ſeyn: denn der Lauf des Waſſers wird nach und nach ſchneller, und iſt nicht gleich in C ſo ſchnell, als dem Gefälle ES gemäß iſt. Hr. Silberſchlag ſcheint anzunehmen, daß alles Waſſer in einerley Querſchnitt gleich ſchnell laufe: denn nur alsdenn würden ſich die Höhen der Querſchnitte bey gleicher Breite umgekehrt wie die Geſchwindigkeiten verhalten. M. ſ. a. a. O. den 23 §.

95 §.

Wenn die Ungleichheiten des Grundbettes bey Seite geſetzt werden, die Umſtände zu finden, unter welchen der Strom wegen der Ungleichheiten der Ufer ſchneller oder langſamer laufen, ſteigen oder fallen muß.

Aufl. Es ſey AEHD ein Stück des Stroms, 14 Fig.
wovon die Stellen zwiſchen A uud E, B und F, C und G, D und H merklich enger, als die übrigen dazwiſchen liegenden ſind. Dieſe Stromengen ſind es eigentlich nur, die hier in Betrachtung gezogen werden müſſen, wenn man die Ungleichheiten des Grundes beyſeit ſetzet. Wenn nämlich die graden Linien AE, BF, die Breite der Stromengen ſind, und man ziehet auch AB, EF; ſo hat man die eigentlichen Gränzen des fortlaufenden Waſſers zwiſchen beyden Stromengen. Alles übrige Ufer AKLB, AMNF, mag geſtaltet ſeyn, wie es wolle, ſo wird es dennoch in die Geſchwindigkeit des dazwiſchen lau-

ſenden Waſſers keinen Einfluß haben: doch muß alles auswärts der Gränzen AB und EF liegen. Sind nun ein paar zunächſt nach einander folgende Stromengen, wie AE und BF, von gleicher Weite; ſo richtet ſich die Schnelligkeit des Laufs blos nach der Beſchaffenheit des Grundbettes. Wenn aber die untere Stromenge CG weiter als die obere BF iſt; ſo wird im Beharrungsſtande des Fluſſes das Waſſer in der untern Stromenge niedriger ſeyn, als in der obern; und weil daher die Oberfläche des Waſſers mehr Neigung gegen den Horizont bekommt, ſo wird aus eben der Urſache das Waſſer gegen CG zu ſchneller flieſſen. Umgekehrt aber verhält es ſich, wenn die untere Stromenge DH enger, als die obere CG iſt.

96 §.

Hiebey iſt noch vorausgeſetzt worden, daß der Strom nach einer graden Richtung fortlaufe, oder doch wenigſtens ſeine eigentliche Bahn ſich nicht ſonderlich krümme. Allein, bey den natürlichen Flüſſen hat auch dieſe Vorausſetzung nicht ſtatt: der Strom ändert häufig ſeine Richtung, und dies am ſtärkſten, einmahl bey ſolchen Stromengen, deren Gränzen einander ſchräge gegen über liegen, ſo, daß die grade Linie zwiſchen beyden Gränzen mit der Richtung des Stroms oberhalb der Stromenge einen ſchieſen Winkel macht; hiernächſt aber auch da, wo ſich beträchtliche Krümmungen des Ufers finden. Liegen die äuſſerſten Uferſpitzen einer Stromenge grade gegen einander, wie B und F, ſo daß die grade Linie BF die Richtung des Stroms oberhalb der Stromenge von AE bis BF ſenkrecht ſchneidet; ſo

geht

geht keine Änderung in der Richtung des Stroms vor. Liegen aber die Uferſpitzen, wie P und Q, einander ſchräge gegen über, ſo verhält es ſich anders. Das nach der Richtung DP gegen P laufende Waſſer verliert einen Theil ſeiner Geſchwindigkeit. Man kann nemlich dieſe Geſchwindigkeit in zwo andre auf das Ufer in P ſenkrecht und damit parallel zerlegen, ſo ergiebt ſich, daß das Waſſer mit der letztern nach PR fortgehe. Daß der Anſtoß-Winkel dem Zurückwerfungs-Winkel gleich ſey, wie Herr Silberſchlag ſagt, a. a. O. 33 §., getraue ich mir nicht zu behaupten. Auch die Zerlegung der Geſchwindigkeit in die ſenkrechte und parallele nach PR dient nur einigermaſſen davon zu urtheilen, was das Waſſer für einen Weg nehmen werde. Wegen der mannigfaltigen Würkungen der Waſſertheilchen in einander, leiden dieſe Schlüſſe ſtarke Einſchränkungen. Will man ſich indeſſen an dieſe Vorſtellung halten, ſo wird nach eben der Regel das nach HQ laufende Waſſer nach QS zurück ſtrömen. Wenn nun PR und QS einander in V ſchneiden, ſo wird aus beyden Bewegungen eine mittlere nach VX entſtehen: wenigſtens läſt ſich auf dieſe Art einigermaſſen beurtheilen, welchen Zug der Strom vornemlich nehmen werde. Denn ſonſt iſt es wegen der eben erwehnten Urſachen wohl nicht verſtattet, die Lehre von Zuſammenſetzung der Bewegungen hier ſo ſchlechthin anzuwenden. Stößt dieſer Stromſtrich VX bey X abermahl gegen das Ufer, ſo wird er ſich nach XY wenden, u. ſ. f.

97 §.

Man findet bey den practiſchen Schriftſtellern verſchiedene Vorſchläge, wie die Geſchwindigkeit eines

Fluſſes an einer gegebenen Stelle durch Verſuche gefunden werden könne. Mariotte im Traité du mouvement des eaux III Partie IV Diſcours p. 297. ſchreibt vor, man ſoll auf die Oberfläche des Waſſers eine Wachskugel legen, womit ſo viel Bley oder ſonſt ſchwere Materie vermengt worden, daß nur ein kleiner Theil von ihr über dem Waſſer hervorrage. Dieſe Kugel wird der Strom mit ſich fortführen, und ein mäßiger Wind wird ihre Bewegung nicht ſonderlich ſtören, dafern er anders nicht ſo ſtark iſt, daß er ungeſtüme Wellen erregt. Wenn man nun durch Hülfe einer Uhr bemerkt, wie groß der Weg ſey, den die Kugel in einer gewiſſen Zeit zurück leget, ſo iſt es leicht, daraus ihre und zugleich des Stroms Geſchwindigkeit zu finden. Hr. Silberſchlag in der Abh. vom Waſſerbau an Strömen im III Cap. 18 §. 19 S. giebt eine ähnliche Vorſchrift. Indeſſen iſt hiebey zu bemerken, daß auf ſolche Art nur die Geſchwindigkeit des nahe an der Oberfläche befindlichen Waſſers gefunden werde, und davon auf die Geſchwindigkeit des in mehrerer Tiefe laufenden Waſſers kein Schluß zu machen ſey. Wie denn auch, wenn alles genau genommen werden ſollte, darauf Rückſicht genommen werden müſte, daß die aufs Waſſer gelegte Kugel ihre Bewegung von der Ruhe anfängt, und nicht gleich zu Anfange mit dem Strom einerley Geſchwindigkeit hat. Andre Methoden, die Geſchwindigkeit des Waſſers auch in gröſſerer Tiefe zu finden, werden in der Folge vorkommen.

Der

Der VI. Abſchnitt.

Vom Stoß des Strom=Rinnen und Röhrwaſſers an feſte Körper.

98 §.

Das in dem Canal oder Gerinne *ABCD* nach der Richtung *AD* fortſtrömende Waſſer ſtößt ſenkrecht gegen die ebene Fläche *EF*, und die Gröſſe des ſenkrechten Querſchnitts *CD* des anſchlagenden Strom=Waſſers nebſt ſeiner Geſchwindigkeit iſt gegeben: man ſucht die Stärke des Drucks gegen die Ebene *EF*, vorausgeſetzt, daß alle in jedem Querſchnitt befindliche Waſſertheilchen mit gleicher Geſchwindigkeit nach parallelen Richtungen anſtoſſen. 15 Fig.

Aufl. Es ſey des anſchlagenden Waſſers Geſchwindigkeit $= c$, die ihre zugehörige Höhe $= v$, und der Querſchnitt des Stroms CD $= zz$; der geſuchte Druck $=$ P. Wenn nun das Waſſer im Canal völlig ruhig ſtünde, und dagegen die ebene Fläche CD mit paralleler Bewegung und eben der Geſchwindigkeit c nach der grade entgegen geſetzten Richtung DA fortgienge; ſo würde der Widerſtand, den ſie litte, eben ſo groß ſeyn, als der Druck des gegen die ruhende Ebene ſtrömenden Waſſers iſt. Aber jener Widerſtand wäre dem Druck einer Waſſerſäule in der Höhe v auf der Grundfläche CD gleich (301 §. Mech.). Demnach iſt der geſuchte Druck $P = \gamma v z z$, wenn γ das Gewicht eines Cubicfuſſes Waſſer iſt.

Es

Es ſey A die Menge Waſſer, die der Canal in einer Secunde ſchüttet, ſo iſt $A = c \, . \, zz$, oder auch $A = 2zz\sqrt{gv}$, weil $c = 2\sqrt{gv}$ (32 §. Mech.), alſo

$$zz = \frac{A}{c} = \frac{A}{2\sqrt{gv}}, \text{ und } P = \tfrac{1}{2}\gamma A \sqrt{\frac{v}{g}}.$$

Dieſe Formul drückt demnach die Gewalt des Stoſſes durch das Gewicht des in einer Secunde anſchlagenden Waſſers, und ſeine Geſchwindigkeit aus. Sie iſt dem Product dieſes Gewichts in die Geſchwindigkeit proportional. Wollte man nemlich c ſtatt v in der Rechnung brauchen; ſo hätte man

$$\sqrt{\frac{v}{g}} = \frac{c}{2g}, \text{ und } P = \frac{\gamma \, . \, A \, . \, c}{4g}.$$

99 §.

Die Richtigkeit der gefundenen Gleichung beruhet auf die Richtigkeit der im 301 §. Mechan. feſtgeſetzten Regel, den Widerſtand zu berechnen. Wenn man aber bis auf die Schlüſſe des 300 §. Mechan. zurück gehet, ſo ſiehet man wohl, daß dieſe Beſtimmung der Stärke des Waſſerſtoſſes nicht die ſicherſte ſeyn würde, wenn nicht die Verſuche, welche beym Vortrag der Lehre vom Widerſtande angeführt ſind, den Satz des 301 §. Mechan. rechtfertigten. Man vergleiche hiemit den 325. 327. 328 §. Mech. Beyde Theorien vom Stoß flüßiger Maſſen gegen feſte Körper, und vom Widerſtande, den feſte Körper leiden, die ſich im flüßigen bewegen, ſind mit einander, wie man nun überſehen kann, ſo genau verbunden, daß allemahl die eine mit zur Richtigkeit gebracht iſt, wenn man die andre in ihr gehöriges Licht geſetzt hat. Dies hat eine Menge von Unterſuchun-

ſuchungen ſowohl über die eine, als auch über die andere Theorie veranlaſſet: man iſt aber bisher noch nicht ſo weit gekommen, daß alle Zweifel gehoben wären. Vermöge einer theoretiſchen Unterſuchung, die Hr. Euler in Robins Erläuterter Artillerie 458-463 S. anſtellt, wäre der Stoß des Waſſers dem Druck einer Waſſerſäule auf der Grundfläche CD in der Höhe $2v$ gleich. Eben daſſelbe findet H. Daniel Bernoulli in der Hydrod. Sect. XIII. §. 16. Er verſpricht daſelbſt im 19 §. 293 S. ſeine Theorie hievon in einer beſondern Abhandl. vollſtändiger vorzutragen, die für die Comment. Acad. Scient. Petrop. beſtimmt ſey. Vermuthlich iſt es die Abhandlung: Diſſ. de legibus quibusdam mechanicis nondum deſcriptis, in den Comment. Petrop. T. VIII. pag. 113. Die Kürze, worin ich mich beym gegenwärtigen Vortrag der Hydraulik einſchränken muß, erlaubet mir nicht, mich in alle theoretiſche Schwierigkeiten umſtändlich einzulaſſen, beſonders in ſolche, zu deren völligen Hebung wenig Hofnung iſt. Deswegen zeige ich nur kurz den Haupt-Umſtand an, worauf die Rechnungen beyder erwehnten Schriftſteller beruhen. H. Hofr. Käſtner hat ſie in ſeiner Hydrodynamik 327 bis 331 §. 267 bis 287 §. ausführlich auseinander geſetzt, und erläutert. Wenn die Ebene EF gröſſer, als der ſenkrechte Querſchnitt CD des anſchlagenden Waſſers iſt; ſo vermehrt das an allen Seiten abflieſſende Waſſer, indem es von ſeiner urſprünglichen Richtung BC abgebeugt wird, den Druck gegen die Ebene EF: und wofern es ſich bis auf einen rechten Winkel von der erſten Richtung BC ablenkt, ſo daß es mit der Fläche EF parallel abflieſt, ſo folgt aus den Bernoulliſchen und Euleriſchen

ſchen Rechnungen, daß der Druck dem Gewicht einer Waſſerſäule auf der Grundfläche CD in der Höhe $2v$ gleich ſey. Hr. Euler aber meint a. a. O. 469 S. man könne nicht annehmen, daß alle Theilchen des ganzen Strahls ſo weit von ihrer erſten Richtung abgebeugt werden, ſondern etwa nur die mittlern, und iſt deswegen geneigt, v ſtatt $2v$ zu behalten; wenigſtens alsdenn, wenn die flüßige Maſſe nicht elaſtiſch iſt, wie das Waſſer. Geſetzt aber, daß ſich auch alle Waſſertheilchen bis auf einen rechten Winkel abbeugten, wenn EF gröſſer als CD iſt; ſo würde dies doch nicht geſchehen, wenn die Fläche dem Querſchnitt CD gleich und ähnlich iſt. Daher nimmt Herr Albert Euler in der Göttingiſchen Preisſchrift: Enodatio quaeſtionis, quomodo vis aquae cum maximo lucro ad molas circumagendas aliave opera perficienda impendi poſſit. Goett. 1754 p. 8. 9. folgende Regel an:

Wenn die Ebene *EF*, die den Stoß ſenkrecht auffängt, ſehr viel gröſſer iſt, als der ſenkrechte Querſchnitt *CD* des anſtoſſenden Strahls, ſo ſey der Stoß dem Gewicht einer Waſſerſäule auf der Grundfläche *CD* in der Höhe $2v$ gleich: dagegen ſey der Stoß nur halb ſo groß, wenn beyde Flächen *CD* und *EF* einander gleich und ähnlich ſind.

Gewöhnlich würde alſo die Höhe dieſer Säule zwiſchen den Grenzen v und $2v$ fallen, und ich werde deswegen überhaupt $P = k\gamma vzz$, oder $P = \frac{1}{2}k\gamma A\sqrt{\frac{v}{g}} = \frac{k\gamma A . c}{4g}$ annehmen, da denn k zwiſchen den Grenzen 1 und 2 wird enthalten ſeyn.

§ 100.

100 §.

Wenn die Vorderfläche eines feſten Körpers, der ſich im flüßigen bewegt, eben, und die Richtung ſeiner Bewegung auf dieſe Ebene ſenkrecht iſt; ſo befindet ſich die Fläche unter denſelben Umſtänden, unter welchen ſie ſich befinden würde, wenn ein Waſſerſtrahl ſenkrecht dagegen ſtieſſe, deſſen ſenkrechte Querſchnitte dieſer Fläche gleich und ähnlich wären. Hätte es alſo mit der zuletzt angeführten Euleriſchen Regel ſeine erwieſene Richtigkeit, ſo würde dadurch zugleich die Regel des 301 §. Mech. von Berechnung der Stärke des Widerſtandes beſtätiget werden. Wenn ich mit den Newtonſchen Verſuchen über den Widerſtand 325. 327 §. Mech. dasjenige verbinde, was Herr Lambert zur Beſtätigung und Vertheidigung dieſer Theorie vom Widerſtande beygebracht hat (328 §. Mech.), ſo dünkt mich, daß dies alles die Richtigkeit der Regel des 98 §. für die Berechnung des Stoſſes wenigſtens alsdenn beſtätige, wenn CD und EF gleiche und ähnliche Flächen ſind. Man hat indeſſen auch geſucht, die Regel zur Berechnung des Stoſſes durch Verſuche unmittelbar zu prüfen. Um dieſe gehörig zu beurtheilen, muß man vorläufig folgendes bemerken. Jeder Punct in CD, (wenn dies der Theil der Fläche EF iſt, welcher den Stoß auffängt,) leidet einen eigenen Druck, und alle dieſe einzelnen Preſſungen ſind gleich groß, weil vorausgeſetzt wird, daß alle Waſſertheilchen mit gleichen Geſchwindigkeiten anſchlagen. Demnach geht die mittlere Richtung aller durch den Schwerpunct G des Querſchnitts CD, welcher mit dem Mittelpunct ſeiner Gröſſe hier einerley iſt. Eine Kraft alſo an G nach einer dem Waſſerſtrahl grade entgegenge-

ſetzten Richtung angebracht, würde mit dem Druck im Gleichgewicht ſeyn, den EF wegen des Waſſerſtoſſes leidet, wenn ſie dem Gewicht einer Waſſerſäule auf der Grundfläche CD in der Höhe *kv* gleich wäre.

101 §.

9 Fig. Wenn man unter dem Gefäß ABCD, woraus das Waſſer durch die im Boden befindliche Oeſnung GH vertical ausſtrömt, einen gleicharmigen Wagebalken KL anbrächte, der auf einer Seite bey K eine ſo breite Fläche hätte, daß er den Stoß des durch GH hervorſchieſſenden Waſſerſtrahls auffangen könnte; ſo würde ein Gewicht, das am andern Arm bey L aufgehangen den Wagebalken in horizontaler Lage erhielte, dem Druck des Waſſerſtoſſes gleich ſeyn: vorausgeſetzt, daß die Friction des Wagebalkens an ſeinen Zapfen bey I unbeträchtlich ſey. Mariotte im Traité du mouvement des eaux II Partie III Diſcours II Regle p. 197. erwehnt einer ſolchen Einrichtung, ich finde aber nicht, daß er würkliche Verſuche nach dieſer Einrichtung angeſtellt, und das Gewicht, was in L hängen muß, durch die Erfahrung geſucht hätte: (es ſcheint, daß er dadurch nur den Begriff des Waſſer- und Windſtoſſes, den er gleichfalls erwehnt, habe erläutern wollen). Er behauptet, es werde ſo groß ſeyn, als das Gewicht einer Waſſerſäule auf der Grundfläche GH, wenn ihre Höhe der Waſſerhöhe gleich iſt. Dies wäre die Regel des 98 §., wenn man annimmt, daß die Waſſerhöhe zugleich diejenige ſey, welcher die Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers zugehört. Allein man weiß, daß die Geſchwindigkeit nicht völlig der Waſſerhöhe zugehöre, und daß man überhaupt keine völlig ſichere

Regel

Regel habe, die Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers ſo genau zu berechnen, als hier nöthig wäre. Deswegen iſt es beſſer, wenn man das Waſſer nach horizontaler Richtung, wie in der 4 Fig. ausſprützen läſt, und aus der gemeſſenen Weite, die der Waſſerſtrahl erreicht, nach Vorſchrift des 23 §. die Geſchwindigkeit ſucht. Es ſey EK ein Wagebalken, der ſich um H frey drehen kann; an demſelben ſey ein anderer Arm EF rechtwinklicht ſo befeſtiget, daß der Schwerpunct beyder Arme zuſammen in H fällt, damit EF frey vertical herabhängt. Wenn nun ABCD ein Strahl iſt, der, wie in der 4ten Fig. aus einem Gefäß horizontal ausſprützt, und EF eine etwas breite Fläche hat, die man dieſem Strahl ſo entgegen ſetzen kann, wie die 15 Fig. vorſtellt; ſo richte man alles ſo ein, daß die Mitte des Strahls den Punct G in der Entfernung EG = HK treffe. Dafern alsdenn ein Gewicht Q in K angebracht, den Wagebalken EK in horizontaler Lage unbeweglich erhält, ſo iſt daſſelbe dem Druck des Waſſerſtoſſes gleich. Wären EG und HK ungleich, ſo wäre der

15 Fig.

Stoß $= \frac{HK\,.\,Q}{EG}$ (47 §. Stat.) Auf dieſe Art hat Hr. Kraft über die Stärke des Waſſerſtoſſes Verſuche angeſtellt, die er in der Abhandlung de vi venae aqueae contra planum incurrentis experimenta, in den Comment. Petrop. T. VIII. p. 253. u. f. beſchreibt; und dieſe Verſuche ſcheinen des Herrn Bernoulli im 99 §. angeführte Regel zu beſtätigen: dagegen kömmt ein bald anzuführender Verſuch des Herrn Graveſand mit der Regel des 98 §. überein.

102 §.

Wenn bey E eine horizontal liegende Welle befindlich wäre, die man nach Art eines Creuz-Haſpels 112 §. Stat. ſo eingerichtet hätte, daß den Armen EF und EK auf der andern Seite von E ein paar andre entgegengeſetzt wären, die ihnen das Gleichgewicht hielten, alſo der Schwerpunct in E fiele; ſo wäre dies etwa die Einrichtung, die Mariotte gebraucht hat, die Stärke des Stoſſes eines Stroms an verſchiedenen Stellen bey ungleichen Geſchwindigkeiten zu vergleichen. (Traité du mouv. des eaux. p. 215. 216.) Ein Arm wie EF, woran unten ein dünnes Brett von ſechs Zoll ins Gevierte befeſtiget war, ward lothrecht in den Fluß hinabgelaſſen, bis das Waſſer etwa 2 oder 3 Zoll hoch über dies Brett wegfloß. Auf den horizontalen Arm EK legte man in eben ſo groſſer Entfernung von E, als die Mitte des viereckten Bretts davon entfernt war, Gewichte, die dem Stoß des Stroms die Wage hielten. Hiezu wurden $3\frac{3}{4}$ Pfund bey der Geſchwindigkeit von $3\frac{1}{4}$ Fuß, und 9 Unzen bey der Geſchwindigkeit von $1\frac{1}{4}$ Fuß erfordert. Setzt man in der Formul des 98 §. $\gamma = 70$ Pf., $v = \frac{3{,}25^2}{4 \cdot 15{,}1}$ und $zz = \frac{1}{4}$ Qu. Fuß; ſo erhält man $P = 3{,}0625$ Pf.; und wenn man $v = \frac{1{,}25^2}{4 \cdot 15{,}1}$ ſetzt, ſo wird $P = 0{,}4527$ Pf. Demnach giebt dieſe der Regel des 98 §. gemäſſe Rechnung, den Stoß etwa $\frac{1}{5}$ deſſen, was die Verſuche lehren, zu klein. Ich bemerke indeſſen hiebey, daß Mariotte die Geſchwindigkeit des Fluſſes nach der Regel des 97 §. geſucht, alſo eigentlich nur

nur die Geſchwindigkeit deſſelben an der Oberfläche gefunden hat. Aber das Mittel des Bretts war 4 bis 5 Zoll, und der untere Rand 7 bis 8 Zoll unter Waſſer. Vielleicht iſt alſo die Geſchwindigkeit des anſtoſſenden Waſſers würklich etwas gröſſer geweſen, als die Rechnung vorausſetzt.

103 §.

Ein Waſſerſtrahl *ABCD*, der die Geſtalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi hat, ſtrömt gegen die Ebene *EF*, welche zwo Seitenflächen des Strahls, unter dem ſchiefen Winkel $ADF = \vartheta$, die übrigen beyden aber unter einem rechten Winkel ſchneidet: man ſucht die Stärke des Drucks gegen dieſe Ebene. 16 Fig.

Aufl. Es bleibe die Geſchwindigkeit des Waſſers $= c$, und die zugehörige Höhe v, der ſenkrechte Querſchnitt des Stroms CD $= zz$, und der geſuchte Druck $= P$: ſo wird die Durchſchnittsfigur DH der Ebene EF mit dem Strom $= \frac{zz}{\sin\vartheta}$. Es ſey GV die mittlere Richtung des geſammten Drucks und GV $= c$, ſo zerlegt ſich dieſe Geſchwindigkeit in zwo andre, nach GL $= c \sin\vartheta$ auf EF ſenkrecht, und nach GE $= c \, . \cos\vartheta$ mit FE parallel. Wegen der letztern leidet EF gar keinen Druck, wegen der erſtern aber den Druck $\frac{k\gamma cc \sin\vartheta^2}{4g} \, . \, \frac{zz}{\sin\vartheta} = k\gamma vzz \sin\vartheta$ nach der ſenkrechten Richtung GL (99 §.).

Es ſey wie vorhin die Menge des in einer Secunde anſchlagenden Waſſers $= A$, ſo iſt $zz = \frac{A}{2\sqrt{gv}}$,

 alſo

alſo der Druck $GL = \frac{1}{2} k\gamma A \sin\vartheta \sqrt{\frac{v}{g}} = \frac{k\gamma A c \sin\vartheta}{4g}$.

Wollte man ſtatt des ſenkrechten Querſchnitts CD des Waſſerſtrahls den ſchiefen Schnitt DH der Ebene EF mit demſelben in Rechnung bringen; ſo ſey $DH = yy$, alſo $CD = zz = yy \sin\vartheta$. Dies ſtatt zz geſetzt, giebt den Druck $GL = k\gamma vyy \sin\vartheta^2$.

Wenn ich mich hier beym Vortrag der gewöhnlichen Regeln von der Berechnung des ſchiefen Stoſſes auf die Zweifel nicht einlaſſe, die Hr. Daniel Bernoulli in der ſchon angeführten Abhandlung Comment. Petrop. T. VIII. p. 113. P. II. §. 12. dagegen gemacht hat; ſo geſchicht es aus keiner andern Urſache, als dieſer, weil ich bisher nicht abſehe, wie ſich vermittelſt einer Rechnung, welche auf die Bernoulliſchen Erinnerungen gegründet wäre, eine zuverläßigere Regel finden lieſſe. Man ſ. auch H. H. Käſtners Hydrodynamik im 336 und 337 §. 297-300 S.

104 §.

Wenn gleich der Waſſerſtrahl nicht die Geſtalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi hätte; wenn es ſonſt ein Prisma, oder ein Cylinder wäre; ſo würde dennoch der Ausdruck $k\gamma vyy \sin\vartheta^2$ den ſenkrechten Druck GL geben. Die Schlüſſe des 103 §. führen allemahl auf den Ausdruck

$GL = \frac{k\gamma cc \sin\vartheta^2}{4g} . DH$, da dann $\frac{cc}{4g} = v$, und $DH = yy$ iſt. Ob man aber allemahl berechtiget ſey, $yy = \frac{zz}{\sin\vartheta}$ zu ſetzen, das würde eine

eigene

eigene Unterſuchung aus Geometriſchen Gründen erfordern, die ich hier deswegen nicht anſtelle, weil ich den ſenkrechten Querſchnitt alsdenn nur in der Rechnung brauchen werde, wenn der Waſſerſtrahl die im vor. §. angenommene Geſtalt hat. Uebrigens läſt ſich nun in jedem beſondern Fall auch finden, wie ſtark der Stoß des Stroms gegen jede andere Oberfläche eines feſten Körpers ſey, wenn die Geſtalt des letztern bekannt iſt. Man findet die Gewalt, welche vom Anſtoß des Stroms herrührt, eben ſo, wie im 306 bis 309 §. Mech. der Widerſtand gefunden ward, den feſte Körper leiden, die ſich in flüßigen bewegen.

Wenn demnach das Waſſer gegen eine Kugel ſtrömt, ſo leidet ſie einen Druck, der halb ſo groß iſt, als das Gewicht einer Waſſerſäule, die den gröſten Kreis der Kugel zur Grundfläche hat, und deren Höhe $= k \cdot v$ iſt, wenn v die der Geſchwindigkeit des Stroms zugehörige Höhe bezeichnet (309 §. Mechan.).

105 §.

Auf eben dieſe Lehren gründet ſich die Methode, der ſich Varignon, Hermann und Gulielmini bedienen, die Geſchwindigkeit der Ströme in jeder Tiefe zu finden. Es iſt ACB ein Quadrant, von 17 Fig.
deſſen Mittelpunct C an einem Faden CP eine Kugel P herab hängt, die ein wenig ſchwerer als Waſſer iſt. Man ſenkt dieſe Kugel ins Waſſer, ſtellet den Quadranten lothrecht, und ſeine Fläche mit der Richtung des Stroms parallel. Nun würde die Kugel ſich ſelbſt gelaſſen vertical herab hängen: weil ſie aber vom Strom nach der Richtung PQ getrie-

ben wird; ſo wird der Faden in ſchiefer Lage erhalten werden, ſo, daß er die Verticallinie CA unter einem gewiſſen Winkel ACP ſchneidet. Wenn nun alles ruhig iſt, ſo erhalten drey Kräfte, nämlich das Gewicht der Kugel im Waſſer PR, die Feſtigkeit des Fadens PC, und der Druck des Stroms PQ einander im Gleichgewicht. Dafern nun die drey gedachten Kräfte ſich wie PR, PC, PQ verhalten, und man verzeichnet das Parallelogramm PCSR; ſo wird PS = PQ, und weil die Richtung des Stroms PQ allemahl ſehr wenig von der Horizontallinie abweicht, ſo hat man CS : PS = PR : PQ = 1 : tang ACP, folglich PQ = PR tang ACP. Iſt nun der Kugel Halbmeſſer $= r$, die Geſchwindigkeit des Stroms $= c$, die eigene Schwere des Waſſers $= \gamma$; ſo wird PQ $= \frac{1}{8g} . k\gamma\pi rrcc$ (104 §.). Iſt nun die eigene Schwere der Kugel $= \delta$; ſo wird der Ueberſchuß des Gewichts der Kugel über das Gewicht einer eben ſo groſſen Menge Waſſer $= \frac{4}{3}\pi(\delta - \gamma)r^3$. Dieſe Werthe ſetze man ſtatt PQ und PR. ſo erhält man

$$\frac{1}{8g} k\gamma\pi rrcc = \frac{4}{3}\pi(\delta - \gamma)r^3 \text{ tang ACP},$$ und $$cc = \frac{32(\delta - \gamma)}{3k\surd} . gr \text{ tang ACP}.$$

Wenn man alſo mit eben der Kugel den Verſuch in verſchiedenen Tiefen, und an verſchiedenen Stellen des Fluſſes anſtellt; ſo verhalten ſich die Quadrate der Geſchwindigkeiten des Fluſſes an dieſen Stellen, wie die Tangenten der Abweichungswinkel ACP.

§. 106.

106 §.

Wenn die Geſchwindigkeit des Stroms bekannt wäre, ſo lieſſe ſich dies Pendul auch brauchen, die Theorie von der Stärke des Stoſſes (98 §.) durch Verſuche zu prüfen. Man könnte in ſolcher Abſicht auch das Pendul (17 Fig.) vor der Oeſnung eines Gefäſſes ſtatt des gebrochenen Hebels FEK (15 F.) ſo aufhängen, daß der horizontal ausſprützende Strahl daſſelbe in der geneigten Lage erhielte. Hier könnte man c nach dem 23 §. finden, und den Abweichungswinkel ACP meſſen. Dieſe Worte ſtatt c und ACP geſetzt, müſſen $\frac{k\gamma\pi rrcc}{8g} = \frac{4}{3}\pi\delta r^3 \text{ tang ACP}$ geben. (Man ſetzt $\gamma = 0$, weil hier die Kugel nicht ſo, wie im vor. §., wenn ſie im Strom hängt, einen Theil ihres Gewichts verliert.) Graveſand hat auf dieſe Art einen Verſuch angeſtellt. Er braucht aber ſtatt der Kugel einen Cylinder, deſſen Axe horizontal hängt, und läſt den Waſſerſtrahl ſenkrecht gegen die Grundfläche ſtoſſen. Wenn alſo das Gewicht des Cylinders = Q, der Durchmeſſer der Oeſnung des Gefäſſes = d, die Geſchwindigkeit des Waſſers = c iſt; ſo hat man $k\gamma \cdot \frac{1}{4}\pi dd \cdot \frac{cc}{4g} = \text{Q tang ACP}$. Bey dem Graveſandſchen Verſuch (Phyſ. Elem. Math. §. 1762-1775.) war Q = 6 Unzen weniger 2 Drachmen, tang ACP = $\frac{\text{SP}}{\text{CS}} = \frac{5}{116}$, alſo Q tang ACP = 119 Gran. 17 Fig.
Nach der Regel des 23 §. fand Graveſand c = 4,03 Rheinl. Fuß, alſo $\frac{cc}{4g} = 0{,}26$ Fuß. Ferner

war $d = 0{,}43$ Zoll, und es iſt $\gamma = 282$ Gran (50 §. Hydroſtat.). Dies giebt $k\gamma \cdot \frac{1}{4}\pi dd \cdot \frac{cc}{4g} =$ 127 Gran, wenn man $k = 1$ ſetzt. Demnach kommt dieſer Verſuch mit der Regel des 98 §. ziemlich nahe überein.

107 §.

18 Fig. Pitots Werkzeug, die Geſchwindigkeit der Ströme in verſchiedenen Tiefen zu meſſen, welches er in den Mem. de l'Acad. de Paris Année 1732. p. 504. beſchreibt, beſtehet aus einer bey B rechtwinklicht gebogenen Glasröhre ABC. Die Abſicht des Gebrauchs erfordert, daß der eine Schenkel AB beträchtlich länger, als der andere BC ſey, ſo daß jener auf 6 und mehr Fuß Länge hat, da es im Gegentheil genüget, wenn BC einen Fuß lang iſt. Der kurze Schenkel wird gegen die Oefnung CF zu etwas erweitert. Uebrigens iſt die ganze Röhre ABC auf einer Tafel befeſtiget, woran von B bis A Eintheilungen in Fuſſe, Zolle und Linien angebracht ſind. Das Werkzeug wird alsdenn mit dem untern Ende B ſo in den Fluß getaucht, daß die Axe des kurzen Schenkels BC der Richtung des Stroms grade entgegengeſetzt iſt, und AB vertical ſteht. Nun würde das Waſſer in der Röhre AB ſchon auf eine gewiſſe Höhe BD ſteigen, wenn gleich das Waſſer des Fluſſes ruhig ſtünde: (5. 6. §. Hydroſt.) es würde nämlich D in des Fluſſes Oberfläche liegen. Wegen der Geſchwindigkeit des Fluſſes aber ſteigt das Waſſer höher bis E, und bleibt nicht ehe ruhig ſtehen, bis das in der Röhre befindliche Waſſer gegen CF ſo ſtark drückt, als das Stromwaſſer wegen der beyden angeführten Urſachen

Urſachen entgegen drückt. Nun ſey der Oefnung CF Halbmeſſer $= r$, alſo die Fläche der Oefnung $= \pi rr$, ihre Tiefe unter dem Waſſer BD $= a$, und BE $= b$; ſo iſt der hydroſtatiſche Druck des Waſſers gegen die Oefnung CF $= \gamma\pi rra$, und derjenige, welcher von der Geſchwindigkeit herrührt, $= k\gamma\pi rr \cdot \frac{cc}{4g}$ (99 §.), alſo der geſammte Druck des Stroms gegen CF $= \gamma\pi rr\left(a + \frac{kcc}{4g}\right)$. Der Gegendruck des Waſſers in der Röhre iſt $= \gamma\pi rrb$ (11 §. Hydroſt.). Beydes gleich geſetzt, giebt $\frac{kcc}{4g} = b - a =$ DE. Iſt alſo $k = 1$, ſo iſt DE die der Geſchwindigkeit des Stroms zugehörige Höhe. Wenn aber gleich nicht $k = 1$ iſt, ſo iſt doch DE dieſer Höhe proportional.

So wird die Regel, wie man dies Werkzeug gebrauchen müſſe, gewöhnlich vorgetragen. Man ſ. **Belidors** Architectura Hydraul. I Buch III Cap. 614 §. **Lulofs** Einleitung zur Mathematiſchen und Phyſicaliſchen Kenntniß der Erdkugel 17 Cap. 389 §. 332 S. Ich glaube, daß auch dieſer Vortrag dem Sinn des Herrn Pitot ſelbſt gemäß ſey, wenn man noch einen Umſtand dabey in Betrachtung ziehet, deſſen die angeführten Schriftſteller nicht ausdrücklich erwähnen. Herr Pitot ſchlägt vor, man ſoll neben der gebogenen Röhre noch eine andre grade Röhre befeſtigen, die eben ſo lang als der Schenkel AB der gebogenen Röhre iſt. Wenn dieſe grade Röhre unten offen iſt, ſo daß die Fläche ihrer Oefnung

nung waagrecht iſt, wenn die Röhre ſelbſt wie AB lothrecht erhalten wird; ſo wird das Waſſer in dieſer graden Röhre nur ſo hoch ſteigen, als dem Hydroſtatiſchen Druck deſſelben gemäß iſt, und man kann auf ſolche Art den Unterſchied beyder Höhen deſto beſſer wahrnehmen. Ich denke, daß Pitot hiezu etwa durch folgende Schlüſſe ſey veranlaſſet worden. Die Vorausſetzung, daß der Hydroſtatiſche Druck im flieſſenden Waſſer eben ſo groß ſey, als er im ſtillſtehenden Waſſer ſeyn würde, iſt ſo ſicher nicht, daß dies nicht noch nähere Unterſuchung verdiente. Er ſey übrigens ſo groß als er wolle, ſo wird ſich dies aus der Höhe beurtheilen laſſen, in welcher das Waſſer in der graden Röhre erhalten wird. Man nehme an, dieſe Höhe ſey $= x$, ſo wird man in den obigen Formuln x ſtatt a ſchreiben müſſen, und man wird $\frac{kcc}{4g} = b - x$ finden. Demnach würde der Unterſchied der Höhen des Waſſers in den beyden Röhren eigentlich dem Quadrat der geſuchten Geſchwindigkeit proportional ſeyn.

Belidor ſcheint ſehr viel von dem Pitotſchen Inſtrument zu halten, und er giebt demſelben vor allen andern Hülfsmitteln, die Geſchwindigkeit eines flieſſenden Waſſers zu finden den Vorzug. Allein Hr. Hofr. Kåſtner macht gegen Belidors Regel, wie man vermittelſt deſſelben die Geſchwindigkeit finden ſoll, verſchiedene Erinnerungen, in den Anfangsgründen der Hydrodynamik 293-296 §. 213. 214 S. Mich dünkt, wenn man nicht frägt: mit welcher Geſchwindigkeit das Waſſer in CF eindringt? ſondern die Frage nur ſo vorſtellig macht: wie

wie läſt ſich eine Gleichung zwiſchen der Geſchwindigkeit des Stroms und der Höhe BE finden, in welcher das Waſſer in der Röhre erhalten wird, nachdem ſich dieſe Säule ſchon mit dem Druck des Waſſers ins Gleichgewicht geſetzt hat; ſo iſt gegen die von mir gebrauchte Art zu ſchlieſſen nichts weiter einzuwenden, als daß es zweifelhaft bleibt: ob die Formul $\gamma\pi rr\left(a+\frac{kcc}{4g}\right)$ den Druck des Stroms gegen CF richtig ausdrücke.

108 §.

Der Waſſerſtrahl *ABHD* hat wie im 103 §. die Geſtalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi, und ſtrömt mit der Geſchwindigkeit *C* nach der Richtung *GV* gegen die Ebene *EF*, die ſich gleichfalls nach einer gegebenen Richtung mit der Geſchwindigkeit *c* bewegt: man ſoll die Stärke des Drucks *P* finden, den dieſe Ebene leidet. 15 16 Fig.

Aufl. I) Wenn der Strom gegen die Ebene EF ſenkrecht ſtößt, und dieſe mit dem Strom in einerley Richtung GV fortgeht, die auf ihr ſelbſt ſenkrecht iſt; ſo iſt es eben ſo viel, als wenn die Ebene ruhete, und der Strom mit ſeiner relativen Geſchwindigkeit $C-c$ anſtieſſe. Demnach iſt in dieſem Fall $P = k\gamma zz \times \frac{(C-c)^2}{4g}$, wenn $CD = zz$ iſt, wie im 98 §. Bedeutet A die Menge des in einer Secunde anſchlagenden Waſſers, und *v* die der Geſchwindigkeit C zugehörige Höhe, ſo iſt $zz = \frac{A}{2\surd gv}$, 15 Fig.

alſo

alſo $P = \frac{k\gamma A}{2\sqrt{gv}} \times \frac{C-c)^2}{4g}$. Bedeutet ferner x die der Geſchwindigkeit c zugehörige Höhe, ſo iſt $\sqrt{v} = \frac{C}{2\sqrt{g}}$, $\sqrt{x} = \frac{c}{2\sqrt{g}}$, alſo $\sqrt{v} - \sqrt{x} = \frac{C-c}{2\sqrt{g}}$, und es wird $P = \frac{k\gamma A}{2\sqrt{gv}} (\sqrt{v} - \sqrt{x})^2$.

II) Nun ſchneide die Richtung des Stroms GV die Ebene EF unter dem Winkel EGV $= \vartheta =$ ADF, wie im 103 §., und es ſey auch GV die Richtung, nach welcher die Ebene fortgeht; ſo iſt wie vorhin $C-c$ die relative Geſchwindigkeit des Stroms gegen die Ebene EF, und die ihr zugehörige Höhe $= \frac{(C-c)^2}{4g}$. Die Stärke des Stoſſes iſt ſo groß, als wenn die Ebene ruhete, und der Strom mit der relativen Geſchwindigkeit $C-c$ unter dem Winkel ϑ anſtieſſe. Daher entſteht nach einer auf der Ebene ſenkrechten Richtung GL der Druck $P = k\gamma yy \times \frac{(C-c)^2}{4g} \sin\vartheta^2$ (103 §.), wenn man den ſchiefen Querſchnitt des Strahls DH $= yy$ ſetzt. In Fällen alſo, wenn man $yy = \frac{CD}{\sin\vartheta} = \frac{zz}{\sin\vartheta}$ ſetzen kann, wie bey der angenommenen Geſtalt des Strahls, und bey der Vorausſetzung, daß die Ebene EF auf zwoen Seitenflächen des Strahls ſenkrecht ſey, wird dieſer Druck $P = k\gamma zz \sin\vartheta \times \frac{(C-c)^2}{4g}$. Man kann alsdenn auch $\frac{A}{2\sqrt{gv}}$ ſtatt zz ſetzen,

ſo wird $P = \frac{k\gamma A \sin\vartheta}{2\sqrt{gv}} \times \frac{(C-c)^2}{4g}$, oder auch

$$P = \frac{k\gamma A \sin\vartheta}{2\sqrt{gv}}(\sqrt{v}-\sqrt{x})^2.$$

III) Es bleibe GV die Richtung des Stroms, und $EGV = \vartheta$: die Richtung aber, nach welcher die Ebene EF fortgeht, ſey GM, und GM ſchneide die Ebene EF unter dem Winkel $EGM = \eta$. Die Geſchwindigkeit des Stroms ſey $GV = C$, die Geſchwindigkeit der Ebene $GM = c$, und GL ſey auf EF ſenkrecht. Man zerlege GV in die Geſchwindigkeiten GL und GE, auf EF ſenkrecht und damit parallel; und nach eben dieſen Richtungen zerlege man GM in die Geſchwindigkeiten GK und GN; ſo wird GL $= C\sin\vartheta$ und $GK = c\sin\eta$. Demnach iſt die reſpective Geſchwindigkeit nach der ſenkrechten Richtung $= C\sin\vartheta - c\sin\eta$. Daher entſteht der ſenkrechte Druck $P = \frac{k\gamma yy}{4g}(C\sin\vartheta - c\sin\eta)^2$. Darf man alſo $yy = \frac{zz}{\sin\vartheta}$ ſetzen, wie hier bey der angenommenen Geſtalt und Lage des Waſſerſtrahls angehet, ſo wird $P = \frac{k\gamma zz(C\sin\vartheta - c\sin\eta)^2}{4g\sin\vartheta}$. Es bleibe wie vorhin $\frac{C}{2\sqrt{g}} = \sqrt{v}$, $\frac{c}{2\sqrt{g}} = \sqrt{x}$, ſo wird $\frac{C\sin\vartheta - c\sin\eta}{2\sqrt{g}} = \sin\vartheta\sqrt{v} - \sin\eta\sqrt{x}$, und

$P = k\gamma yy(\sin\vartheta\sqrt{v} - \sin\eta\sqrt{x})^2 = k\gamma zz \cdot \frac{(\sin\vartheta\sqrt{v} - \sin\eta\sqrt{x})^2}{\sin\vartheta}$. Ferner bleibe A die

Men-

Menge des in einer Secunde anſchlagenden Waſſers, alſo $zz = \frac{A}{2\sqrt{gv}}$, $= \frac{A}{C}$, ſo wird $P =$

$$\frac{k\gamma A(C\sin\vartheta - c\sin\eta)^2}{4gC\sin\vartheta} = \frac{k\gamma A(\sin\vartheta\sqrt{v} - \sin\eta\sqrt{x})^2}{2\sin\vartheta\sqrt{gv}}.$$

109 §.

Wenn das Waſſer ſenkrecht gegen die Ebene ſtrömt, alſo $EGV = ADF = \vartheta = 90°$ iſt; ſo wird $\sin\vartheta = 1$, und $P = \frac{k\gamma A(\sqrt{v} - \sin\eta\sqrt{x})^2}{2\sqrt{gv}}$.
Und wenn die Ebene mit dem Strom nach einerley Richtung fortgeht, alſo GM in GV fällt, folglich $EGM = \eta = EGV = \vartheta$, und $\sin\eta = \sin\vartheta$ iſt; ſo hat man $P = \frac{k\gamma A(\sqrt{v} - \sqrt{x})^2 \sin\vartheta}{2\sqrt{gv}}$, wie im II. Fall des vor. §., ſo wie $P = \frac{k\gamma A(\sqrt{v} - \sqrt{x})^2}{2\sqrt{gv}}$ wird, wenn beyde Richtungen auf EF ſenkrecht ſind, wie im I. Fall. Es wird hiebey, wie für ſich erforderlich iſt, vorausgeſetzt, daß $C > c$, alſo $\sqrt{v} > \sqrt{x}$, und überhaupt in den übrigen Fällen $C\sin\vartheta > c\sin\eta$ ſey, damit ein Stoß erfolgen könne. Ueberdem iſt bisher angenommen, daß beyde, der Strom und die Ebene, nach übereinſtimmigen Richtungen fortgehen. Wenn aber die Ebene dem Strom entgegen gienge, ſo dürfte man nur ihre Geſchwindigkeit negativ nehmen, und $+c$ ſtatt $-c$, alſo auch $+\sqrt{x}$ ſtatt $-\sqrt{x}$ ſchreiben.

Uebrigens bemerke ich noch, daß der gefundene Druck gegen die Ebene auch ſo ausgedrückt werden könne.

könne: $P = \frac{k\gamma A \,.\, C\sin\vartheta}{4g}\left(1 - \frac{c\sin\eta}{C\sin\vartheta}\right)^2$,

woraus $P = \frac{k\gamma A.C}{4g} \cdot \left(1 - \frac{c}{C}\right)^2$ wird, wenn $\eta = \vartheta = 90°$ iſt. Setzt man nun den Druck $\frac{k\gamma A.C}{4g} = p$; ſo hat man in der letzten Voraus-ſetzung $P = p\left(1 - \frac{c}{C}\right)^2$, und dieſer Ausdruck iſt demjenigen ganz ähnlich, der im 388 §. Mechan. angenommen ward, die Kraft eines Menſchen, oder eines Thiers auszudrücken.

Der VII. Abſchnitt.

Von den unterſchlächtigen Waſſerrädern bey Mühlen und andern Maſchinen.

110 §.

Wenn ein Rad durch den Stoß eines flieſſenden Waſſers in Bewegung geſetzt werden ſoll, ſo muß es an ſeinem Umfang ſo eingerichtet ſeyn, daß es allemahl dem Waſſer eine hinlänglich breite Fläche entgegen ſetzt. Dies erreicht man durch die am Umfang deſſelben eingeſetzten Schaufeln. Wenn das Rad vertical ſtehet, ſo kann das Waſſer den Umlauf deſſelben auf eine zwiefache Art bewürken, nachdem es entweder unterhalb des Rades durchflieſt,

oder ſo geleitet iſt, daß es von oben herab auf das Rad fällt. Im erſten Fall treibt das Waſſer die Schaufeln vor ſich her, und die Bewegung des Rades hängt allein vom Stoß des Waſſers ab. Es heiſt ſodann ein **unterſchlächtiges Rad.** Wenn aber das Waſſer von oben herab auf das Rad fällt, ſo ſetzt man die Schaufeln zwiſchen den beyden Reifen, die das Rad umgeben, ſo ein, daß ſie ſchräge aufwärts ſtehen, und das Waſſer gleichſam als ſo viele Käſten auffangen, aus denen es alsdenn allererſt wieder ausläuft, wenn ſie beym Umlauf des Rades faſt die unterſte Stelle erreicht haben. Auf ſolche Art wird das Rad, welches nun ein **oberſchlächtiges** heiſt, eigentlich durchs Gewicht des in den Käſten aufgefangenen Waſſers umgetrieben.

111 §.

Beym unterſchlächtigen Rade wird erfordert, daß das Waſſer mit einer etwas beträchtlichen Geſchwindigkeit an die Schaufeln anſchlage. Dieſe bringt man demſelben zuwege, wenn man es auf einer merklich ſchiefen Fläche auf das Rad zu leitet. In ſolcher Abſicht legt man quer über den Fluß vor dem Rade eine Einfaſſung für das Waſſer an, die das **Grundwerk** heiſt, wodurch das anlaufende Waſſer zu einer ſolchen Höhe gebracht wird, damit es gegen das Rad auf einmahl ein genugſames Gefälle bekommen kann. Dies nennt man das **lebendige Gefälle.** Es muß nämlich der Mühlgraben auch oberhalb der Mühle einiges Gefälle zum Zufluß und unterhalb der Mühle zum Abfluß haben, welches die **Räuſche** heiſt. Die Höhe des Waſſers, in welcher es von den Schutzbrettern gehalten wird, heiſt der **Waſſerſtand.**

Man

Man ſehe Beyers Schauplatz der Mühlenbaukunſt, III Cap. 13 bis 15 S. Uebrigens werden die Schaufeln gewöhnlich ſo eingeſetzt, daß ihre Ebene auf der Ebene des Rades ſenkrecht ſteht, und das Waſſer wird ſo geleitet, daß es nach einer mit der Ebene des Rades parallelen Richtung anſchlägt.

112 §.

Es iſt EF die Schaufel eines unterſchlächtigen Waſſerrades, wogegen das Waſſer-Priſma $ABHD$ ſtrömt. Die Größe dieſer Schaufel iſt gegeben, nebſt ihrer Lage in Anſehung der Umdrehungsaxe des Rades. Ferner iſt die Geſchwindigkeit C bekannt, womit das Waſſer an die Schaufeln ſchlägt, nebſt der Geſchwindigkeit c der Schaufel ſelbſt: man ſucht den Druck des Waſſers gegen die Schaufel. 19 Fig.

Aufl. Es ſey G der Schwerpunct der Schaufel, durch welchen die mittlere Richtung des Stoſſes geht, (ich nehme hier noch an, daß alle Waſſertheilchen mit gleichen Geſchwindigkeiten anſchlagen,) und GK die Entfernung dieſes Puncts von der Umdrehungsaxe des Rades; ſo wird der Punct G nach der Richtung GM fortgehen, die auf KG ſenkrecht iſt. Die Richtung des Waſſers ſey GV, und man ſetze, wie im 108 §., $EGM = \eta$, $EGV = \vartheta$, den Querſchnitt DH der Fläche der Schaufel mit dem anſchlagenden Waſſerſtrahl $= yy$, ſo leidet die Schaufel nach der auf ihr ſenkrechten Richtung GL den Druck $P = \frac{kyyy(C \sin\vartheta - c \sin\eta)^2}{4g}$. Es ſey KG nach Z verlängert,

långert, uud man zerlege die Kraft P in zwo andere nach den Richtungen GZ und GM, ſo wird jene blos die Axe des Rades drücken, dieſe aber den Umlauf des Rades beſchleunigen. Dieſe letztere Kraft nach GM wird $= P\cos LGM = P\cos(90^\circ - \eta) = P\sin\eta$, alſo $= \frac{k\gamma yy(C\sin\vartheta - c\sin\eta)^2\sin\eta}{4g}$.

Es ſey der ſenkrechte Querſchnitt des Waſſers CD $= zz$, ſo iſt hier $yy = \frac{zz}{\sin\vartheta}$. Ferner ſey A die Menge des in einer Secunde anſchlagenden Waſſers, alſo $A = zz \cdot C$, ſo wird $yy = \frac{A}{C\sin\vartheta}$, und die Kraft nach GM $= \frac{k\gamma A(C\sin\vartheta - c\sin\eta)^2\sin\eta}{4Cg\sin\vartheta}$.

Iſt x die der Geſchwindigkeit c, und v die der Geſchwindigkeit C zugehörige Höhe; ſo hat man aus dem 108 §., $P = k\gamma yy(\sin\vartheta\sqrt{v} - \sin\eta\sqrt{x})^2$, da dann in eben dieſem Ausdruck auch $yy = \frac{zz}{\sin\vartheta} = \frac{A}{2\sin\vartheta\sqrt{gv}}$ geſetzt werden kann, und die Multiplication mit $\sin\eta$ giebt die Kraft nach

$$GM = \frac{k\gamma A\sin\eta}{2\sin\vartheta\sqrt{gv}}(\sin\vartheta\sqrt{v} - \sin\eta\sqrt{x})^2.$$

113 §.

Wenn das unterſchlächtige Waſſerrad eine Maſchine treiben ſoll, und die Vorausſetzungen

gen des vor. §. bleiben: die Umſtände zu finden, unter welchen das Bewegungsmoment am gröſten wird.

Aufl. Weil c die Geſchwindigkeit des Puncts G nach der Richtung GM iſt; ſo iſt das Bewegungsmoment der Kraft des Waſſers, die den Punct G nach eben dieſer Richtung treibt, $= \frac{k\gamma yy}{4g} (C \sin\vartheta - c \sin\eta)^2 . c \sin\eta$ (380 §. Mech.) und die Einrichtung der Maſchine iſt am vortheilhafteſten, wenn der Punct G bey gleichförmigen Gange der Maſchine mit derjenigen Geſchwindigkeit c herum gehet, bey welcher jenes Moment am gröſten wird (384 §. Mech.) Man ſuche nach dem 343 §. Mech. dieſen Werth von c, und ſetze das Differential von $(C \sin\vartheta - c \sin\eta)^2 c = 0$, weil $\frac{k\gamma yy \sin\eta}{4g}$ ein beſtändiger Factor iſt; ſo erhält man $(C \sin\vartheta - c \sin\eta)^2 dc - 2c (C \sin\vartheta - c \sin\eta) dc \sin\eta = 0$. Daraus folgt $C \sin\vartheta - 3c \sin\eta = 0$, alſo ferner $c = \frac{1}{3} . \frac{C \sin\vartheta}{\sin\eta}$. Wird dieſer Werth ſtatt c geſetzt, ſo wird die Kraft des Waſſers gegen die Schaufel $= \frac{k\gamma yy \sin\eta}{4g} . \frac{4}{9} C^2 \sin\vartheta^2 = \frac{1}{9} . \frac{k\gamma yy}{g} . C^2 \sin\vartheta^2 \sin\eta$ und das Bewegungsmoment $= \frac{k\gamma yy}{4g} . \frac{4}{9} C^2 \sin\vartheta^2 . \frac{1}{3} C \sin\vartheta = \frac{1}{27} . \frac{k\gamma yy}{g} . C^3 \sin\vartheta^3$. Subſtituirt

 man

man alsdenn $\frac{A}{C \sin \vartheta}$ ſtatt yy, ſo wird dies Moment $= \frac{k\gamma}{27} \cdot \frac{A.C^2 \sin \vartheta^2}{g}$, und wenn man $4v$ ſtatt $\frac{C^2}{g}$ ſetzt, ſo wird es $= \frac{4}{27} k\gamma A v \sin \vartheta^2$.

Dieſer letzte Ausdruck hängt noch von dem Winkel ϑ, aber nicht mehr von η ab, wovon jedoch der gefundene Werth von c abhängt. Man muß demnach noch die Einrichtung ſo machen, daß ſowohl $\sin \vartheta$, als auch C ſo groß werde, als die Umſtände zulaſſen. Es wird aber C deſto gröſſer, je gröſſer der Fall des Waſſers iſt, bevor es die Schaufeln erreicht; und $\sin \vartheta$ iſt am gröſten, wenn $\vartheta = 90°$, alſo $\sin \vartheta = 1$ iſt. Demnach wird erfordert, daß EGV $= 90°$, alſo die Richtung des Aufſchlagewaſſers auf die Schaufel ſenkrecht ſey. Dies würde $c = \frac{C}{3 \sin \eta}$ geben, alſo das Rad deſto ſchneller laufen müſſen, je kleiner EGM, folglich je gröſſer EGK angenommen wird. Da indeſſen das Bewegungsmoment ſelbſt von η nicht abhängt, ſo kann man auch $\eta = 90°$, alſo EGK $= 0$ annehmen, ſo, daß die Ebene der Schaufeln durch die Umdrehungsaxe geht. Dies giebt $c = \frac{1}{3}$C, den Druck des Waſſers gegen die Schaufeln $= \frac{1}{9} \cdot \frac{h\gamma yy}{g} \cdot C^2$, und das Bewegungsmoment $= \frac{1}{27} \cdot \frac{k\gamma yy}{g} C^3$.

Weil bey eben dieſen Vorausſetzungen $zz = yy = \frac{A}{C}$

$\frac{A}{C}$ wird, ſo erhält man auch für eben dies Bewegungsmoment den Ausdruck $\frac{1}{27} . \frac{k\gamma A . C^2}{g}$. Und weil $\frac{C^2}{g} = 4v$, ſo wird eben dies Moment $= \frac{4}{27} k\gamma A v$. Der Druck ſelbſt gegen die Schaufeln wird $= \frac{1}{9} . \frac{k\gamma}{g} A . C = \frac{2}{9} . k\gamma A \sqrt{\frac{v}{g}}$.

Wenn a das lebendige Gefälle des Aufſchlagewaſſers iſt, ſo kann C nicht gröſſer ſeyn, als diejenige Geſchwindigkeit, die der Höhe a zugehört. Demnach muß die Einrichtung ſo gemacht werden, daß das Waſſer an die Schaufel alsdenn allererſt anſchlage, wenn es dem niedrigſten Ort im Gerinne erreicht hat, damit $v = a$ werde, und $C = 2\sqrt{ga}$ ſey, alſo das Bewegungsmoment $= \frac{4}{27} k\gamma A a$, und der Druck des Waſſers gegen die Schaufel $= \frac{2}{9} k\gamma A \sqrt{\frac{a}{g}}$.

Endlich iſt noch zu merken, daß nach Hr. Eulers Regel im 99 §. der Coefficient k von der Gröſſe der Schaufel abhänge. Iſt die Fläche der Schaufel in Vergleichung mit dem Querſchnitt des Aufſchlagewaſſers ſehr groß, ſo müſte man $k = 2$ ſetzen. Wenn aber die Fläche der Schaufel nur grade ſo groß, als der Querſchnitt des Aufſchlagewaſſers iſt, ſo müſte man $= 1$ nehmen. Das Mittel zwiſchen beyden wäre $k = \frac{3}{2}$, und wenn man dieſe Vorausſetzung annehmen will, ſo iſt der Druck des Waſſers gegen die Schaufel $= \frac{1}{3} \gamma A \sqrt{\frac{a}{g}}$, und das Bewegungsmo-

 ment

ment $= \frac{2}{9}\gamma A a$. Man ſ. Hr. Leonh. Eulers Abhandlung: Application de la machine hydraulique de M. Segner a toutes ſortes d'ouvrages §. I-X. Hiſtoire de l'Acad. de Berlin A. 1751. pag. 271-274. Imgleichen eben deſſelben Diſcuſſion plus particuliere de diverſes manieres d'elever de l'eau etc. §. XXXIV XXXV. Hiſt. de l'Acad. de Berlin A. 1752. p. 166. 167. Alb. Euleri Enodatio quæſtionis: quomodo vis aquae cum maximo lucro ad molas circumagendas impendi poſſit §. 13. ſqq. pag. 13. ſqq. Die Theorie ſelbſt von der möglichſt gröſten Würkung des Waſſerſtoſſes auf unterſchlächtige Waſſerräder hat nach Hn. Belidors Bericht zuerſt Hr. Parent erfunden, und in den Memoires de l'Acad. de Paris A. 1704. bekannt gemacht. Herr Belidor hält ſie mit Recht für eine der nützlichſten Erfindungen in der Mechanik Archit. Hydraul. II Buch III Cap. 592 §.

114 §.

Eine Maſchine ſoll durch ein unterſchlächtiges Waſſerrad getrieben werden, das lebendige Gefälle a des Waſſers iſt bekannt, nebſt der Menge des in einer Secunde aufſchlagenden Waſſers A: man ſoll diejenige Einrichtung der Maſchine finden, bey welcher der möglichſt gröſte Effect erhalten wird.

Aufl. Das möglichſt gröſte Bewegungsmoment iſt $\frac{8}{27}\gamma A a$ (113 §.) wenn man $k = 2$ ſetzt, und die Geſchwindigkeit des Schwerpuncts einer jeden Schaufel $= \frac{2\sqrt{ag}}{3\sin\eta}$ iſt. Der Winkel η iſt das Complement desjenigen, unter welchem die Ebene

Ebene jeder Schaufel von der Ebene durch ihren Schwerpunct und die Axe des Rades geſchnitten wird. Nun ſey der Abſtand des Schwerpuncts einer jeden Schaufel von der Axe des Rades $= r$, und μ die Anzahl der Umläufe in einer Secunde, ſo hat man I) $\mu = \frac{\surd ag}{3\pi r \sin\eta}$ (382 §. Mechan.) Wenn nun der Widerſtand R in der Entfernung q von der Axe der letzten Welle angebracht iſt, und dieſe Welle νmahl in einer Secunde umläuft, ſo muß $\nu = \frac{\frac{8}{27}\gamma A a}{2\pi q R}$ ſeyn (382 §. Mechan.), oder $\nu = \frac{4\gamma A a}{27\pi q R}$. Es ſey Q eine Menge Waſſer, deren Gewicht $=$ R iſt, ſo hat man $R = \gamma . Q$, alſo II) $\nu = \frac{4 A a}{27\pi q Q}$.

Dieſe beyden Gleichungen beſtimmen die ganze Einrichtung der Maſchine, vorausgeſetzt, daß die Laſt, und ihr ſtatiſches Moment gegeben ſey. Zu μ Umläufen des Hauptrades gehören ν Umläufe der letzten Welle, oder welches einerley iſt, zu einem Umlauf des Hauptrades gehören $\frac{\nu}{\mu}$ Umläufe der letzten Welle: wenn die Maſchine ein Räderwerk iſt, ſo findet man hieraus nach dem 375 §. Mech. die Anzahl der Zähne und Triebeſtöcke für jedes Rad und Getriebe, alſo die ganze Einrichtung der Maſchine. Es muß aber, wie bekannt iſt, zu dem ſtatiſchen Moment der eigentlichen Laſt noch das Moment der geſammten Friction aller Theile der Maſchine zugerechnet werden.

Wenn man die Umlaufszeit des Hauptrades $= \vartheta$ ſetzt, ſo findet man $\vartheta = \frac{1}{\mu} = \frac{3\pi r \sin\eta}{\sqrt{ag}}$, (380 §. Mech.) da dann der Halbmeſſer des Rades r und der Winkel η allemahl ſo genommen werden können, daß dieſe Umlaufszeit eine gegebene Gröſſe bekommt. Setzt man die Umlaufszeit der letzten Welle, woran die Laſt unmittelbar angebracht iſt, $= t$, ſo iſt $t = \frac{1}{v} = \frac{27\pi q Q}{4Aa}$, und dieſe Zeit iſt völlig beſtimmt, wenn das Moment des Widerſtandes qQ beſtimmt iſt. Es giebt indeſſen Fälle, wo es vornemlich darauf ankommt, daß der Widerſtand mit einer beſtimmten Schnelligkeit bewegt werde, alſo die letzte Welle eine gegebene Zahl Umläufe in einer Secunde mache. Alsdenn, iſt v, oder t eine gegebene Zahl, und das Moment Qq wird dadurch beſtimmt. Eben dieſer Fall findet bey den Korn-Mühlen ſeine Anwendung, weil der Läufer höchſtens nur einmahl auch wohl nur $\frac{2}{3}$mahl in einer Secunde umlaufen muß, und dies letztere insbeſondre bey Waſſermühlen, die ſehr ſchwere Läufer führen können (424 §. Mech.) Demnach iſt es bey Anordnung einer Mühle allemahl am beſten, wenn man die Umlaufszeit des Läufers t den Umſtänden gemäß annimmt und daraus das Moment Qq alſo das Gewicht des Läufers und ſeinen Halbmeſſer beſtimmt, da dann wiederum eines von beyden willkührlich angenommen werden kann. Man vergleiche hiemit den 429 §. Mech. Iſt alsdenn auch r, η und folglich ϑ beſtimmt, ſo hat man hiernächſt

$\frac{\vartheta}{t}$

$\frac{\vartheta}{t} = \frac{v}{\mu}$ und man weiß wie vorhin, wie die übrige Einrichtung der Maſchine gemacht werden müſſe.

115 §.

Bey dem Bau des Grundwerks und der übrigen Einrichtung der unterſchlächtigen Waſſer-Räder laſſen ſich die bisher gefundenen Vorſchriften wegen allerhand Schwürigkeiten ſo völlig nicht in Ausübung bringen, daß man den gröſten möglichſten Effect davon erwarten könnte. Die Einrichtung läſt ſich nicht wohl machen, daß das Waſſer alsdann allererſt an die Schaufeln anſchlägt, wenn ſie den niedrigſten Ort im Gerinne erreicht haben. Die Schaufeln können auch nicht wohl breiter gemacht werden, als der Querſchnitt mit dem Aufſchlagewaſſer iſt, ſo daß in den obigen Formuln der Coefficient k nie leicht gröſſer als 1 wird. Ueberdem kann auch die Richtung des Aufſchlage-Waſſers im Gerinne nicht beſtändig ſenkrecht gegen die Schaufeln bleiben, ſondern wird ſchief, ſo wie die Schaufel ausweicht, indem das Rad weiter umläuft. Gemeiniglich wird ein unterſchlächtiges Waſſerrad ſo eingerichtet, daß die Schaufeln AB, *ab*, auf den verticalſtehenden Reifen ſenkrecht ſind, ihre Ebenen aber durch die horizontale Umdrehungs-Axe des Rades gehen. Das Waſſer wird in dem Gerinne ſo geleitet, daß es ſenkrecht gegen die Schaufeln anſchlägt, wenn ſie faſt die unterſte Stelle erreicht haben. Bey dieſer Einrichtung iſt nun einmahl die Fläche der Schaufeln kleiner als der Querſchnitt des Aufſchlagewaſſers, daß alſo wegen dieſer Urſache ſchon das

20 Fig.

Bewe-

Bewegungsmoment kleiner als $\frac{4}{27}\gamma . Aa$ ſeyn muß. Ueberdem hat das Waſſer die dem lebendigen Gefälle a zugehörige Geſchwindigkeit noch nicht völlig erreicht, wenn es ſchon an die Schaufeln anſchlägt. Deswegen kann man das Bewegungsmoment ſchwerlich gröſſer als $\frac{3}{27}\gamma Aa$ oder $\frac{1}{9}\gamma Aa$ ſchätzen, wenn a das lebendige Gefälle iſt. Der Effect der Maſchine wird alſo faſt 3mahl kleiner ſeyn, als der gröſte mögliche Effect $\frac{8}{27}\gamma Aa$, der nach der Theorie erreicht werden könnte. Wenn überdem die Geſchwindigkeit der Schaufeln in ihrem Schwerpunct gröſſer oder kleiner wäre, als der dritte Theil der Geſchwindigkeit des Waſſers, indem es anſchlägt, ſo würde aus dieſer Urſache der Effect ebenfalls kleiner ſeyn, als er an ſich ſeyn könnte, wenn die Maſchine gehörig eingerichtet wäre. Man ſ. die angeführte Preis-Schrift des Hrn. Alb. Euler: Quomodo vis aquae &c. 23-31. §. 18-23 S.

116 §.

Uebrigens kommt es bey Verfertigung eines ſolchen unterſchlächtigen Waſſerrades noch auf die gehörige Austheilung der Schaufeln, und die richtige Beſtimmung ihrer Anzahl an. Es ſtelle HI die Richtung und zugleich die Oberfläche des Stroms
20 vor. Wenn nun die Schaufel AB, die in das Waſ-
Fig. ſer eingetaucht iſt, in dem gegenwärtigen Augenblick auf der Richtung des Stroms ſenkrecht ſteht, und es iſt die nächſtfolgende Schaufel GE zugleich auch ſchon in das Waſſer zum Theil eingetaucht; ſo wird der eingetauchte Theil FE von der ſenkrechten Schaufel AB den Stoß des Waſſers zum Theil abhalten. Ziehet man ED auf AB ſenkrecht, ſo erhellet,

hellet, daß das Waſſer nur das Stück BD ſenkrecht fortſtoſſen könne, AD aber gar keinen Stoß leide. Statt des letztern wird nun zwar FE, aber nur nach ſchiefer Richtung geſtoſſen, und der davon abhängende Druck gegen FE iſt nicht ſo groß, als der ſenkrechte Druck gegen AD ſeyn würde. Um alſo deſto mehr Vortheil zu erhalten, muß man dahin ſehen, daß die nachfolgende Schaufel GE mit dem untern Ende bey E die Oberfläche HI des Stroms nicht ehe berühre, bis in dem Augenblick, da die vorhergehende Schaufel AB ihren ſenkrechten Stand zu verlaſſen anfängt, ſo wie die 21 Figur es vorſtellig macht: und daraus ergiebt ſich nun leicht die Auflöſung folgender Aufgabe. 21 Fig.

117 §.

Der Halbmeſſer *BC* des Rades, die Höhe der Schaufeln *AB* mitgerechnet, nebſt der Anzahl n der Schaufeln, die das Rad haben ſoll, iſt gegeben: man ſoll die Höhe der Schaufeln finden.

Aufl. Weil EA auf BC ſenkrecht ſteht, ſo iſt AB der Querſinus des Winkels BCE für den Halbmeſſer BC $= r$, und überdem iſt der Winkel BCE $=$ $\frac{360°}{n}$, weil die Schaufeln gleich weit aus einander ſtehen müſſen. Deswegen erhält man

$1 : \sin v \frac{2\pi}{n} = r :$ AB, und wenn AB $= b$ geſetzt wird, ſo iſt $b = r \sin v \frac{2\pi}{n}$.

Wäre alſo die Höhe der Schaufeln, nebſt dem Halbmeſſer des Rades gegeben, ſo hätte man leicht ihre

ihre Anzahl aus der Gleichung $\text{ſinv}\,.\,\frac{2\pi}{n} = \frac{b}{r}$, woraus $n = \frac{2\pi}{\text{A ſinv}\,(b : r)}$ folgt. Man darf alſo nur von dieſem Querſinus $\frac{b}{r}$ zugehörigen Winkel ſuchen, und alsdenn 360° durch die Anzahl der Grade, die der erwehnte Winkel faſſet, dividiren, ſo giebt der Quotient die Anzahl der Schaufeln.

Aus der Höhe der Schaufeln und ihrer Anzahl wird der Halbmeſſer des Rades vermittelſt der Gleichung $r = \frac{b}{\text{ſinv}\,\frac{2\pi}{n}}$ gefunden.

Gemeiniglich iſt die Höhe der Schaufeln ein datum, weil man ſich damit nach der Tiefe des Waſſers richten muß, in welches ſie ſich eintauchen ſollen. Ihre Breite beruhet auf die Menge Waſſer, die man nöthig hat, um auf die Schaufeln einen hinlänglichen Druck zuwege zu bringen. Der Halbmeſſer des Rades hängt von der Gröſſe des Widerſtandes ab, der überwunden werden ſoll: daß alſo gewöhnlich aus der Höhe der Schaufeln und dem Halbmeſſer des Rades ihre Anzahl zu ſuchen iſt.

Weil beym Umlauf des Rades die Schaufeln ihre Lage beſtändig ändern, ſo ſiehet man wohl, daß der Druck, welcher das Rad zu drehen ſtrebt, nicht beſtändig völlig einerley ſeyn könne, wenn gleich übrigens das Rad ſchon gleichförmig läuft. Jede Schaufel AB kommt einmahl in die Lage *ab*, wo ſie von der

der nachfolgenden völlig verdeckt wird, wenn dieſe nämlich aus EG in *eg* angelangt iſt. Man ſieht leicht, daß dies alsdenn erfolge, wenn der Winkel

$bce = \frac{2\pi}{n}$ beyder Schaufeln von der Ebene CB,

die durch die Axe des Rades auf des Stroms Richtung ſenkrecht ſteht, halbirt wird; ſo, daß nun die Schaufel *eg*, welche allein den Druck des Waſſers leidet, gegen die Richtung des Stroms unter dem

Winkel $90° - \frac{180°}{n}$ geneigt iſt.

118 §.

Wenn ein unterſchlächtiges Waſſerrad nur einen Mahlgang treibt, ſo bekommt die Mühle den Namen einer Staber- oder Strauber-Mühle von der verſchiedenen Geſtalt des Waſſerrades. Das Staber-Rad beſteht aus zweyen Reifen, und es ſind die Schaufeln zwiſchen denſelben rechtwinkliche eingeſetzt: das Strauber-Rad hingegen hat nur einen Reifen, und die Schaufeln ſtehen auf deſſen Stirne. Uebrigens gehen bey beyden Rädern die Flächen der Schaufeln durch die Umdrehungsaxe des Rades. Beyer im Schauplatz der Mühlenbaukunſt VI Cap. 1 §. 34 S. ſetzt noch dieſen Unterſchied hinzu, daß die Kröpfung des Gerinnes beym Staber-Rade ganz flach ſey, beym Strauber-Rade aber nach der Rundung deſſelben geführt werde. Die übrige Einrichtung ſolcher Mühlen iſt ſchon im 417 u. f. §. Mechan. beſchrieben. Dafern man genug Waſſer, und einen hinlänglichen Abfall hat, ſo kann man die Mühle ſo einrichten, daß ein Waſſer-

rad

rad zwey Gänge treibt. Alsdenn iſt ſtatt des Kammrades an der Hauptwelle ein Sternrad befindlich, dies greift in zwey Trillinge, die zu beyden Seiten deſſelben liegen, und an der Welle eines jeden dieſer Trillinge befindet ſich ein Kammrad, das ſeinen zugehörigen Läufer treibt. Will man an der Hauptwelle ein Kammrad behalten, das in einen vertical ſtehenden Trilling greift, ſo muß an der Welle des letztern ein horizontales Sternrad befindlich ſeyn, das zu beyden Seiten in den Trilling eines beſondern Mühleiſens greift, und den darauf liegenden Läufer herum treibt. Das Waſſer-Rad an einer ſolchen Mühle, die nun eine Panſter-Mühle heiſt, muß gröſſer ſeyn, und gröſſere Schaufeln haben, als beym Staber- und Strauber-Zeuge.

119 §.

Dafern das Waſſer im Gerinne das Waſſerrad herum treiben, und nicht zugleich den Umlauf deſſelben auf der andern Seite des Rades hindern ſoll; ſo muß daſſelbe nur an die Vorderfläche der untern Schaufeln anſtoſſen, und hierauf unter dem Rade ablaufen, damit es nicht die hintern Schaufeln hindere, herauf zu ſteigen. Dies letztere wird erfolgen, wenn zu vieles und zu hohes Waſſer ins Rad hinein ſtürzt, und der untere Strom ſo hoch angeſchwollen iſt, daß das Waſſer unter dem Rade nicht ablaufen kann, ohne ſich über die hintern Schaufeln zu heben. Wenn Panſter-Mühlen an groſſen Strömen gebauet werden, ſo iſt man dieſer Unbequemlichkeit oft ausgeſetzt, daß das Waſſer höher ſteigt, als zum gehörigen Umtrieb des Rades erfordert wird. Damit nun bey ſolchen Vorfällen die

Mühle

Mühle nicht ſtehen bleiben müſſe, bis das hohe Waſſer wieder gefallen iſt, welches oft in vielen Wochen nicht zu geſchehen pflegt, wird die Einrichtung ſo gemacht, daß man das Waſſerrad mit ſeiner Welle und dem daran befindlichen Sternrade um einige Fuß höher heben oder herunterlaſſen kann, nachdem der ſteigende oder fallende Strom ſolches erfordert. In ſolcher Abſicht hängen die Zapfenlager der Hauptwelle an Ketten, die ſich auf eine oberwärts liegende Welle aufwickeln laſſen, woran ein Sternrad befindlich iſt, das in das Getriebe eines andern Rades greift, womit das Aufwinden und Herunterlaſſen bewerkſtelliget wird. Weil auf ſolche Art das Sternrad an der Hauptwelle zwiſchen den beyden zur Seite liegenden Trillingen an den Wellen der Kammräder auf und nieder gelaſſen werden ſoll; ſo können dieſe Trillinge und ihre Wellen nicht jedesmahl in einerley Weite von einander liegen, ſondern die hintern Zapfen an den Wellen der Kammräder werden ebenfalls auf horizontal-bewegliche Lager gelegt, damit man ſie ein wenig von einander oder näher zuſammen rücken kann, nachdem die jedesmalige Lage der Hauptwelle ſolches erfordert. Am beſten werden die Lager der Kammräderwellen ſo weit erhöhet, daß ſie bey mittlern Waſſerſtande mit der Hauptwelle in einerley Horizontalebene liegen. Auf ſolche Art ſind die zunächſt am Sternrade anliegenden Ränder der Trillinge beym mittlern Waſſerſtande um den Durchmeſſer des Sternrades von einander entfernt, wenn alles gehörig in einander greift: da ſie dann ſowohl beym höhern als niedrigern Waſſerſtande zuſammen gerückt werden müſſen. Ausführliche Beſchreibungen und Zeichnungen findet man in Beyers

Schauplatz der Mühlenbaukunſt VII Cap. 44 u. f. S. Eine Panſtermühle von der bisher beſchriebenen Einrichtung heiſt Ziehpanſter. Wenn aber die Hauptwelle auf einem unbeweglichen Lager liegt, ſo heiſt ſie Stockpanſter.

Der VIII. Abſchnitt.

Vom Mittelpunct des Waſſerſtoſſes.

120 §.

Es iſt oben im 112 §. bey Berechnung der Gewalt des Waſſers gegen die Schaufeln des unterſchlächtigen Rades, der kürzern Ausführung wegen, noch vorausgeſetzt worden, daß alles Waſſer im Gerinne mit gleicher Geſchwindigkeit anſchlage, in welchem Fall alſo angenommen werden konnte, daß die mittlere Richtung des Drucks durch den Schwerpunct der Schaufeln gehe. Wenn man aber alles genau nehmen will; ſo läſt ſich dies nicht ſchlechthin vorausſetzen. Gewöhnlich wird das Waſſer vor dem Gerinne durch eine Vorſetzung, da wo der Fachbaum liegt, in ſeinem natürlichen Lauf gehemmet; alsdenn aber ſchieſſen, nach Aufziehung der Schutzbretter, nicht alle Theilchen mit gleicher Geſchwindigkeit durch die Ausgußlöcher (82. 83 §.). Beym niedrigen Waſſerſtande haben die Ausgußlöcher gewöhnlich eine ſo groſſe oder noch gröſſere Höhe, als die Höhe des Waſſerſtandes iſt, und alsdenn bekommt das

Gerinne eine Kröpfung, ſo, daß das Waſſer auf einer ſchiefen Ebene gegen die Schaufeln läuft. Bey ziemlich hohen Waſſerſtande können die Ausgußlöcher niedriger ſeyn, als der Waſſerſtand iſt. Weil nun dies dem durchſtrömenden Waſſer ſchon eine beträchtliche Geſchwindigkeit zuwege bringt, ſo kann in dieſem Fall das Gerinne ſelbſt horizontal liegen, und das Waſſer wird dennoch mit hinlänglicher Gewalt gegen die Schaufeln drücken. Wie nun der Druck ſelbſt zu berechnen ſey, werden folgende Unterſuchungen ergeben.

121 §.

Es iſt der Waſſerſtand AC gegeben nebſt der Höhe BC des Ausgußloches; (die hier niedriger als der Waſſerſtand iſt) das Waſſer läuft im horizontalliegenden Gerinne $CEKH$, und man ſucht die Stärke ſowohl, als auch die mittlere Richtung des Drucks gegen die Schaufel HK, indem ſie auf dem Boden des Gerinnes ſenkrecht ſteht. 22 Fig.

Aufl. In unbeſtimmter Höhe HL über dem Boden des Gerinnes ſey eine horizontale Ebene LMml gelegt, welche die Schaufel in LM, das Ausgußloch in lm ſchneidet, und es ſey Ha = dem Waſſerſtande CA. Alle in der Ebene LMml befindliche Waſſertheilchen ſchlagen mit der Geſchwindigkeit an, die der Höhe aL zugehört, alſo mit der Geſchwindigkeit $2\surd gx$, wenn $a\mathrm{L} = x$ iſt. Es ſey $\mathrm{L}\lambda = \Delta x$, und $\lambda\mu$ mit LM parallel, der Druck gegen das unbeſtimmte Stück GLMK der Schaufel = P, alſo der Druck gegen $\mathrm{L}\lambda\mu\mathrm{M} = \Delta\mathrm{P}$; ſo erhellet aus dem 98 u. 99 §., daß $\Delta\mathrm{P} > \mathrm{L}\lambda\mu\mathrm{M}\,.\,x$, aber $\Delta\mathrm{P} < \mathrm{L}\lambda\mu\mathrm{M}\,.\,(x + \Delta x)$ ſey, dafern, wie hier angenommen wird,

die Schaufel noch ruhet, und Kürze halber die eigene Schwere des Waſſers $\gamma = 1$ geſetzt wird. Das k im 99 §. iſt wegen der im 113 §. angeführten Urſache ebenfalls $= 1$ geſetzt. Es ſey $LM = b$; ſo iſt $L\lambda\mu M = b\Delta x$, alſo $\Delta P > bx\Delta x$ und $\Delta P < bx\Delta x + b\Delta x^2$. Hireaus folgt, es ſey des Verhältniſſes $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ Gränze $\frac{dP}{dx} = bx$, und dies giebt $P = b\int xdx + C$. Wenn nun $aG = a$ geſetzt wird, ſo muß $P = 0$ ſeyn, wenn $x = a$ iſt. Alſo erhält man $P = \frac{1}{2}bx^2 + C$, und $C = -\frac{1}{2}ba^2$, folglich $P = \frac{1}{2}b(x^2 - a^2)$. Setzt man ferner $aH = A$, ſo wird der geſammte Druck gegen die Schaufel $= \frac{1}{2}b(A^2 - a^2)$. Müſte man $k = 2$ ſetzen, ſo wäre dieſer Druck, wie man gleich ſiehet, doppelt ſo groß.

Wenn $Hq = \frac{1}{2}HI$, und qp vertical iſt, ſo erhellet, daß die mittlere Richtung des Drucks durch einen Punct dieſer Linie durchgehe, welchen man den Mittelpunct des Drucks (centrum impreſſionis) nennen kann. Iſt nun ω dieſer Punct, ſo muß das Moment $p\omega \cdot P$ der Summe aller Elementarmomente $bxxdx$ gleich ſeyn (140 §. Mech.) Es wird aber $b\int xxdx + C = \frac{1}{3}b(x^3 - a^3)$, weil dieſe Summe $= 0$ iſt, für $x = a$, alſo hat man $p\omega = \frac{\frac{1}{3}b(x^3 - a^3)}{P}$, wo $x = A$ geſetzt werden muß, um den Mittelpunct des Drucks auf die ganze Schaufel zu haben. Dies giebt $p\omega = \frac{2(A^3 - a^3)}{3(A^2 - a^2)}$.

122 §.

Wenn man annimmt, daß die Schaufel GHIK dem

dem Ausgußloch BCDE gleich und ähnlich ſey; ſo iſt der Druck gegen die Schaufel eben ſo groß, als der Druck des Waſſers gegen das Schutzbrett, ſo lange das Ausgußloch damit verſchloſſen bleibt. Nach dem 12 §. Hydroſt. iſt der Druck gegen die Fläche ACDF $= \frac{1}{2}A^2 b$, und gegen die Fläche ABEF $= \frac{1}{2}a^2 b$, welches vermittelſt der Integralrechnung eben ſo befunden wird. Alſo iſt der Druck gegen BCDE $= \frac{1}{2}b(A^2 - a^2)$, die eigene Schwere des Waſſers $\gamma = 1$ geſetzt. Weil eben dieſer Ausdruck $= \frac{1}{2}(A+a)(A-a)b$, $A-a = BC$, und $(A-a)b = BC \cdot CD$ der Inhalt der Fläche BCDE iſt; ſo iſt der Druck einer Waſſerſäule gleich, welche die Ebene BCDE zur Grundfläche, und die mittlere Arithmetiſche Proportionallinie zwiſchen AB und AC zur Höhe hat. Wenn man $CQ = \frac{1}{2}CD$ nimmt, und QP vertical ziehet, ſo geht die mittlere Richtung des Drucks durch O, wenn $PO = p\omega = \dfrac{2(A^3 - a^3)}{3(A^2 - a^2)}$ genommen wird.

123 §.

Man kann demnach bey Berechnung des Drucks gegen die Schaufel annehmen, als wennn alles Waſſer gegen die Schaufel mit der Geſchwindigkeit anſchlüge, die der Höhe $\frac{1}{2}(A+a)$ zugehört, alſo mit der Geſchwindigkeit $2\sqrt{\frac{1}{2}(A+a)g}$. Bey dieſer Vorausſetzung wäre die Menge des in einer Secunde anſchlagenden Waſſers $(A-a)b \times 2\sqrt{\frac{1}{2}(A+a)g}$. Dieſe Menge ſey $= D$, und die Geſchwindigkeit $2\sqrt{\frac{1}{2}(A+a)g} = C$; ſo erhält man $\dfrac{D \cdot C}{4g} =$

$\frac{1}{2}(A+a)(A-a)b$, alſo $P = \frac{D.C}{4g}$. Setzt man $\frac{1}{2}(A+a)=v$, und $(A-a)b=zz$, ſo hat man $P = vzz = zz \,.\, \frac{CC}{4g}$. Dieſe Ausdrücke für P kommen mit denjenigen völlig überein, die im 98 §. gefunden ſind. Dort war A die Menge des in einer Secunde würklich anſchlagenden Waſſers, vorausgeſetzt, daß alle Theilchen mit gleichen Geſchwindigkeiten anſchlagen. Hier iſt D dieſe Menge, in der Vorausſetzung, daß alle mit der Geſchwindigkeit $C = 2\sqrt{\frac{1}{2}(A+a)g}$ anſchlagen.

124 §.

Dies iſt aber der Druck des Waſſers im erſten Augenblick, da es gegen die noch ruhende Schaufel anſchlägt. So bald das Rad in Bewegung kommt, und der Mittelpunct des Drucks, welcher nach dem 122 §. gefunden wird, mit der Geſchwindigkeit c fortgeht; muß $P = zz \,.\, \frac{(C-c)^2}{4g}$ geſetzt werden (108 §.), d. i.

$$P = (A-a)b \times \frac{(2\sqrt{\frac{1}{2}(A+a)g} - c)^2}{4g}.$$

Weil nun $D = (A-a)b \times 2\sqrt{\frac{1}{2}(A+a)g}$, alſo $(A-a)b = \frac{D}{2\sqrt{\frac{1}{2}(A+a)g}}$ iſt; ſo wird auch

$$P = \frac{D}{4g} \times \frac{(2\sqrt{\frac{1}{2}(A+a)g} - c)^2}{2\sqrt{\frac{1}{2}(A+a)g}} = \frac{D.C}{4g} \,.\, \left(1 - \frac{c}{C}\right)^2.$$

Es

Es behalten demnach die Gleichungen für den Stoß des Waſſers gegen die Schaufeln eben die oben bereits gefundene Form, nur mit dem Unterſchied, daß die der Höhe $\frac{1}{2}(A + a)$ zugehörige Geſchwindigkeit ſtatt C geſetzt, und der Mittelpunct des Drucks durch eine beſondre Rechnung geſucht werden muß.

125 §.

Es bleibe alles, wie im 121 §., nur laufe das Waſſer im geneigten Gerinne auf der ſchiefen Ebene *CDIH* gegen die Schaufel herab: man ſucht die Stärke und mittlere Richtung des Drucks gegen die Schaufel *GHIK*, in dem Augenblick, da ſie auf dem Boden des Gerinnes ſenkrecht ſteht. 23 Fig.

Aufl. Es ſey $CQ = \frac{1}{2}CD$, und $PQqp$ eine durch Q auf CD ſenkrecht geſetzte Ebene, welche HI in q und GK in T halbirt, ſo geht die mittlere Richtung des Drucks durch einen Punct ω in Tq. Man ziehe TS und qa vertical, imgleichen QR und VX horizontal. Nun laufen die Waſſertheilchen an der oberſten Gränze BE des Ausguſſes mit der Geſchwindigkeit durch, die der Höhe $PV = SX$ zugehört, und fallen auf der ſchiefen Ebene überdem noch um die Höhe TX, alſo ſchlagen ſie in CK mit der Geſchwindigkeit $2\sqrt{g.ST}$ an (85 §.) Eben ſo erhellet, daß die Waſſertheilchen durch LM mit der Geſchwindigkeit $2\sqrt{g.ln}$ laufen, wenn auch ln vertical iſt. Wenn nun die ſchiefe Ebene DCHI gegen den Horizont unter dem Winkel η geneigt, und $pl = x$ iſt; ſo wird $ln = x \cos\eta$, und die Geſchwindigkeit der in LM anſchlagenden Waſſertheilchen $= 2\sqrt{gx\cos\eta}$. Alſo folgt, wie im 121 §., daß der Druck P auf

GLMK $= b\int x dx \cos\eta + C$ ſey, wenn HI $=$ LM $= b$ iſt. Iſt nun $pT = a$, und $pq = A$, alſo $P = 0$, für $x = a$, ſo erhält man $P = \frac{1}{2}b(x^2 - a^2)\cos\eta$, und für die ganze Schaufel $P = \frac{1}{2}b(A^2 - a^2)\cos\eta$ $= \frac{1}{2}b(A - a)(A + a)\cos\eta$: Wenn aber ω der Mittelpunct des Drucks iſt; ſo findet man

$$p\omega = \frac{\frac{1}{3}b(A^3 - a^3)\cos\eta}{P} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(A^3 - a^3)}{(A^2 - a^2)},$$

wie im 122 §.

Demnach iſt wiederum der Druck eben ſo ſtark, als wenn alle Waſſertheilchen mit einer der Höhe $\frac{1}{2}(A + a)\cos\eta$ zugehörigen Geſchwindigkeit anſchlügen, wo $A\cos\eta$ die Tiefe des unterſten, und $a\cos\eta$ die Tiefe des oberſten Randes der Schaufel unter der Horizontalfläche des geſchützten Waſſers iſt.

Setzt man nun in die dieſer Höhe zugehörige Geſchwindigkeit $= C$, und die Menge des Waſſers, ſo mit dieſer Geſchwindigkeit in einer Secunde anſchlagen würde, $= D$, ſo iſt wiederum $P = \frac{D.C}{4g}$. Wenn aber das Rad ſchon umläuft, und der Mittelpunct des Drucks mit der Geſchwindigkeit c fortgeht, ſo wird $P = \frac{D.C}{4g} \cdot \left(1 - \frac{c}{C}\right)^2$.

126 §.

Die Regel des 122 §. für den Fall, den die 22 Fig. ausdrückt, hat auch Belidor in der Architect. Hydraul. I. Buch III Cap. 575 §. Aber für den im 125 §. betrachteten Fall bringt er dem Anſehen nach eine andere Regel eben daſelbſt im 578 §. heraus. Nach derſelben wäre der Druck in dem Fall der

der 23 Fig. $= HI \times Tq \times \sqrt{\frac{1}{2}(PV+PQ)}\,.\,aq$. Allein in der Vorausſetzung, daß alles Waſſer durch BCDE mit einer Geſchwindigkeit laufe, die der Höhe $PZ = \frac{1}{2}(PV + PQ)$, durch GHIK aber mit einer Geſchwindigkeit, die die Höhe $\frac{1}{2}(ST + aq)$ zugehört: würden ſich die Flächen BCDE und GHIK, alſo ihre Höhen VQ, und Tq, umgekehrt, wie die Geſchwindigkeiten des Waſſers in dieſen Flächen verhalten. In dieſer Vorausſetzung alſo hätte man $VQ : Tq = \sqrt{\frac{1}{2}(ST + aq)} : \sqrt{\frac{1}{2}(PV + PQ)}$ und

$$Tq = \frac{VQ.\sqrt{\frac{1}{2}(PV + PQ)}}{\sqrt{\frac{1}{2}(ST + aq)}}.$$

Dies ſtatt Tq in den Ausdruck $P = \frac{1}{2}b\,(A - a)\,(A\cos\eta + a\cos\eta)$ (125 §.) $= HI\,.\,Tq\,.\,\frac{1}{2}(aq + TS)$ geſetzt; giebt $P = HI\,.\,VQ\sqrt{\frac{1}{2}(PV+PQ)}\,.\sqrt{\frac{1}{2}(ST+aq)}$. Iſt alſo $az = \frac{1}{2}(ST + aq)$, ſo wird $P = CD\,.\,VQ\sqrt{PZ}\,.\,az$, welches Belidors Regel iſt, nur mit dem Unterſcheid, daß er aq ſtatt az nimmt, welches, wenn alles genau genommen werden ſoll, deswegen unrichtig iſt, weil man nicht annehmen kann, daß alle Waſſertheilchen mit der Geſchwindigkeit, die der Höhe aq zugehört, anſtoſſen. Hätte man Tq nach der Regel des 89 §. berechnet, ſo würde Belidors Gleichung nicht gebraucht werden können.

127 §.

Um nun ein Beyſpiel zu haben, wie ſich der Druck des Waſſers gegen die Schaufeln berechnen, und hiernächſt die Einrichtung einer Mühle mit einem unterſchlächtigen Rade nach der Theorie beurtheilen laſſe; kann die im 419 §. der Mech. aus Belidors Architectura Hydraulica bereits mitgetheilte Beſchreibung einer der Mühlen zu la Fere dienen. Das

Gerinne dieſer Mühle hat die Einrichtung, welche die 22 Figur vorſtellt, und die mittlere Arithmetiſche Proportionallinie zwiſchen den Tiefen des oberſten und unterſten Randes des Ausguſſes unter der Oberfläche des Waſſers beträgt 5 Pariſer Fuß. Demnach iſt die zugehörige Geſchwindigkeit $2\sqrt{5g}$, wo eigentlich $g = 15,1$ Pariſ. Fuß iſt (181 §. Mech.) Belidor ſetzt $g = 15$ Fuß, und dies giebt $2\sqrt{5g} =$ 17,32 Fuß = 17 Fuß 3 Zoll 10 Lin. Der Halbmeſſer des Waſſerrades von der Bewegungs-Axe bis zum Mittelpunct des Waſſerdrucks gegen die Schaufeln hält 8 Fuß. Demnach iſt der Umfang des Rades 50,26 Fuß. Wenn die Mühle im vollen Gange iſt, ſo läuft das Waſſerrad in einer Minute 10mahl um, folglich läuft der Mittelpunct des Drucks mit einer Geſchwindigkeit von 8,376 Fuß in einer Secunde. Zieht man dies von der Geſchwindigkeit des anſchlagenden Waſſers ab, ſo bleibt die relative Geſchwindigkeit 8,94 Fuß, und es iſt die zuhörige Höhe $\frac{8,94^2}{4g} = 1,332$. Der Quadrat-Inhalt der Schaufeln iſt 2 Quadr. Fuß 2 Quadratzoll = 2,014 Q. F., alſo der Druck gegen die Schaufel = $2,014 \times 1,33 \times 70$ Pf. = $187\frac{1}{2}$ Pf. Statt deſſen hat Belidor bey dem dies Exempel a. a. O. 2 B. 1. Cap. 649 §. vorkommt, 200 Pfund angegeben, daher ſcheint es, als wenn der Quadrat-Inhalt der Schaufel 2 Q. Fuß 20 Q. Zoll ſtatt 2 Q. Zoll ſey. Denn in dieſer Vorausſetzung kommen $2,14 \times 1,332 \times 70 = 199\frac{1}{2}$ Pf., wofür man füglich 200 Pf. nehmen kann, zumahl da nach einigen Verſuchen der Pariſer Cub. Fuß Waſſer noch ein wenig ſchwerer als 70 Pf. iſt.

§. 128

Weil hier die Geſchwindigkeit des angegriffenen Puncts der Maſchine beynahe die Hälfte von der Geſchwindigkeit des anſchlagenden Waſſers beträgt, ſo erhellet, daß die Mühle nicht auf die möglichſt vollkommenſte Art eingerichtet ſey, weil ſonſt jene Geſchwindigkeit nur $\frac{1}{3}$ der letztern ſeyn müſte (113 §). Um alſo zu unterſuchen, wie ſich dieſe Mühle noch verbeſſern lieſſe; ſetze man, es ſey die Geſchwindigkeit des angegriffenen Puncts $= \frac{1}{3} . 17,32$ Fuß, alſo 5,773 Fuß, ſo iſt die relative Geſchwindigkeit des Waſſers $\frac{2}{3} . 17,32 = 11,546$ Fuß, und die zugehörige Höhe $= \frac{11\,546^2}{4g} = 2,22$. Demnach wäre in dieſem Fall der Druck gegen die Schaufel $= 2,14 \times 2,22 \times 70$ Pf. $= 332\frac{1}{2}$ Pf. Belidor a. a. O. 657 §. giebt 339 Pf. an, die aber nicht herauskommen, wofern nicht ein Cubicfuß Waſſer auf 71 bis 72 Pfund geſchätzt wird. Die Mühle könnte alſo mit Vortheil einen ſchwerern Läufer führen. Um das Gewicht deſſelben zu finden, dienet die Gleichung $X = \frac{18}{19} : \frac{c}{b} . \frac{aP - fF}{\frac{2}{3}r}$ $- \frac{e}{r} . \frac{1}{3}R$ (421 §. Mech.), wo $R = 35X$ iſt. (423 §. Mech.) Setzt man dieſen Werth ſtatt R in die angeführte Gleichung, ſo wird $X =$ $\frac{54acP - 54cfF}{57b . \frac{2}{3}r + 665b . \frac{2}{3}e}$; da dann X der Widerſtand des Getreides, und R das Gewicht des Läufers, des Mühleiſens und des daran befindlichen Tril-

Trillings zuſammen ausdrückt. Nach Belidors Bezeichnung iſt

$d = \frac{2}{3}r = 2$ Fuß	$a = 8$ Fuß
$h = \frac{2}{3}e = \frac{1}{72}$ Fuß	$b = 4$ Fuß
$p = P = 339$ Pfund	$c = \frac{3}{4}$ Fuß

Ferner iſt $f = \frac{1}{16}$ Fuß, und $F = \frac{1}{3}M + \frac{1}{2}(339 + 2 \times 339) = 1513$ Pf., wenn man nemlich die Friction an den Zapfen der Mühlwelle, wie im 422 §. Mech. berechnet, und die hieſigen 339 Pf. ſtatt der dortigen 200 Pfund braucht. Statt dieſes F ſchreibt Belidor q, ſo daß die Gleichung nach ſeiner Bezeichnung ſich in folgende verwandelt,

$$X = \frac{54acp - 54cfq}{57bd + 665bh}.$$ Nun wird

$54acp = 54 \times 8 \times \frac{3}{4} \times 339$ Pf. $= 109836$ Pf.
$54cfq = 54 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} \times 1513$ Pf. $= 3830$ Pf.

alſo $54acp - 54cfq = 106006$ Pf.

Ferner wird

$57bd = 57 \times 4 \times 2 == 456$
$665bh = 665 \times 4 \times \frac{1}{72} == 37$

alſo $57bd + 665bh = 493$

Dies giebt $X = \frac{106006}{493} = 215$ Pf., und $R = 35\,X = 7525$. Statt dieſer Zahlen findet Belidor a. a. O. $X = 220$ Pf., alſo $R = 7700$ Pfund. Aber dies Reſultat iſt falſch, und es finden ſich bey ihm zwey Rechnungsfehler. Er findet $54cfq = 3704$ ſtatt 3830, und $665bh = 27$ ſtatt 37. In der That iſt alſo das geſuchte Gewicht des Läufers mit dem Gewicht des daran befindlichen Mühleiſens und Trillings zuſammen nur 7525 Pf.

Letz-

Letzteres beträgt etwa 200 Pfund, daher bleiben für das Gewicht des Läufers 7325 Pf. Macht man nun dieſen Läufer im Durchmeſſer eben ſo groß, als den vorigen (421 §. Mech.), ſo verhalten ſich beyder Geſchwindigkeiten, wie die Geſchwindigkeiten des Waſſerrades. Es war aber die Geſchwindigkeit dieſes Rades im erſten Fall = 8,376, und im letzten Fall = 5,773 Fuß (127. 128 §.). Der erſte 4348 Pf. ſchwere Läufer konnte bey 53 Umläufen in einer Minute binnen 24 Stunden 120 Septiers Getraide mahlen. Der neue 7325 Pf. ſchwere Läufer wird $\frac{5,773}{8,376} \times 53$, d. i. $36\frac{1}{2}$ mahl in einer Minute umlaufen. Schließt man nun nach dem 424 §. Mech. $4348 \times 53 : 7325 \times 36\frac{1}{2} = 120$ zur vierten Zahl; ſo findet man 139 Septiers für die Menge des Getraides, ſo mit dieſem Läufer binnen 24 Stunden gemahlen werden kann, welches alſo 19 Septiers mehr ſind, als mit dem erſten Läufer gemahlen werden konnten.

Der IX. Abſchnitt.

Von oberſchlächtigen Rädern.

129 §.

Bey dem oberſchlächtigen Waſſer-Rade iſt der innere Umfang mit Brettern bedeckt, und die Schaufeln DEF, GHI, u. ſ. w. ſind aus zweyen Stücken unter einem gewiſſen Winkel zuſammen geſetzt, 25 Fig.

ſetzt, wovon das äuſſerſte Stück DE die Stoß-Schaufel, das innerſte Stück EF aber die Kropf- oder Riegel-Schaufel heiſt. Bey dieſer Einrichtung der Schaufeln hat man die Abſicht, daß das in denſelben aufgefangene Waſſer, welches in einer Rinne *ab* oben auf das Rad geleitet wird, bey der Umdrehung des Rades nicht ſogleich ablaufen, ſondern in den zwiſchen den Schaufeln befindlichen Zwiſchen-Räumen GHIFED, DEFSKM, u. ſ. w. wenigſtens gröſtentheils ſo lange ſtehen bleiben ſoll, bis ſie faſt den unterſten Stand in PQR*rqp* erreicht haben. Um die theoretiſche Unterſuchung zu erleichtern, kann man annehmen, daß das Waſſer am
24 Fig. Umfang des Rades über einen gewiſſen Bogen deſſelben gleichförmig verbreitet ſey, wie wenn es etwa in einer nach der Krümmung des äuſſern Umfangs gebogenen durchgängig gleich weiten und unten bey H*h* verſchloſſenen Röhre *Ggh*H befindlich wäre.

130 §.

24 Fig. **Am Umfang eines vertical ſtehenden Rades befindet ſich eine ſolche eben beſchriebene mit Waſſer angefüllte Röhre *GghH*: man ſucht das ſtatiſche Moment, womit das Gewicht des Waſſers das Rad zu drehen ſtrebt.**

Aufl. Es ſey AB ein verticaler Durchmeſſer des Rades, und N*n* ein unbeſtimmter Querſchnitt der Röhre, deſſen Ebene durch die horizontale Bewegungsaxe des Rades geht: und deſſen Flächen-Inhalt $= kk$ iſt. Ferner ſey M der Mittelpunct des Querſchnitts N*n*, und MP auf AB ſenkrecht; des Rades Halbmeſſer CM ſey $= r$. Das ſtatiſche Moment des unbeſtimmten Theils *Ggn*N der Waſſer-

ſerröhre ſey $= m$, ſo wird dies Moment um die Differenz Δm wachſen, wenn der Bogen $AM = s$ um das Stück $Mm = \Delta s$ und die Röhre $GgnN$ um das Stück $NnoO$ wächſt. Nun kommt der geometriſche Inhalt der kleinen Röhre $NnoO$ dem Product $Nn . Mm = kk . \Delta s$ deſto näher, je kleiner $Mm = \Delta s$ genommen wird, ſo wie ſich auch die Differenz Δm dem Werth $PM . kk . \Delta s$ nähert; und es iſt das Verhältniſſes $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ Gränze $\frac{dm}{ds} = PM . kk$, alſo $dm = PM . kk . ds$, die eigene Schwere des Waſſers $= 1$ geſetzt. Durch M ſey die Tangente MT gezogen, und man ſetze $EP = x$; ſo iſt $\frac{dx}{ds} =$

$$\text{coſ}\, PTM\ (15\ \text{§.}) = \frac{PT}{TM} = \frac{PM}{CM} = \frac{PM}{r},$$

alſo $ds = \frac{r}{PM} dx$. Dies in die Gleichung $dm = PM . kk . ds$ geſetzt, giebt $dm = kk . r . dx$, alſo $m = kk . r . x + C$, wo die conſtans $C = 0$ iſt, weil $m = 0$ für $x = 0$ ſeyn muß. Erſtreckt ſich nun die Waſſerröhre von D durch M bis K, und man ſetzt KF auf AB ſenkrecht; ſo muß man $x = EF$ ſetzen, um das Moment der ganzen Röhre DMK zu haben, welches alſo $= kk . r . EF$ wird.

Es ſey CL ein horizontaler Halbmeſſer des Rades und Ll vertical; ſo erhellet, daß das Rad von der Waſſerröhre eben ſo gedruckt werde, als wenn in L ein Gewicht, ſo groß als das Gewicht einer Waſſerſäule, herabhienge, die den Querſchnit Nn zur Grundfläche, und EF zur Höhe hätte.

131 §.

Wenn nun das Rad ſchon umläuft, und jeder Punct im Umfang deſſelben mit der Geſchwindigkeit fortgeht, die der Höhe n zugehört, ſo iſt das Bewegungsmoment der Kraft $= 2kk . EF . \sqrt{gu}$. Dafern ſich aber die Waſſerröhre von D durch M bis B erſtreckt, ſo iſt dies Bewegungsmoment $= 2kk EB \sqrt{gu}$. Statt der mit Waſſer gefüllten Röhre DLB, ſtelle man ſich nun eine Reihe mit Waſſer gefüllter Zellen am Umfang des oberſchlächtigen Waſſerrades vor, die alle mit gleichviel Waſſer gefüllt ſind, und nichts davon verſchütten, bis ſie beym Umlauf des Rades die unterſte Stelle erreicht haben; ſo wird das Bewegungsmoment beſtändig einerley bleiben, wenn oben bey Gg allemahl ſoviel zufließt, als unten bey B abläuft. Sollen alle Zellen beſtändig voll bleiben, wenn der Querſchnitt des zufließenden Waſſers $= kk$ iſt; ſo muß das Waſſer mit eben der Geſchwindigkeit zufließen, womit die Zellen umlaufen, alſo mit der Geſchwindigkeit $2\sqrt{gu}$, ſo, daß die Menge des in jeder Secunde zufließenden Waſſers $= 2kk\sqrt{gu}$ iſt. Wenn man alſo dieſe $= A$ ſetzt, ſo iſt das Bewegungsmoment $= A . BE$.

132 §.

25 Fig. Die Vollkommenheit eines oberſchlächtigen Waſſerrades erfordert alſo eine ſolche Einrichtung der Zellen DEFS, GHIF, daß keine derſelben das aufgefangene Waſſer verſchüttet, bevor ſie faſt die unterſte Stelle erreicht hat. Ueberdem wird erfordert, daß alle Zellen eine gleiche Menge Waſſer auffangen, damit ſich das Waſſer ſoviel möglich gleichförmig um den Umfang des Rades verbreite. In der That

iſt

iſt es ſo leicht nicht, dieſen Bedingungen in der Ausübung ein Genüge zu thun, und man muß ſich auch hier, wie in vielen andern Fällen der Ausübung, damit begnügen, die würkliche Ausführung der Theorie ſo nahe zu bringen, als die dabey obwaltenden Schwierigkeiten geſtatten. Gewöhnlich werden die Schaufeln zwiſchen den Felgen des Rades nach folgender Vorſchrift eingeſetzt. Es ſey CV ein Halbmeſſer des Rades bis an den äuſſerſten Umfang genommen, und TV die Breite der Felgen. Man nehme TB $= \frac{1}{3}$TV, und beſchreibe mit dem Halbmeſſer CB einen neuen Kreis, den die Werkleute den Theilriß nennen. Eben dieſen Kreis theile man in ſoviel gleiche Theile, als das Rad Schaufeln haben ſoll. Die Anzahl der Schaufeln ſey $= n$. und der Bogen BQ $=$ BO $= \frac{1}{n}$P, wenn P des ganzen Theilriſſes Umfang bedeutet. An die Puncte O und Q lege man das Lineal, und ziehe QP, ſo wird dies die Lage der Stoßſchaufel. Auf dieſe ſoll nach der gewöhnlichen Vorſchrift die Riegelſchaufel QR ſenkrecht geſetzt werden. (Man ſ. *Wolffii* Elem. Math. T. II. §. 923. Mech. p. 295. **Eberhards** Beyträge zur Matheſi Applicata 18 §. Mech. 25 S. **Leupold** Theatr. Mach. Gen. XX Cap. 552 §. 164 S. **Beyers** Schauplatz der Mühlenbaukunſt VIII Cap. 10 §. 66 S.) Andere aber ziehen dieſe Riegelſchaufel nach der Richtung des Halbmeſſers, wie bey den unterſchlächtigen Rädern, ſo, daß RQ die Verlängerung von CR iſt. Letzteres ſoll hier vorausgeſetzt werden, weil jene Lage der Riegelſchaufel vor dieſer eben keine Vorzüge hat. Die übrigen Schaufeln werden insgeſammt eben ſo ge-

zeichnet. So iſt pq die Verlängerung von Bq, DE die Verlängerung von hE, u. ſ. f.

133 §.

Um die Schlüſſe des 131 §. auf ein ſolches oberſchlächtiges Rad anzuwenden, ſetze man das Gerinne ab ſey um die Höhe $= a$ über eine durch V horizontal gelegte Ebene erhaben, alſo $b\text{V} = a$. Ferner ſetze man Kl auf AB ſenkrecht, ſo iſt $\text{B}l = b\text{V} - bl - \text{VB}$. Wenn nun bey K der Querſchnitt KL des auffallenden Waſſerſtrahls $= kh$ iſt; ſo wird die Geſchwindigkeit des Waſſers an eben dieſer Stelle der Höhe bl gehören, und die in einer Secunde in die Schaufeln fallende Waſſermenge iſt $= kk . 2\sqrt{g . bl}$. Es ſey $bl = u$, und die Geſchwindigkeit, womit die Winkelpuncte K, E, H, u. ſ. f. der Schaufeln im Umfang des Theilriſſes umlaufen, gehöre ebenfalls dieſer Höhe u, ſo kann man annehmen, das Waſſer lege ſich um des Theilriſſes Umfang ſo an, wie in der Röhre des 130 §. Wenn demnach allererſt die unterſte Schaufel in dem Punct B das Waſſer fallen lieſſe, und keine der übrigen etwas verſchüttete; ſo wäre das Bewegungsmoment der Kraft des Waſſers $= 2kk . \text{B}l . \sqrt{gu} = \text{A} . \text{B}l$, wenn die in einer Secunde auffallende Waſſermenge $2kk\sqrt{gu} = \text{A}$ geſetzt wird. Es war aber $\text{B}l = b\text{V} - bl - \text{VB}$, und $b\text{V} = a$, $bl = u$, alſo wird das Bewegungsmoment $= \text{A}(b - u - \text{VB})$.

Je kleiner demnach u iſt, deſto näher kommt das Bewegungsmoment dem Product Aa. Weil nun die Geſchwindigkeit der Schaufeln, wodurch hier die Geſchwindigkeit der Puncte K, E, H, u. ſ. f. im Umfang des Theilriſſes verſtanden werden kann, der Höhe u zugehört; ſo erhellet, daß der Effect der

Ma-

Maſchine deſto gröſſer ſey, je langſamer das Rad umläuft. Jedoch darf dieſe Geſchwindigkeit wegen anderer Urſachen auch nicht zu ſehr gering ſeyn, wie ſogleich weiter erhellen wird.

134 §.

Die Menge Waſſer *A*, ſo die Rinne *ab* in einer Secunde ſchüttet, der Halbmeſſer des Theilriſſes $CA = r$, nebſt der Geſchwindigkeit und der Anzahl der Schaufeln, oder Zellen, iſt gegeben: man ſucht, wie viel Waſſer jede Zelle auffängt.

Aufl. Es ſey u die derjenigen Geſchwindigkeit zugehörige Höhe, womit die Winkelpuncte K, E, H, u. ſ. f. der Schaufeln im Umfang des Theilriſſes umlaufen, alſo ihre Geſchwindigkeit $= 2\sqrt{gu}$; ſo iſt die Umlaufszeit des Rades $t = \frac{\pi r}{\sqrt{gu}}$, und in eben dieſer Zeit ſchüttet die Rinne *ab* eine Menge Waſſer $= \mathrm{A}t = \frac{\mathrm{A}\pi r}{\sqrt{gu}}$. Fangen nun alle Schaufeln, deren Anzahl $= n$ iſt, gleichviel Waſſer auf, ſo iſt die Menge, ſo eine jede derſelben auffängt, $= \frac{\mathrm{A}\pi r}{n\sqrt{gu}}$.

Man ſetze dieſe Menge Waſſer $=$ H, ſo hat man $\mathrm{H} = \frac{\mathrm{A}\pi r}{n\sqrt{gu}}$. Wenn alſo umgekehrt, dieſe Menge Waſſer gegeben iſt, und die übrigen data ebenfalls bleiben, ſo findet man die Geſchwindigkeit der Schaufeln aus der Gleichung $2\sqrt{gu} = \frac{2\mathrm{A}\pi r}{n.\mathrm{H}}$. So hat man auch die Anzahl der Schaufeln aus der

Gleichung $n = \frac{A\pi r}{H\surd gu}$, wenn die übrigen Stücke gegeben ſind.

Weil die Schaufeln die Menge Waſſer $H = \frac{A\pi r}{n\surd gu}$ auffangen müſſen; ſo beſtimmt dies ihren körperlichen Inhalt, der alſo nicht kleiner ſeyn muß, als $\frac{A\pi r}{n\surd gu}$. Daraus ergiebt ſich, daß die Zellen zwiſchen den Schaufeln deſto gröſſer ſeyn müſſen, je kleiner ihre Geſchwindigkeit iſt; und eben dies iſt die Urſache, weswegen u nicht ſo ſehr klein ſeyn kann.

135 §.

25 Fig. Wenn die Schaufeln am Umfang des Rades ſo eingeſetzt ſind, wie im 132 §. vorgeſchrieben iſt, und in die oberſte Zelle DEFSKM läuft ſo viel Waſſer, als ſie faſſen kann; ſo ſiehet man wohl, daß beym Umlauf des Rades dieſe Zelle beſtändig etwas verſchütten werde. Sie wird lange nicht alles aufgefangene Waſſer mehr enthalten, wenn ſie in die Lage *defskm* gekommen iſt. Fienge aber dieſe Zelle oben beym Ausguß nur ſo viel Waſſer auf, als ſie in der letzten Lage faſſet, ſo würde wenigſtens ſo lange einerley Menge Waſſer darin bleiben, bis die Zelle um die halbe Höhe des Rades geſunken wäre. Am vortheilhafteſten iſt es, die Einrichtung ſo zu machen, daß kein Waſſer aus einer ſolchen Schaufel ausläuft, bevor ſie faſt die unterſte Stelle bey B erreicht hat. In ſolcher Abſicht muß man wiſſen, wie groß der körperliche Raum ſey, den das Waſſer in der Zelle *defskm* einnimmt. Eine ganz genaue Berechnung deſſel-

deſſelben würde ein etwas weitläuftiges Verfahren erfordern, und dabey dennoch von keinem ſonderlichen Nutzen ſeyn, weil dieſe ganze Unterſuchung keine vollkommene Schärfe verſtattet. Deswegen kann hier eine ungefähre Berechnung genügen, die der Sache einigermaſſen nahe kommt. Wenn die Halbmeſſer Cs und Cf bis W und Z verlängert werden, ſo iſt die Figur $WZfs$ beynahe $= Ws \times ek$, und $kefs$ ungefähr $\frac{1}{3}WZfs$ oder $\frac{1}{3}Ws \times ek$. Da nun $kbde$ etwa eben ſo groß, als $kefs$ iſt, ſo kann man $bdefsk = \frac{2}{3}Ws \times ek$ ſchätzen. Eigentlich iſt $kefs$ etwas kleiner, und $kbde$ etwas gröſſer, als $\frac{1}{3}Ws \times ek$. Beyde zuſammen werden alſo dem Inhalt $\frac{2}{3}Ws . ek$ ziemlich nahe kommen. Es ſey die Breite der Felgen $Ws = f$, der Bogen zwiſchen den Schaufeln $ek = h$, die Länge der Schaufeln zwiſchen beyden Kränzen des Rades $= l$, ſo wird die Menge Waſſer, welche die Zelle $bdefsk$ faſſet, ungefähr $= \frac{2}{3}fhl$. Dieſer Raum muß alſo nicht kleiner als H, ſeyn. Setzt man ihn = H, ſo hat man $\frac{2}{3}fhl = \frac{A\pi r}{n\sqrt{gn}}$, und $h = \frac{1}{n}2\pi r$. Dies giebt $\frac{2}{3}fl = \frac{A}{2\sqrt{gu}}$. Wenn nun der Querſchnitt des bey K hereinfallenden Waſſers $= kk$ iſt; ſo hat man auch $kk = \frac{A}{2\sqrt{gu}}$ (131 §.), und dies giebt $\frac{2}{3}fl = kk$, oder $fl = \frac{3}{2}kk$. Es iſt noch vortheilhafter, wenn $\frac{2}{3}fhl > \frac{A\pi r}{n\sqrt{gu}}$ genommen wird, woraus $\frac{2}{3}f.l > \frac{A}{2\sqrt{gu}}$ folgt, und dem geſchieht ein Genüge, wenn man

$f.l = \frac{A}{\sqrt{gu}}$, alſo $f.l = 2kk$ ſetzt.

136. §.

Das oberſchlächtige Rad iſt nach der Vorſchrift des 132 u. f. §. eingerichtet, und die Geſchwindigkeit der Schaufeln iſt ſo groß, als die Geſchwindigkeit des hineinfallenden Waſſers: man ſucht das ſtatiſche Moment der Kraft, womit das Waſſer das Rad zu drehen ſtrebt, imgleichen den Effect der Maſchine, die von dem Rade getrieben wird.

Aufl. Die Figur ſey, wie im vor. §. gezeichnet, ſo kann man annehmen, daß die Schwerpuncte aller in den Zellen befindlichen Waſſerkörper im Umfang des ſo genannten Theilriſſes AKHB liegen. Wenn nun die Schaufel DEF ſo weit umgelaufen iſt, daß ſie jetzt die Lage PQR hat, ſo iſt aus dieſer Zelle alles Waſſer ausgelaufen; denn CB iſt vertical, alſo PQ horizontal. Die nächſt vorhergehende Zelle *pqr* faſſet noch einen Theil des aufgefangenen Waſſers, indem aber *pq* ſich in die Lage PQ drehet, läuft alles aus. Es ſey *qn* auf AB ſenkrecht, und wie vorhin, $VT = Ws = f$, $bV = a$, $bl = u$; ſo wird $Bn = r \sin v . \frac{8}{n} R$, wenn $CB = r$, und die Anzahl der Zellen $= n$ iſt. Folglich $nl = bV - bl - VB - Bn$ $= a - u - \frac{2}{3}f - r \sin v . \frac{8}{n} R$, oder $nl = a - u - b$, wenn man $Vn = \frac{2}{3}f + r \sin v \frac{8}{n} R = b$ ſetzt. Ferner

ner ſey bey K der Querſchnitt des auffallenden Waſſerſtrahls $= kk$, ſo iſt das ſtatiſche Moment der Kraft $= kkr(a-u-b)$. Aber das Bewegungsmoment, oder Effect der Maſchine, wird

$$= kk(a-u-b)\,2\sqrt{gu} = A(a-u-b).$$

137 §.

Damit die Maſchine dieſen Effect würklich zu Stande bringe, muß ſie folgende Einrichtung haben. Wenn μ die Anzahl der Umläufe des Rades in einer Secunde ſeyn ſoll, ſo ſetze man $\mu = \frac{\sqrt{gu}}{\pi r}$. Und wenn der Widerſtand Q in der Entfernung q von der Axe der letzten Welle angebracht iſt, dieſe Welle aber νmahl in einer Secunde umlaufen ſoll, ſo muß $\nu = \frac{A(a-u-b)}{2\pi d Q}$ ſeyn (382 §. Mechan.). Die Umlaufszeit des Hauptrades $t = \frac{\pi r}{\sqrt{gu}}$ richtet ſich nach der Gröſſe des Halbmeſſers r, und des letztern Gröſſe richtet ſich nach der Höhe des Gefälles a. Es muß nämlich $2r + \frac{4}{3}f < a$ ſeyn.

138 §.

Wenn die Schaufeln langſamer umlaufen, als das Waſſer anſchlägt, ſo würkt das Waſſer auch zugleich durch den Stoß gegen die Schaufeln. Es ſey $bl = u$, alſo bey KL des Waſſers Geſchwindigkeit $= 2\sqrt{gu}$, aber der Schaufeln Geſchwindigkeit $= 2\sqrt{gx}$; ſo füllen ſich alle Schaufeln wenigſtens mit eben der Menge Waſſer, wie vorhin an, wenn $x < u$ iſt, und daraus entſteht am Umfange des Rades ebenfalls eine Kraft $= kk(a-u-b)$, deren Be-

wegungsmoment $= A(a-u-b)$ iſt. Wegen des Stoſſes aber leidet die Schaufel eine Gewalt $= \frac{A(\sqrt{u}-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{gu}}$ (109 §.), welche mit $2\sqrt{gx}$ multiplicirt, das Bewegungsmoment $=$ $A(\sqrt{u}-\sqrt{x})^2\sqrt{\frac{x}{u}}$ giebt. Dies iſt am gröſten, wenn $\sqrt{x}=\frac{1}{3}\sqrt{u}$ iſt, und in dem Fall wird dies Moment $=\frac{8}{27}Au$. Beyder Summe iſt alſo nunmehro $=A(a-b-u+\frac{8}{27}u)=A(a-b-\frac{19}{27}u)$. Dies iſt nur ein ungefährer Ueberſchlag, um zu zeigen, daß bey dieſer Einrichtung kein ſonderlicher Vortheil vor jener zu erhalten ſtehe, wo $u=x$ iſt, wenn man u klein genug nehmen kann.

139 §.

Der Halbmeſſer des Theilriſſes $CQ=r$, nebſt der Breite der Radfelgen $TV=f$, und der Anzahl n der Stoßſchaufeln iſt gegeben: man ſoll ihre Breite PQ finden.

Aufl. Es iſt der Winkel $BCQ=\frac{4}{n}R$, und $CQP=90°+\frac{4}{n}R$, alſo $\cos CQP=-\sin\frac{4}{n}R$. Ferner hat man $CQ=r$, $CP=r+\frac{2}{3}f=\sqrt{(rr-2r.PQ.\cos CQP+PQ^2)}$. Dies giebt $\frac{4}{3}rf+\frac{4}{9}ff$ $=2r.PQ.\sin\frac{4}{n}R+PQ^2$; alſo $PQ=$ $-r\sin\frac{4}{n}R+\sqrt{(\frac{4}{3}f(r+\frac{1}{3}f)+rr\sin\frac{4}{n}R^2)}$.

Wenn

Wenn umgekehrt die Breite PQ der Schaufeln nebſt den übrigen Stücken gegeben iſt, ſo findet man ihre Anzahl aus der Gleichung

$$\sin\frac{4}{n}R = \frac{\frac{4}{3}f(r+\frac{1}{3}f) - PQ^2}{2r.PQ}.$$

Iſt nämlich der dieſem Sinus zugehörige Winkel $= \alpha$, ſo hat man $\frac{4}{n}R = \alpha$, und $n = \frac{4R}{\alpha}$.

Die erſte Aufgabe läſt ſich vermittelſt der Logarithmen nach dem 448 §. Geom. noch bequemer auflöſen, wenn man erſtlich den Winkel CPQ, und hierauf, nachdem daraus QCP gefunden worden, die Seite PQ ſucht. Es ſey das ganze Rad 12 Fuß hoch, und die Breite der Felgen $f = 9$ Zoll, ſo iſt $r = 5\frac{1}{2}$ Fuß, und $CP = r + \frac{2}{3}f = 6$ Fuß. Ferner iſt der Umfang des Theilriſſes $= 11 \times 3.1415926$ $= 34$ Fuß $6\frac{7}{10}$ Zoll. Sollen nun die Schaufeln ungefähr 1 Fuß weit von einander ſtehen, ſo muß das Rad 34 Schaufeln haben, und es wird der Winkel $BCQ = 10° 35\frac{1}{3}'$, alſo $CQO = 79° 24\frac{2}{3}'$. Man ſchlieſſe

$$6 \text{ Fuß} : \sin 79° 24\tfrac{2}{3}' = 5\tfrac{1}{2} \text{ Fuß} : \sin CPQ.$$
72 Zoll 66 Zoll

ſo giebt die Rechnung

$$l\sin 79° 24\tfrac{2}{3}' = 9.9925407$$
$$l66 = 1.8195439$$
$$11.8120846$$
$$l72 = 1.8573325$$
$$l\sin CPQ = 9.9547521$$

alſo $CPQ = 64° 18'$, und $QCP = 15° 7'$. Es iſt ferner

$$\sin 79^\circ\ 24\tfrac{2}{3}' : 72 \text{ Zoll} = \sin 15^\circ\ 7' : PQ$$

$$\begin{array}{rl} l72 = & 1.8573325 \\ l\sin 15^\circ\ 7' = & 9.4162832 \\ \hline & 11.2736157 \\ l\sin 79^\circ\ 24\tfrac{2}{3}' = & 9.9925407 \\ \hline lPQ = & 1.2810750 \end{array}$$

alſo PQ = 19 Zoll. Leupold, der im Theatr. Mach. Gen. XX Cap. 552 §. 164 S. die übrigen vorausgeſetzten Abmeſſungen angiebt, ſetzt für die Breite der Schaufeln 18 Zoll, vermuthlich, weil wegen der Dicke der Kropfſchaufel von der Breite der Riegelſchaufel etwa 1 Zoll abgehet.

Wenn man PQ = 18 Zoll ſetzt, ſo giebt die umgekehrte Rechnung aus der Gleichung $\sin \frac{4}{n} R = \frac{\frac{4}{3}f(r + \frac{1}{3}f) - PQ^2}{2r \,.\, PQ}$ die Anzahl der Schaufeln, die das Rad haben muß. Weil nämlich $f = 9$ Zoll, $r = 66$ Zoll, ſo wird $\sin \frac{4}{n} R = \frac{504}{2376}$, wo man mit dem Halbmeſſer der Tafeln multipliciren muß, um den Sinus der Tafeln zu haben. Es wird aber

$$\begin{array}{rl} l504 + l\sin.\text{tot.} = & 12.7024305 \\ l2376 = & 3.3758464 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{alſo } l\sin \frac{4}{n} R = 9.3265841$$

und $\frac{4}{n} R = 12\tfrac{1}{4}^\circ$. Dividirt man nun 360° durch $12\tfrac{1}{4} = \frac{49}{4}$, ſo erhält man 30 für die Anzahl der Schaufeln.

140 §.

140 §.

Wenn von der Spitze Q des Winkels einer Schaufel auf die nächſtfolgende BX die ſenkrechte Linie QN gezogen wird, ſo iſt dies die geringſte Breite des ſogenannten **Waſſerſacks** zwiſchen den Schaufeln, wo das Waſſer, wie bey KL, durchfallen muß. Die Weite dieſer Oefnung QN läſt ſich ſo finden. Wenn man die Sehne BQ ziehet, ſo iſt der Winkel

$CBQ = 90° - \frac{2}{n} R$, und $CBX = 90° + \frac{4}{n} R$; alſo

$QBX = CBX - CBQ = \frac{6}{n} R$, und $QN =$

$BQ \sin \frac{6}{n} R = 2r \sin \frac{2}{n} R \sin \frac{6}{n} R$. Iſt, wie im

vor. §., $n = 30$, ſo hat man $\frac{2}{n} R = 6° 7\frac{1}{2}'$; $\frac{6}{n} R =$

$18° 22'$, und die Rechnung giebt

$$
\begin{aligned}
l \sin 6°\ 7' &= 9.0275669 \\
l \sin 18°\ 22' &= 9.4984442 \\
l\ 132 \text{ Zoll} &= 2.1205739 \\
\hline
&\ \ 20.6465850 \\
\text{ſubtr. } 2\, l \sin. \text{tot.} &= 20. \\
\hline
l\, QN &= 0.6465850
\end{aligned}
$$

alſo $QN = 4.43$ Zoll.

Weil das Aufſchlage-Waſſer bey KL durch dieſen Querſchnitt in den Waſſer-Sack einfallen muß, ſo darf derſelbe nicht zu eng ſeyn, und richtet ſich nach dem Querſchnitt kk des Aufſchlage-Waſſers. Da l die Länge der Schaufeln iſt, ſo muß $QN \times l > kk$ ſeyn. Sollte QN ſehr klein ausfallen, ſo kann man

zwar

zwar dieſer Bedingung ein Genüge thun, wenn man h deſto gröſſer nimmt. Allein das Rad muß auch nicht gar zu breit ſeyn. Dies iſt die Urſache, weswegen QN nicht leicht kleiner, als 4 Zoll ausfallen muß, wodurch alſo ebenfalls die Anzahl der Schaufeln gewiſſermaſſen beſtimmt wird, weil QN deſto kleiner wird, je gröſſer man n nimmt. Wenn man mit dieſen Betrachtungen die Gleichung

$$\sin \frac{4}{n} R = \frac{4f(r + \frac{1}{3}f) - PQ^2}{2r . PQ}$$

verbindet, ſo ergiebt ſich, daß $\frac{4}{n}$ R deſto kleiner, alſo n deſto gröſſer werde, je gröſſer PQ bey einerley r und f wird, alſo auch umgekehrt die Breite der Schaufeln PQ deſto gröſſer werde, je gröſſer ihre Anzahl iſt. Je mehr Schaufeln alſo eben das Rad bekömmt, deſto enger und tiefer werden die Waſſer-Säcke.

141 §.

Wenn man zwey verſchiedene Räder mit einander vergleicht, und dabey annimmt, daß der Bogen BQ zwiſchen den Schaufeln für beyde einerley ſeyn ſoll, ſo iſt die Anzahl der Schaufeln den Halbmeſſern proportional, und der Winkel BCQ verhält ſich umgekehrt wie die Halbmeſſer. Ein doppelt ſo hohes Rad bekömmt doppelt ſo viel Schaufeln, aber der Winkel BCQ wird nur halb ſo groß. Da nun kleine Winkel ſich beynahe wie ihre Sinus verhalten, ſo wird das Product $\sin \frac{2}{n}$ R $\sin \frac{6}{n}$ R beynahe viermahl kleiner. Wenn alſo gleich der Factor $2r$ doppelt ſo groß wird, ſo wird doch das Product

$2r \sin\frac{2}{n} R \sin\frac{6}{n} R$, alſo QN beynahe nur halb ſo groß, als vorhin. In der Gleichung $PQ = \sqrt{\left(\frac{4}{3}f(r+\frac{1}{3}f)+r^2 \sin\frac{4}{n}R^2\right)} - r \sin\frac{4}{n} R$ bleibt der negative Theil $r \sin\frac{4}{n} R$ beynahe von einerley Gröſſe, aber der poſitive Theil wächſt, daß alſo PQ gröſſer wird. Je höher demnach die Räder ſind, deſto enger und tiefer werden die Waſſer-Säcke bey einerley Schaufel-Weite. Um dies alſo zu vermeiden, muß man bey hohen Rädern die Schaufeln weiter auseinander ſetzen, wenn man die übrige Einrichtung, ſo wie ſie im 132 §. vorgeſchrieben iſt, beybehalten will. Allein wenn man die Schaufeln viel weiter als um einen Fuß aus einander ſetzen will, ſo verliert man zu ſehr den Vortheil der gleichförmigen Vertheilung des Waſſers am Umfang des Rades. Deswegen muß man bey Rädern, die viel höher als 12 Fuß ſind, ſelbſt die Verzeichnung der Lage der Schaufeln etwas anders einrichten. Es kommt nur darauf an, daß der Winkel CQP = CBX bey eben der Anzahl der Schaufeln etwas gröſſer genommen werde, ſo wird nicht allein QN gröſſer, ſondern auch PQ kleiner, wie ſchon aus Betrachtung der Zeichnung zur Genüge erhellet. Statt deſſen, daß man den Bogen QO = 2QB nach dem 132 §. nimmt, nehme man QU = 3QB, lege an U und Q das Lineal, und ziehe UΠ für die Lage der Stoßſchaufel, ſo iſt nun $UCQ = \frac{3 \times 4}{n} R$ und $CQ\Pi = 90°$

+

$+ \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{n}$ R, da vorhin CQP $= 90° + \frac{4}{n}$ R war. Nimmt man BY $=$ 3BO und ziehet Bx durch B und Y, ſo iſt auch CB$x = 90° + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{n}$ R, alſo QB$x =$ CBx - CBQ $= \left(\frac{3 \times 4}{2n} + \frac{2}{n}\right)$ R $= \frac{6}{n}$ R $+ \frac{2}{n}$ R, da vorhin QBX $= \frac{6}{n}$ R war. Dies giebt alſo kürzere Schaufeln und breitere Oefnungen.

142 §.

Auf dieſe letztere Art verzeichnet Beyer die Schaufeln des 6 Ellen hohen Rades im Theatro Mach. Molar. VIII Cap. 10 §. 66 S. Nach ſeiner Vorſchrift ſollen die Schaufeln 12 bis 14 Zoll weit aus einander ſtehen, und die Felgen einen Fuß breit ſeyn. Alſo iſt der Halbmeſſer des Theilriſſes $r =$ $5\frac{1}{3}$ Fuß $=$ 64 Zoll, und der Umfang $=$ 128 . 3,14159 $=$ 402 Zoll. Nimmt man 13 Zoll Weite zwiſchen den Schaufeln, ſo muß das Rad $\frac{402}{13}$ d. i. 31 Schaufeln haben, wofür man 32 wegen der bequemern Eintheilung nimmt, da dies die Zwiſchen-Weite ſehr wenig ändert. Will man hieraus die Breite der Schaufeln berechnen, ſo hat man CQΠ $= 106°\ 52\frac{1}{2}'$, CQ $=$ 64 Zoll CΠ $=$ 72 Zoll und man ſchlieſt

$$72 \text{ Zoll} : \sin 73°\ 7\tfrac{1}{2}' = 64 \text{ Zoll} : \sin C\Pi Q$$

$$l \sin l\, 73°\ 7\tfrac{1}{2}' = 9.9808848$$
$$l 64 = 1.8061800$$
$$11.7870648$$
$$l 72 = 1.8573325$$
$$l \sin C\Pi Q = 9.9297323$$

alſo

alſo $C\Pi Q = 58° \; 17'$ und $QC\Pi = 14° \; 50'$.
Man erhält ferner

$$l \sin 73° \; 7\tfrac{1}{2}' : 72 \text{ Zoll} = l \sin 14° \; 50' : Q\Pi$$

$$l \sin 14° \; 50' = 9.4082539$$
$$l 72 = 1.8573325$$
$$11.2655864$$
$$l 73° \; 7\tfrac{1}{2}' = 9.9808848$$
$$l Q\Pi = 1.2847016$$

alſo $Q\Pi = 19$ Zoll. Die Schaufel ſelbſt wird alſo wegen der Dicke der Kropfſchaufel nur etwa 18 Zoll breit.

Die Breite der Oefnung $Q\nu$ giebt die Gleichung

$$Q\nu = BQ \; \sin QBx = 2r \sin \frac{2}{n} R \sin \frac{8}{n} R =$$

$2r \sin 5° \; 37\tfrac{1}{2}' \sin 22° \; 30'$, wo $r = 64$ Zoll iſt, und man findet

$$l \; 128 = 2.1072100$$
$$l \sin 5° \; 37' = 8.9906602$$
$$l \sin 22° \; 30' = 9.5818397$$
$$l Q\nu = 20.6807099 - 2 \; l \,\text{ſin. tot.}$$

alſo $Q\nu = 4{,}794$ Zoll.

143 §.

Die oberſchlächtigen Mühlräder ſind gewöhnlich 12 bis 16 Fuß hoch, und für dieſe iſt die bisher beſchriebene Einrichtung der Schaufeln brauchbar. Die Rinne *ab* iſt gewöhnlich ſo angelegt, daß das Waſſer in derſelben 6 Zoll hoch ſteht, und die Breite *ad* iſt ein paar Zoll kleiner als die Breite des Rades. Wie hieraus die Menge des in einer Secunde durch die vordere Oefnung bey *b* laufenden Waſſers berechnet werden könne, iſt im V. Abſchn. gewieſen worden.

worden. Hat man keinen ſattſamen hohen Fall, aber zulänglich Waſſer, ſo werden zuweilen niedrige aber dagegen viel breitere Räder gebraucht, die alsdenn **Walzen-Räder** heiſſen. Bey wenigem Waſſer und hinlänglich hohen Fall werden deſto höhere Räder beſonders alsdenn gebraucht, wenn die Maſchine dienen ſoll, Laſten zu heben. Räder von 16 bis 36 Fuß Höhe und 18 bis 26 Zoll Breite in Schaufeln, die alsdenn **Kunſträder** heiſſen, werden vornemlich in Bergwerken gebraucht: theils vermittelſt der unten zu beſchreibenden Pumpwerke das unterirdiſche Waſſer in die Höhe zu bringen; zum Theil auch die Erze zu Tage zu bringen, wie es in der Bergſprache heiſt, oder die Erze aus den Schichten heraufzuziehen. Zu der letzten Abſicht aber bekommen ſie eine beſondere Einrichtung; ſie heiſſen ſodann **Kehr-Räder**, und ein Kehrrad unterſcheidet ſich von einem Kunſtrade dadurch, daß es zwo Reihen Schaufeln neben einander hat, deren Oefnungen einander entgegen ſtehen, ſo daß es, nachdem das Waſſer in die eine oder andere Reihe Schaufeln fällt, vorwärts oder rückwärts umgehen kann. Dies wird deswegen erfordert, weil das Rad, indem es eine mit Erz gefüllte Tonne herauf zieht, zugleich eine ledige herab ſinken läſt, die nachdem ſie unten wieder angefüllt worden, bey entgegengeſetzter Umdrehung des Rades wider heraufgewunden wird, indem nun die andre vorher ausgeſtürzte Tonne ledig herab ſinkt. Die ganze zu dieſer Abſicht erforderliche Einrichtung der Maſchine beſchreibt Calvör in den Actis Hiſtorico-Chronologico-Mechanicis circa metallurgiam in Hercynia ſuperiori II Th. 3 Abth. 3 u. f. §. 36 u. f. S.

145 §.

Wenn die oberſchlächtigen Räder ihre möglichſt vollkommene Einrichtung haben, ſo kann man bey eben der Menge Waſſer und eben dem Gefälle mit ihnen ungleich mehr, als mit den unterſchlächtigen ausrichten. Es ſey der Waſſer-Aufwand für jede Secunde = A, und das Gefälle = a. Wollte man nun das Waſſer in einem Behälter ſammlen, wie im 121 §., und unten das Ausguß-Loch BCDE an- 22.
bringen, damit das Waſſer mit der Geſchwindigkeit Fig.
$2\sqrt{ag}$ an die Schaufeln des unterſchlächtigen Rades anſchlagen müſte, ſo würde doch der gröſte mögliche Effect der Maſchine nur = $\frac{8}{27}$ A . a ſeyn. (113 §.). Läſt man aber das Waſſer auf ein oberſchlächtiges Rad fallen, ſo iſt der Effect der Maſchine = A $(a - u - b)$ (136 §.), wo $u + b = bh + Vn$ 25
bey 16 bis 17 Fuß Gefälle etwa auf 3 bis $3\frac{1}{2}$ Fuß Fig.
geſchätzt werden kann, folglich etwa = $\frac{1}{5} a$ iſt. Daher iſt der Effect der Maſchine = $\frac{4}{5}$ A . a; und weil der Bruch $\frac{4}{5}$, durch $\frac{8}{27}$ dividirt, den Quotienten $\frac{27}{10}$ giebt, der beynahe = 3 iſt; ſo erhellet, daß der Effect des oberſchlächtigen Rades beynahe dreymahl größer, als der Effect des unterſchlächtigen ſey.

146 §.

Belidor ſcheint nicht viel von oberſchlächtigen Rädern zu halten in der Architect. Hydraul. II B. I Cap. 643. u. f. §., und es hat nach ſeiner Beſchreibung das Anſehen, als ob man damals in Frankreich nur ſchlecht eingerichtete oberſchlächtige Räder gehabt habe, weil er von allen ohne Unterſcheid ſagt, wie ſie darin mangelhaft blieben, daß ſie einen gu-

ten Theil des geſchöpften Gewäſſers wieder verlieren, maßen ſich ſolches ſeitwärts hinaus ſtürze. Er räth deswegen an, auch bey wenigem Waſſer, und genugſam hohen Abfall, das unterſchlächtige Rad dem oberſchlächtigen vorzuziehen. Dies letztere gründet ſich aber zugleich auf eine unrichtige Berechnung der Würkung des oberſchlächtigen Rades, die er im 645 und 646 §. eben ſo anſtellt, wie ſie nach den oben im 113 §. vorgetragenen Regeln für das unterſchlächtige Rad geführt werden muß. Er ſiehet die Sache ſo an, als wenn das oberſchlächtige Rad blos durch den Stoß des auffallenden Waſſers umgetrieben werde: und wenn dies ſeine Richtigkeit hätte, ſo wären freylich die unterſchlächtigen Räder allemal den oberſchlächtigen weit vorzuziehen. Belidor hat folgendes Beyſpiel. Das Waſſer im oberſchlächtigen Mühlenbette ab ſtehe hinter dem Schutzbrett bey b auf 20 Zoll Höhe, und der Ausguß ſey 8 Zoll hoch. Um die mittlere Geſchwindigkeit des durchſtrömenden Waſſers zu berechnen, ſetze man im 82 §., $a = 20$ Zoll, $\alpha = 12$ Zoll, alſo $a - \alpha = 8$ Zoll, $c = 2\sqrt{20.g} = 120$ Zoll, $k = 2\sqrt{12.g} = 92{,}95$ Zoll; alſo die mittlere Geſchwindigkeit $= \frac{2}{3} . \frac{ac - \alpha k}{a - \alpha} = 107.7$ Zoll, und die zugehörige Höhe 16,1 Zoll. Iſt nun die Grundlinie des Ausguſſes $= b$, alſo der Quadrat-Inhalt $= b \times 8$ Q. Z., ſo iſt die Menge des durchſchieſſenden Waſſers $= 107.7 \times 8 \times b = 861{,}6 \times b$. Cub. Zoll.

Nun ſey die ganze Höhe des Gefälles $a\alpha = 9$ Fuß, man mache einen eben ſo hohen Waſſerbehälter, und bringe, wie im 121 §., unten den Ausguß $\gamma\delta$ an, der mit

mit dem obigen einerley Grundlinie hat, ſo muß die Höhe kleiner als 8 Zoll ſeyn, wenn nur eben ſo viel Waſſer, wie oben durchſchieſſen ſoll. Da das ganze Gefälle 108 Zoll beträgt, ſo kann man die Höhe auf 100 Zoll ſchätzen, welche der mittlern Geſchwindigkeit des durch den untern Ausguß laufenden Waſſers zugehört. Nun ſchätzt Belidor den Effect der Maſchine ſowohl in dem einen als auch in dem andern Fall nur auf $\frac{8}{27}$ A. a, wenn A der Waſſer-Aufwand, und a das Gefälle iſt. Weil alſo hier nach ſeiner Rechnung für das oberſchlächtige Rad $a = 16$ Zoll, für das unterſchlächtige $a = 100$ wird; ſo verhält ſich der Effect des unterſchlächtigen Rades zum Effect des oberſchlächtigen, wie $100 : 16 = 25 : 4$, und man würde nach dieſer Rechnung mit dem unterſchlächtigen Rade wenigſtens ſechsmal mehr als mit dem oberſchlächtigen ausrichten. Allein einmal iſt hiebey gar nicht in Betrachtung gezogen, daß das Waſſer vom Ausguß bey b bis in die oberſte Sackſchaufel bey KL noch um eine Höhe von 1 bis $1\frac{1}{2}$ Fuß herab fällt, und alſo bey KL ſchon mehr Geſchwindigkeit hat, als es beym Durchſchuß durch den Ausguß bey b hatte. Schon dieſerwegen würde der Effect des oberſchlächtigen Rades etwas größer herauskommen. Fürs zweyte iſt dieſe Berechnung des Effects ganz unrichtig, und muß vielmehr ſo angeſtellet werden. Es iſt $A = 861{,}6 \times b$, und $a = 100$ Zoll, alſo der Effect des unterſchlächtigen Rades höchſtens $= \frac{800}{27} . 861 . 6 \times b = 29{,}6 \times A$. Aber der Effect des oberſchlächtigen iſt = $A(a-(bl+Vn))$ (136 §.). Wenn alſo auch $bl + Vn$ $= 2\frac{1}{2}$ Fuß, oder 30 Zoll geſchätzt wird, ſo bleibt doch der Effect des oberſchlächtigen Rades, wenn

alles gehörig eingerichtet iſt, $= 70 . A$. Er iſt alſo wenigſtens $2\frac{1}{3}$ mähl größer, als der Effect des unterſchlächtigen Rades.

147 §.

16 Fig. Wenn man keinen hinlänglich hohen Abfall des Waſſers haben kann, ſo läſt ſich die Einrichtung auch ſo machen, daß das Waſſer aus dem Gerinne *ab* ſeitwärts in die Sackſchaufel DEFGHI eines Rades fällt, das übrigens eben ſo, wie die bisher beſchriebenen oberſchlächtigen Räder eingerichtet iſt. Das Rad iſt bey dieſer Einrichtung etwa doppelt ſo hoch, als das Gefälle. Nun ſey PQR diejenige Schaufel, welche das Waſſer fallen läſt, und QN horizontal; KV ſey das ganze Gefälle $= a$, KM $= u$ die Tiefe der oberſten Schaufel, worin das Waſſer fällt, unter dem Waſſerpaß und VN $= b$: ferner ſey A der Waſſer-Aufwand für eine Secunde. Wenn nun die Schaufeln mit der Geſchwindigkeit $2\sqrt{gu}$ umlaufen, ſo iſt das Bewegungsmoment der Maſchine $= A(a - u - b)$. So lange demnach $u + b < \frac{19}{27} a$ iſt, ſo lange bleibt $A(a - u - b) > \frac{8}{27} Aa$, folglich der Effect größer, als man mit einem unterſchlächtigen Rade zuwege bringen könnte. Wäre z. E. das Gefälle 4 Fuß, und man wollte ein 8 Fuß hohes Rad brauchen, ſo läſt ſich die Einrichtung ſo machen, daß $u + b$ etwa $1\frac{1}{2}$ Fuß beträgt, und es wird $A(a - (u + b)) = 2\frac{1}{2} . A$. Beym unterſchlächtigen Rade wäre der Effect nur $1\frac{5}{27} . A$, alſo in jenem Fall mehr als nochmal ſo groß. Die oberſchlächtigen Räder ſind demnach in allen ſolchen Fällen mit Vortheil zu gebrauchen, wo man nur wenig Aufſchlage-

Waſſer

Waſſer hat, und wenigſtens 3 bis 4 Fuß Gefälle. Bey hinlänglicher Menge Waſſer und ſehr geringem Gefälle ſind dagegen die unterſchlächtigen Räder nützlich.

Der X. Abſchnitt.

Von horizontalen Waſſerrädern, und ihnen ähnlichen verticalen Rädern.

148 §.

Die Ebene des Rades *OPQ* wird von der Ebene der Schaufel *RS* in der graden Linie *GK* geſchnitten, die durch des Rades Mittelpunct *K* geht, gegen die Schaufel ſtrömt das Aufſchlage-Waſſer *ABCD* nach einer Richtung *GV*, die in einer auf der Ebene des Rades ſowohl als auch der Schaufel ſenkrechten Ebene liegt: man ſucht die Stärke des Drucks gegen die Schaufel. 27 Fig.

Aufl. Wenn die mittlere Richtung des Stoßes durch G geht, ſo lege man durch G die Ebene EGM auf GK ſenkrecht, ſo iſt ſie zugleich auf des Rades und der Schaufel Ebene ſenkrecht, alſo EGM der Neigungswinkel der Schaufel gegen das Rad, und die Richtung des Stoßes GV liegt in dieſer Ebene; auch iſt die Durchſchnittslinie GM mit der Ebene des Rades die Richtung der Bewegung des Puncts M beym Umlauf des Rades. Wenn nun GL auf RS ſenkrecht ſteht, ſo iſt auch GL auf GK ſenkrecht,

und liegt folglich in der Ebene EGM (306 §. Geom.) Nun ſey, wie im 108 §. der Winkel EGM $= \eta$, EGV $= \vartheta$, des Puncts G Geſchwindigkeit $= 2\sqrt{gx}$, des Waſſers Geſchwindigkeit $= 2\sqrt{gv}$; ſo iſt der ſenkrechte Druck auf die Schaufel $=$
$\dfrac{k\gamma A(\sin\vartheta\sqrt{v} - \sin\eta\sqrt{x})^2}{2\sin\vartheta\sqrt{gv}}$ (108 §.), wenn A der Waſſer-Aufwand für eine Secunde iſt. Wenn nun GZ auf der Ebene des Rades ſenkrecht iſt, ſo liegt auch GZ in der Ebene EGM (306 §. G.) und man kann jenen Druck, deſſen Richtung GL iſt, in zwo andere Preſſungen nach GZ und GM zerlegen. Die erſte drückt blos das Rad mit ſeiner Umdrehungs-Axe parallel. Die zweyte Kraft nach GM aber beſchleunigt die Bewegung des Rades, und ſie iſt $= \dfrac{k\gamma A\sin\eta(\sin\vartheta\sqrt{v} - \sin\eta\sqrt{x})^2}{2\sin\vartheta\sqrt{gv}}$. Setzt man aber $2\sqrt{gv} = C$, $2\sqrt{gx} = c$, ſo wird dieſe Kraft $=$
$\dfrac{k\gamma A\sin\eta(C\sin\vartheta - c\sin\eta)^2}{4gC\sin\vartheta}$.

149 §.

Die Ebene des Rades liegt horizontal, und die Welle ſteht vertical, die Schaufeln ſind gegen die Ebene des Rades unter dem Winkel $= \eta$ geneigt, wie im vor. §., und das Waſſer ſtrömt gegen die Schaufel ſenkrecht: man ſucht den gröſten möglichen Effect der Maſchine.

Aufl. Weil $\vartheta = 90°$, alſo $\sin\vartheta = 1$ iſt, ſo iſt der Effect der Maſchine $= \dfrac{k\gamma A\sin\eta(C - c\sin\eta)^2 c}{4gC}$.

Bey dieſer Einrichtung des Rades können die Schaufeln beträchtlich größer gemacht werden, als der Querſchnitt DH des anſchlagenden Waſſers iſt, ſo daß man nach Hrn. Eulers Regel $k = 2$ ſetzen kann (99. §.). Wenn nun Kürze halber $\gamma = 1$ iſt, ſo hat man für den Effect der Maſchine den Ausdruck $\frac{A \sin\eta}{2gC} (C - c \sin\eta)^2 c$, und dieſer iſt am größten, wenn $c = \frac{C}{3 \sin\eta}$ iſt. Setzt man alſo $c \sin\eta = \frac{1}{3} C$, ſo wird das gröſte Moment $= \frac{2}{27} \cdot \frac{A . C^2}{g} = \frac{8}{27} Av$. Der Druck gegen das Rad wird in eben dieſer Vorausſetzung $= \frac{6}{27} \cdot \frac{A . C \sin\eta}{g}$.

Wenn alſo das geſammte Gefälle des Waſſers, welches man in einer Rinne ſo auf das Rad leitet, daß es ſenkrecht gegen die Schaufeln anſchlägt, $= a$ iſt, und man legt das Rad ſo niedrig an, damit das aufſchlagende Waſſer nur Platz behält, ſchnell genug abzufließen, ſo iſt der Effect der Maſchine beynahe $= \frac{8}{27} A . a$, da man gegentheils durch unterſchlächtige Räder keinen Effect zuwege bringen kann, der größer als $\frac{4}{27} A . a$ wäre.

150 §.

Weil die Größe dieſes Effects von dem Winkel η nicht abhängt, unter welchem die Schaufeln gegen die Ebene des Rades geneigt ſind, ſo kann man ihnen eine willkührliche Lage geben, und eben dadurch dem Rade eine jede gefällige Schnelligkeit zuwege bringen, ohne daß dadurch dem Effect der Maſchine

etwas abgehet. Es muß nemlich $c = \frac{C}{3 \sin \eta}$ ſeyn, alſo wird c deſto größer, je kleiner man η nimmt. Dieſe Art Waſſer-Räder ſind alſo vorzüglich bey ſolchen Maſchinen nützlich, wobey man eine beträchtliche Schnelligkeit zuwege bringen muß. Da es bey Korn-Mühlen nur darauf ankommt, den Läufer mit einer ſolchen Geſchwindigkeit herum zu treiben, vermöge welcher derſelbe 40 bis 50mal in einer Minute umläuft, ſo kann der Läufer füglich mit dem Waſſer-Rade an einerley Axe angebracht werden, wenn man ein horizontales Rad erwählt. Man hat auf ſolche Art den Vortheil, daß die Maſchine ſimpler wird, alſo nicht allein weniger koſtet, ſondern auch weniger Friction verurſacht. Wenn man annimmt, die Maſchine ſoll μmal in einer Secunde umlaufen, ſo hat man $\mu = \frac{C}{2 \cdot 3 \cdot \pi r \sin \eta}$, wenn r des Rades Halbmeſſer iſt, bis an den Mittelpunct des Drucks genommen, und man kann r und η ſo groß nehmen, daß μ eine verlangte Größe bekömmt. Soll z. E. das Rad 40mal in einer Minute umlaufen, ſo iſt $\mu = \frac{2}{3}$, und man hat $r \sin \eta = \frac{C}{4\pi}$. Je kleiner alſo η genommen wird, deſto größer muß r ſeyn. Wenn nun ferner die Maſchine eine Korn-Mühle, und der Läufer mit dem Waſſer-Rade an einerley Axe befindlich iſt; ſo läuft derſelbe ebenfalls μmal in einer Secunde um. Sein Halbmeſſer ſey $= \varrho$, und er ſey mit allem, was daran hängt, ſo ſchwer, als eine Menge Waſſer, die den Raum Q ausfüllt; ſo iſt der Widerſtand des Getreydes $= \frac{1}{33}$ Q

$\frac{1}{35}Q$, und das ſtatiſche Moment deſſelben $= \frac{2}{3}\varrho \times \frac{1}{35}Q$. (420. 423 §. Mechan.). Ferner ſey die Friction am untern Mühlwellen-Zapfen ſo groß, als das Gewicht einer Menge Waſſer, die den Raum $= F$ füllt, und dieſes Zapfens Halbmeſſer $= f$; ſo iſt das Moment der Friction $= \frac{2}{3}fF$. Alſo hat man $2\pi\mu . (\frac{2}{3}\varrho . \frac{1}{35}Q + \frac{2}{3}fF) = \frac{8}{27}Aa$ (382 §. Mechan.), weil hier $\mu = \nu$ iſt. Man ſubſtituire $\mu = \frac{2}{3}$, und $F = \frac{1}{3}Q$, ſo wird $\pi(\frac{2}{3}\varrho . \frac{1}{35}Q + \frac{2}{3}f . \frac{1}{3}Q) = \frac{2}{9}A.a$, woraus Q gefunden wird. Man dividire nemlich mit $\frac{2}{9}$, ſo hat man $\pi(\frac{3}{35}\varrho . Q + f . Q) = Aa$, und $Q = \frac{A.a}{\pi(f + \frac{3}{35}\varrho)}$. Wenn man hievon das Gewicht des Waſſer-Rades mit ſeiner Welle abzieht, ſo hat man das Gewicht des Läufers, den die Mühle führen kann.

151 §.

Dergleichen Mühlen mit horizontalen Rädern ſind in Deutſchland nicht üblich, und Beyer im Schauplatz der Mühlenbaukunſt IX Cap. 9 §. 71 S. ſcheinet nicht viel davon zu halten. Allein die bisherige Theorie zeigt, daß die horizontalen Räder allerdings mit Vortheil gebraucht werden können, wenn die Maſchine nur recht eingerichtet, und nicht ſo ſehr überſetzt iſt, wie diejenige, welche Böckler in ſeinem Theatro Mach. Tab. 50. angegeben hat. Sie dienen bey hohem Gefälle und wenigem Waſſer, in welchen Fällen man in Deutſchland die oberſchlächtigen Räder braucht. Nach Belidors Bericht (Architect. Hydraul. II Buch I Cap. 666 §.) hat man in der Provence, wie auch in den meiſten Gegenden der Dauphiné, dergleichen Mühlen mit hori-

zontalen Rädern. Ihre Einrichtung iſt völlig ſo, wie ſie im vor. §. beſchrieben worden, ohne alle Verbindung von Rad und Getriebe, wobey ſie dennoch die beſten Dienſte thun. Es iſt unſtreitig die wolfeilſte Art von Mühlen, die man je erbauen kann. Die Schaufeln ſind bey dieſen franzöſiſchen Mühlen auf der Seite, wo das Waſſer anſchlägt, hohl, und haben die Geſtalt eines Löffels, oder einer Muſchel-Schale, daher man ſie Sturm- auch **Muſchel-Räder** nennt.

152 §.

Auf die Schaufeln des horizontalen Waſſer-Rades fällt das Waſſer in verticaler Richtung herab: man ſucht den gröſten möglichen Effect der Maſchine.

Aufl. Der allgemeine Ausdruck

$$\frac{k\gamma A \sin\eta (C\sin\vartheta - c\sin\eta)^2}{4gC\sin\vartheta}$$

(149 §.) für die Kraft, welche das Rad nach der Richtung GM herumtreibt, wird auf den gegenwärtigen Fall angewandt, wenn man $\sin\vartheta = \cos\eta$ ſetzt. Denn es iſt nun $\vartheta = EGv = 90° - EGM = 90° - \eta$. Wenn man überdem mit c multiplicirt, ſo hat man den Effect der Maſchiene $= \frac{k\gamma A\sin\eta(C\cos\eta - c\sin\eta)^2 c}{4gC\cos\eta}$.

Man ſetze $\frac{\sin\eta}{\cos\eta} = \tang\eta = t$, ſo iſt $\sec\eta =$

$\sqrt{(1+tt)}$ (419 §. G.) $\cos\eta = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$, und

$\sin\eta = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$ (418 §. Geom.). Und wenn

man

man dies ſubſtituirt, ſo iſt der Effect =

$\frac{k\gamma.A.t}{4g.C}.\frac{(C-ct)^2c}{1+tt}$. Wenn man nun annimmt, daß der Winkel η ſchon feſtgeſetzt ſey, und man frägt nur, wie groß bey einerley Winkel η die Geſchwindigkeit c ſeyn muß, damit der Effect am gröſten werde, ſo iſt aus dem 343 §. Mech. bekannt, daß man $d..(C-ct)^2 c = 0$ ſetzen müſſe, um dieſen Werth von c zu finden. Dieſe Vorausſetzung giebt $(C-ct)^2 dc - 2(C-ct)tcdc = 0$, und daraus folgt $C - ct - 2ct = 0$, oder $c = \frac{C}{3t}$. Eben dies würde die Gleichung $c = \frac{C\sin\vartheta}{3\sin\eta}$ (113 §.) geben, wenn man $\sin\vartheta = \cos\eta$ ſetzte, und wenn man $c = \frac{C}{3t}$ in dem Ausdruck für den Effect der Maſchine ſetzt, ſo erhält man

$$\frac{k\gamma A}{4gC}.\frac{t}{1+tt}.(C-\tfrac{1}{3}C)^2.\frac{C}{3t} =$$

$\frac{k\gamma A}{4g}.\frac{1}{3}.\frac{4}{9}.\frac{C^2}{1+tt}$, oder auch $\frac{8}{27}A.v.\cos\eta^2$, wenn man $k = 2$, $\gamma = 1$, $\frac{C}{4g} = v$, und $\frac{1}{\sqrt{(1+tt)}} = \cos\eta$ ſetzt. Daſſelbe giebt auch der im 113 §. ſchon gefundene Ausdruck $\frac{4}{27}k\gamma A v \sin\vartheta^2$, wenn man, wie hier erfordert wird, $\sin\vartheta = \cos\eta$ ſetzt.

Allein man kann hier noch in einem andern Sinn nach der vortheilhafteſten Einrichtung der Maſchine fragen.

fragen. Im 113 §. hieng der Winkel ϑ gar nicht von η ab, und man konnte η ändern, ohne daß dadurch zugleich ϑ geändert ward. Daher hieng der Ausdruck des gröſten Effects gar nicht von η ab, ob er gleich von ϑ abhieng. So war es auch noch im 149 §. wo die Richtung des anſchlagenden Waſſers gegen die Schaufeln allemal ſenkrecht angenommen ward, η mogte ſo groß man wollte angenommen ſeyn. Bey gegenwärtiger Aufgabe aber verhält es ſich anders. Die Richtung des Aufſchlage-Waſſer ſoll auf der Ebene des Rades ſenkrecht ſeyn, deswegen iſt $\vartheta = 90° - \eta$. Wenn nun die Schaufeln gegen das Rad eine andere Lage bekommen, ſo wird ihre Lage gegen die Richtung des aufſchlagenden Waſſers ebenfalls geändert. Bleibt ϑ bey veränderter Lage der Schaufel einerley, ſo muß $c \sin\eta = \frac{1}{3} C \sin\vartheta$ ſeyn, um den gröſten Effect zu erhalten. Dies würde man im 113 §. auch finden, wenn man in dem allgemeinen Ausdruck

$$\frac{k\gamma A}{4gC\sin\vartheta}(C\sin\vartheta - c\sin\eta)^2 c\sin\eta =$$

$$\frac{k\gamma A\sin\vartheta}{4gC}\left(C - \frac{c\sin\eta}{\sin\vartheta}\right)^2 c\sin\eta,$$ die Geſchwindigkeit c als eine beſtändige Gröſze, η aber als veränderlich betrachtete, ſtatt deſſen daß dort umgekehrt η als beſtändig, c aber als veränderlich betrachtet worden. Es ſind hier nemlich C und $\frac{c\sin\eta}{\sin\vartheta}$ die Geſchwindigkeiten des Waſſers und der Schaufel nach einerley Richtung genommen, ſo daß

$C - \frac{c\sin\eta}{\sin\vartheta}$ ihre relative Geſchwindigkeit iſt,

wo-

wovon eigentlich das Bewegungsmoment abhängt. Man mag alſo c oder η ändern, ſo ändert man in beyden Fällen dieſe reſpective Geſchwindigkeit, und zugleich das Bewegungsmoment auf einerley Art, dafern ϑ nicht zugleich mit η geändert wird, und der gröſte Effect der Maſchine hängt nicht von η ab, wie bey gegenwärtiger Aufgabe. Demnach ſuche man nunmehro, wie groß η ſeyn muß, damit der Effect am gröſten werde. Zu dem Ende ſetze man in dem Ausdruck des Effects $= \frac{k\gamma A t}{4gC} \cdot \frac{(C-ct)^2 c}{1+tt}$ dieſes Winkels Tangente t als veränderlich an, und ſetze das Differential des veränderlichen Factors $\frac{(C-ct)^2 t}{1+tt} = 0$. Um dies Differential zu finden, ſetze man $(C-ct)^2 t = p$, und $1+tt=q$, ſo hat man $d.\frac{p}{q} = \frac{qdp-pdq}{qq}$ (104 §. Mech.), und es muß $qdp - pdq = 0$ ſeyn. Es iſt aber $dp = (C-ct)^2 dt - 2t(C-ct)cdt$, und $dq = 2tdt$, (104 §. Mech.) alſo wird

$$(1+tt)(C-ct)^2 - 2t(1+tt)(C-ct)c - 2tt(C-ct)^2 = 0,$$

und hieraus folgt

$$(1+tt)(C-ct) - 2t(1+tt)C - 2tt(C-ct) = 0.$$

Wenn man nun gehörig multiplicirt, ſo verwandelt ſich dieſe Gleichung in folgende: $(1-tt)C - 3ct - ct^3 = 0$, und daraus folgt $c = \frac{(1-tt)C}{t(3+tt)}$. Wenn alſo das Rad mit einer gegebenen Geſchwindigkeit c umlaufen ſoll, ſo muß man den Winkel η ſo nehmen, daß c von C ſo abhängt, wie dieſer Gleichung gemäß iſt, um den gröſten Effect zu erhalten.

Setzt

Setzt man nun dieſen gefundenen Werth ſtatt c, ſo hat man $ct = \frac{(1-tt)C}{3+tt}$, $C - ct = \frac{2(1+tt)}{3+tt}C$,

$$\frac{(C-ct)^2 ct}{1+tt} = \frac{4(1-t^4)C^3}{(3+tt)^3}$$, und der gröſte Effect iſt $= \frac{k\gamma A}{4g} \cdot \frac{4(1-t^4)C^2}{(3+tt)^3}$, oder $=$

$$\frac{8A(1-t^4)v}{(3+tt)^3}$$, wenn $\gamma = 1$, und $k = 2$ geſetzt wird, wegen gröſſerer Breite der Schaufeln.

153 §.

Dieſer Ausdruck nåhert ſich dem Werth $\frac{8}{27} A \cdot v$ deſto mehr, je kleiner t, alſo je kleiner η genommen wird. Je kleiner man aber η nimmt, deſto ſchneller muß das Rad herumlaufen, weil $c =$ $\frac{(1-tt)C}{t(3+tt)}$ deſto gröſſer wird, und man kann nicht $t = 0$ ſetzen, weil ſonſt c unendlich groß ſeyn müſte. Es folgt hieraus, daß es nie ſo vortheilhaft ſey, das Waſſer vertical auf das Rad fallen zu laſſen, als wenn man es ſenkrecht gegen die Schaufeln leitet. Hr. Leonh. Euler betrachtet die Würkung der horizontalen Råder, unter der Vorausſetzung des vor. §., in der oben ſchon angeführten Abhandlung: Application de la machine hydraulique de Mr. Segner &c. Hiſtoire de l'Acad. de Berlin Année 1751. pag. 277. 278. und macht am Ende den Schluß, daß es vortheilhafter ſey, verticale unterſchlåchtige Råder zu gebrauchen. Die bisherige Ausführung ergiebt, daß dies nur ſeine Richtigkeit habe,

habe, wenn das Waſſer vertical auffält, welchen Fall Hr. Euler allein betrachtet hat, nicht aber, wenn das Waſſer in einer gegen den Horizont geneigten Richtung ſenkrecht gegen die Schaufeln geführt iſt. In der letztern Vorausſetzung betrachtet Hr. Albert Euler die horizontalen Räder in der Preisſchrift: Enodatio quaeſtionis, quomodo vis aqua &c. §. 38. pag. 27. und giebt ihnen bey dieſer Einrichtung den Vorzug vor allen andern Arten, Maſchinen durch den Stoß des Waſſers zu bewegen, wie ſolches auch würklich die bisherige Ausführung beſtätiget.

154 §.

Eben deswegen ſchläget Hr. Alb. Euler in der angezogenen Preisſchrift 26 u. f. S. vor, ein verticales Rad auf eben die Art einzurichten, wie das oben beſchriebene horizontale Rad. Wenn das Rad 27
OPQ vertical ſtehet, und das Waſſer in einer hori- Fig.
zontalen Rinne ſenkrecht gegen die Schaufeln geleitet iſt, die alſo gegen die Ebene des Rades unter einem Winkel $= 90^\circ - \eta$ geneigt ſeyn muß; ſo erhellet, daß das verticale Rad eben denſelben Effect thun müſſe, wie das horizontale Rad. Ein ſolches Rad würde unſtreitig einen doppelt ſo großen Effect zuwege bringen, als ein gemeines unterſchlächtiges Rad, wofern es mit Hrn. Eulers Regel, den Waſſer-Stoß zu berechnen, im 99 §. ſeine Richtigkeit hat; und wenn man es z. E. bey einer Korn-Mühle anbrächte, ſo würde man mit einem Gang ſo viel Korn mahlen können, als ſonſt mit zweenen Gängen, wodurch bey Erbauung einer Mühle, wo viel zu mahlen iſt; die Koſten anſehnlich geſpart werden könnten.

Wat

Was übrigens die Einrichtung der Schaufeln betrift, ſo kann man ſie füglich am Umfang einer Scheibe CXY nach dieſem Geſetz einſetzen, daß das Waſſer nicht zwiſchen zwo nächſt nach einander folgende Schaufeln *rs* und RS durchſtrömen kann, ſondern von der nächſt folgenden RS ſogleich aufgefangen wird, wie es die vorhergehende *rs* verläſt; und dies beſtimmt die Anzahl der Schaufeln, wenn ihre Größe nebſt dem Halbmeſſer der Scheibe CXY gegeben iſt. Man kann ihnen füglich die Geſtalt eines Trapezii geben, ſo daß die Seiten-Linien RV, TS, gegen den Mittelpunct des Rades zu convergiren, da dann der verlängerte Halbmeſſer KC die Schaufel halbirt.

155 §.

Es iſt der Bogen *IN* zwiſchen zwoen zu nächſt folgenden Schaufeln, wie auch ihre Höhe *CI* gegeben, nebſt ihrem Neigungswinkel gegen die Ebene des Rades, und deſſen Halbmeſſer *KI* bis an den äuſſern Umfang genommen: man ſucht die beyden Grundlinien *SU* und *TR* der Schaufeln.

Aufl. Man halbire den Bogen IN zwiſchen den Schaufeln in W, und lege durch K und W eine Ebene ſenkrecht auf die Schaufel RS. Wenn nun dieſe die Schaufel in RU ſchneidet, die nächſtfolgende aber in *ts*, ſo müſſen RU und *ts* die Seitenlinien der Schaufeln abgeben, wenn das Waſſer, indem es die vordere bey *ts* zu verlaſſen anfängt, von der nächſt folgenden ſogleich wieder aufgefangen werden ſoll. Die Winkel IKW und WKN geben die Seitenflächen zu zweyen körperlichen Dreyecken ab, worin die

Winkel

Winkel gleich ſind, die an dieſen gleichen Seitenflächen anliegen. Daher wird $Nr = IU$, ſo daß die Schaufeln einander gleich und ähnlich ſind, wie erfordert wird. Man ſetze den Winkel $IKW = \alpha$, ſo findet man IKU aus dem 534 §. Geom. Es wird nemlich $\tang IKU = \cos\eta \tang\alpha$, und dies giebt ferner $IU = r\tang IKU$, und $CR = \frac{IU \,.\, KC}{KI} = KC \,.\, \tang IKU$.

Die Anzahl der Schaufeln beſtimmt den Winkel α. Iſt dieſe Anzahl $= n$, ſo hat man $\alpha = \frac{2R}{n}$. Wenn alſo umgekehrt die Abmeſſungen der Schaufeln gegeben ſind, ſo ergiebt ſich daraus ihre Anzahl. Man hat nemlich $\tang IKU = \frac{IU}{r} = \frac{CR}{KC}$, ferner $\tang\alpha = \frac{\tang IKU}{\cos\eta}$, und hiernächſt

$$\frac{2R}{\alpha} = n.$$

156 §.

Dieſe Auflöſung findet ihre Anwendung, das Rad mag horizontal liegen, oder vertical ſtehen. Weil indeſſen im letzten Fall das Waſſer horizontal gegen das Rad geleitet werden muß, wenn die Schaufeln die eben beſchriebene Einrichtung haben, und in der Ausübung das Waſſer mit mehr Bequemlichkeit in einer gegen den Horizont geneigten Rinne fortgeleitet werden dürfte; ſo ſchlägt Hr. Alb. Euler in der angeführten Preisſchrift in ſolcher Abſicht noch eine andere Einrichtung der Schaufeln vor, die darauf

28 Fig. ankommt. Die Schaufel RS ſchneide die Ebene des Rades in der graden Linie AB, die nicht durch den Mittelpunct K gehet, CAD ſey eine Scheibe, wie CXY im vor. §., woran die Schaufel bey A ſo befeſtiget iſt, daß ſie die Ebene des Rades unter dem Winkel ϕ ſchneidet. Wenn nun die mittlere Richtung GV des Stroms auf der Schaufel ſenkrecht iſt, und durch G gehet; ſo ziehe man KG und es ſey der Winkel KGA $= \zeta$, ſo iſt die Richtung GM des Puncts G beym Umlauf des Rades auf KG ſenkrecht, und AGM $= 90° - \zeta$. Durch GM lege man die Ebene MGE auf die Schaufel ſenkrecht, und ſetze den Winkel EGM $= \eta$. Beſchreibt man nun mit einem willkührlichen Halbmeſſer GM in dem Ebenen EGM, EGA, AGM, die Kreisbogen EM, EA, AM, ſo erhält man das ſphäriſche Dreyeck AEM, worin der Winkel EAM $= \phi$, der Bogen AM $90° - \zeta$, EM $= \eta$, und der Winkel AEM $= 90°$. Daher hat man nach dem 525 §. Geom. $1 : \cos\zeta = \sin\phi : \sin\eta$, und $\sin\eta = \cos\zeta \sin\phi$. Dies Rad thut ſo wie das horizontale den gröſten Effect, wenn $c = \frac{C}{3\sin\eta}$, alſo $c = \frac{C}{3\cos\zeta\sin\phi}$ iſt.

Da nun das Waſſer auf die unterſte Schaufel ſenkrecht aufſchlagen ſoll, ſo muß die Richtung deſſelben gegen den Horizont unter dem Winkel ζ, gegen das Rad aber unter dem Winkel $90° - \phi$ geneigt ſeyn. Wenn man ein ſolches Rad bey einer Maſchine anbringen wollte, ſo würde man in der würklichen Ausübung auch ohne große Schwierigkeit die Anzahl der Schaufeln ſo beſtimmen, daß kein Waſſer zwiſchen den Schaufeln durchſchieſſen könnte, ſondern

die nächſtfolgende Schaufel das Waſſer ſogleich auf⸗fienge, bevor es noch die vorhergehenden verlaſſen könnte.

Der XI. Abſchnitt.

Vollſtändigere Theorie von der Bewegung des Waſſers in Gefäßen und Röhren.

157 §.

Es iſt oben im I. Abſchnitt bereits vorläufig ange⸗führt, daß die allgemeinen Unterſuchungen über die Geſetze der Bewegung flüßiger Körper ihre eige⸗nen Schwierigkeiten haben, wenn man alle Umſtän⸗de, die dabey eintreten, gehörig in Betrachtung zie⸗hen will. Nur ſeit etwa 40 Jahren hat man ange⸗fangen, mit Hülfe der Integralrechnung, dieſe Ge⸗ſetze genauer zu entwickeln. Die im II. Abſchnitt vor⸗getragenen Lehren, welche die Bewegung des Waſ⸗ſers durch ſehr kleine Oefnungen der Gefäße betref⸗fen, waren faſt die einzigen Gründe, worauf man die Hydraulik bauete, bevor die Herrn Johann und Daniel Bernoulli allgemeinere und genauere Un⸗terſuchungen anſtellten. Man begnügte ſich damit die Bewegung des Waſſers im Beharrungsſtande zu betrachten, und kannte die Geſetze nicht, nach welchen es beſchleuniget wird, ſo lange die Ge⸗ſchwindigkeit deſſelben noch Aenderungen leidet. Eben ſo wenig war man im Stande, den Druck zu beſtim⸗men, womit das bewegte Waſſer die Gefäße und Röhren preſt. Selbſt Newton, der im II Buch

der Princip. Phil. Natur. Math. auf die Bewegung der flüßigen Maſſen kömmt, betrachtet die Sache größtentheils nur in ſo fern, als die Lehre vom Widerſtande, den feſte Körper in flüßigen leiden, daher ihr Licht erhält, und trägt außer der gedachten Aufgabe vom Auslauf des Waſſers aus Gefäßen, (a. a. O. Prop. XXXVI. Probl. VIII.) nebſt einigen Betrachtungen über die Bewegung der Wellen (Prop. XLIV-XLVI.) und der Waſſer-Wirbel am Ende des IIten Buchs, faſt nichts vor, was zur eigentlichen Hydraulik gehört. Hermann iſt in ſeiner im Jahr 1716 herausgegebenen Phoronomia ſive de viribus & motibus corporum ſolidorum & fluidorum gleichfalls noch nicht weiter gegangen als ſeine Vorgänger. Der größte Theil des zweyten Buchs beſchäftiget ſich mit der Bewegung feſter Körper in widerſtehenden flüßigen Maſſen, und gehört mehr zur Mechanik feſter Körper, als zur eigentlichen Hydraulik. Joh. Bernoulli iſt der erſte, der die allgemeinen Grundſätze der Mechanik auf die Bewegung flüßiger Körper angewandt und aus völlig überzeugenden Gründen gewieſen hat, nach welchen Geſetzen ihre Bewegung von gegebenen Kräften beſchleuniget wird. Seine hieher gehörige Schrift führet den Titel: Joh. Bernoulli Hydraulica nunc primum detecta ac demonſtrata directe ex fundamentis pure mechanicis. Anno 1732. Sie iſt in Tom. IV. ſeiner Operum mit gedruckt: und er ſchreibt im VIII §. des I Theils, daß er bereits im Jahr 1729 zuerſt ſeine Methode erfunden habe. Um eben die Zeit hatte ſein Sohn, Daniel Bernoulli, ſein berühmtes Werk: Hydrodynamica, ſive de viribus & motibus fluidorum Commentarii,

auf

aufgeſetzt, welches aber allererſt im Jahr 1738 zu Augſpurg im Druck erſchienen iſt. Sein Vater erwehnt indeſſen deſſelben ſchon in der gedachten Hydraulica, und zwar gleich Anfangs in der Vorrede. Beyde Werke führen, was die Sache ſelbſt betrift, auf einerley Reſultate, nur ſind ſie in Anſehung der Gründe verſchieden, worauf beyde Verfaſſer ihre Rechnungen gebauet haben. Daniel Bernoulli braucht in dem ganzen Werk den Grundſatz von Erhaltung der lebendigen Kräfte (277. 280. §. Mech.). Seines Vaters Werk aber gründet ſich auf die erſten Grundſätze der allgemeinen Mechanik, (112. 113. §. Mech.), die ſeit Galiläi Zeiten zur überzeugenden Richtigkeit gebracht ſind, da gegentheils jenem Grundſatz diejenige Evidenz fehlt, die man ſonſt bey mathematiſchen Grundſätzen gewohnt iſt; wie der ältere Bernoulli dadurch ſelbſt eingeſtehet, daß er ſeines Sohnes Methode methodum indirectam nennt.

Wenn ich hier die Erfindung der eigentlichen theoretiſchen Hydraulik den beyden Hrn. Bernoulli zuſchreibe; ſo muß ich, um einem etwanigen Mißverſtändniß vorzubeugen, nochmal erinnern, daß dies blos von den Geſetzen zu verſtehen ſey, nach welchen die Bewegung des Waſſers in Gefäßen und Röhren beſchleuniget wird. Dasjenige, was man vor der Zeit von der Geſchwindigkeit des Waſſers im Beharrungsſtande wuſte, war mehr aus Verſuchen geſchloſſen, als durch eine richtige Theorie erwieſen, und was etwa die Beſchleunigung des Waſſers in Flüſſen angieng, gründete ſich auf die Geſetze des Falles ſchwerer Körper. Hiedurch ſpreche ich alſo den Vorgängern der Herrn Bernoulli ihre Ver-

dienſte nicht ab, die ſie um die Hydraulik haben, und die zum Theil ſehr wichtig ſind. Es gehören dahin vornemlich die oben ſchon oft angeführten Italiäniſchen Schriftſteller, Gulielmini, Poleni, Caſtelli, u. a. m. Man hat vor einigen Jahren zu Parma eine Sammlung der hieher gehörigen Schriftſteller veranſtaltet, unter dem Titel: Nuova Raccolta d'autori che trattano del moto dell' acque, wovon auf der Michaelis-Meſſe 1769 der VIIte Theil geliefert iſt.

158 §.

Nachdem die beyden Bernoulliſchen Werke bekannt geworden ſind, haben vornemlich die Herren Euler und d'Alembert geſucht, die Theorie der Hydraulik zu größerer Vollkommenheit zu bringen. Herrn Eulers Methode iſt nicht viel von des ältern Bernoulli Methode unterſchieden, und beyde kommen darin völlig überein, daß ſie keine andere Grundſätze brauchen, als die Fundamentalgleichungen der ganzen Mechanik (112. 113. §. Mechan.). Hr. Euler hat geſucht, ſeiner Methode eine noch gröſſere allgemeinheit zu geben, als Joh. Bernoulli. Letzterer hatte die ſeinige vornemlich nur auf die Bewegungen des Waſſers in Gefäßen und Röhren angewandt, und eben dahin gehören folgende Aufſätze des Hrn. Euler. Sur le mouvement de l'eau par des tuyaux de conduite. Hiſtoire de l'Academie de Berlin Année 1752. De motu & reactione aquae per tubos mobiles transfluentis, imgleichen Tentamen theoriae de frictione fluidorum in den Comment. novis Petrop. Tom. VI. Ferner drey Aufſätze, ſur l'effet d'une machine hydraulique pro-

propoſé par Mr. *Segner*, & en general des machines, qui ſont miſes au mouvement par la reaction de l'eau. Hiſt de l'Acad. de Berlin Année 1750. p. 311. Année 1751. p. 271. Année 1754. p. 227. nebſt mehrern andern. Zur Theorie von der Bewegung des Waſſers in Röhren, gehören auch noch verſchiedene kleine Aufſätze des Hrn **von Segner**, die unter dem Titel: *Joh. Andr. Segneri* Exercitationum Hydraulicarum Faſciculus. Gött. 1747. zuſammen gedruckt ſind. Viel allgemeinere Unterſuchungen über die Bewegung des Waſſers hat Hr. **Euler** in der Abhandlung: Principia motus fluidorum Comm. Nov. Petrop. T, VI. p. 271 ſeq. vorgetragen. Eben dieſe Unterſuchungen wiederholt er in noch größerer Allgemeinheit in der Abhandlung: Principes generaux du mouvement des fluides. Hiſtoire de l'Acad. de Berlin. Année 1755. p. 274 ſeq. ſo daß nicht blos die Bewegungen des Waſſers, ſondern auch elaſtiſcher flüßiger Maſſen, dergleichen die Luft iſt, unter ſeiner hieſelbſt vorgetragenen Theorie begriffen ſind. Was endlich des Hrn. d'Alemberts Methode betrift, ſo iſt dieſelbe vollſtändig in dem Traité de l'equilibre & du mouvement des fluides a Paris 1744. von ihm entwickelt, und auf die merkwürdigſten hieher gehörigen Aufgaben angewandt. Jedoch bleibt Hr. d'Alembert nur bey allgemeinen theoretiſchen Unterſuchungen ſtehen, ohne die Verbindung derſelben mit der Ausübung zu zeigen. Die Art, wie er zu den Fundamentalgleichungen gelangt, iſt ihm beſonders eigen, und ſie iſt auf einen Grundſatz gebauet, den er auch in dem Traité de Dynamique a Paris 1743. bey ſeinen Unterſuchungen über die Bewegung feſter Körper ge-

braucht hat. Die neueſte zur Hydraulik gehörige Schrift iſt die im vorigen Jahr herausgegebene und oben ſchon oft angeführte Hydrodynamik des Hrn. Hofr. Käſtners, welche des vierten Theils ſeiner mathematiſchen Anfangsgründe zweyte Abtheilung ausmacht. Unter den vielen Vorzügen, welche dies Werk ſchätzbar machen, will ich hier nur deſſen erwähnen, daß der berühmte Hr. Verfaſſer von den ältern hieher gehörigen Schriftſtellern ſehr vollſtändige Nachrichten giebt. Beim Vortrag der Theorie legt er des Hrn. Joh. Bernoulli Hydraulik zum Grunde, vergleicht aber hienächſt auch damit die Euleriſche Theorie. Ich werde im folgenden vornemlich Hrn. Eulers Methode brauchen, und zugleich die Uebereinſtimmung der Reſultate mit denjenigen zeigen, welche die Herren Bernoulli nach ihren Methoden herausbringen. Die allgemeinen Gründe, worauf Hrn. Eulers Methode beruhet, ſind oben im I. Abſchnitt bereits vorgetragen worden, und es iſt nur das einzige noch übrig, daß die Auflöſung der Aufgaben des 12 und 13 §. in ihrer völligen Allgemeinheit geſucht werden muß.

159 §.

29 Fig. Es ſey *ACHMKP* eine Röhre, ſo wie ſie im 12 §. iſt betrachtet worden; ſie ſey anfangs bis an *AB* voll Waſſer, und *PQ* ſey die untere Oefnung, durch welche das Waſſer ausläuft. Auf die Oberfläche *AB* drückt eine gegebene Kraft, die das Waſſer forttreibt: man ſucht die Geſchwindigkeit des Waſſers, nachdem ſo viel ausgelaufen iſt, als den Raum *ABDC* füllte.

Aufl.

Aufl. Es ſey $g\gamma SVG$ die centriſche Linie aller Querſchnitte der Röhre, die, wie im 12 §., auf dieſer Linie ſenkrecht angenommen werden; ſo hat der Schwerpunct g des oberſten Querſchnitts AB den Weg $g\gamma$ zurückgelegt, indem AB in CD angelangt iſt. Es ſey $MN = z$ ein unbeſtimmter Querſchnitt, und durch den unterſten Punct V der centriſchen Linie ſey EF horizontal, GE, SR, γW, gF aber vertical gezogen, durch S ſey auch LX horizontal gezogen, und dieſe Linie ſchneide gF in X. Ueberdem ſetze man $gF = a$, $GE = b$, $RS = x$, $gX = w$, und die Querſchnitte $AB = h$, $PQ = n$, $CD = y$, die Länge der ganzen centriſchen Linie, $GVSg = \beta$, das Stück $g\gamma S = r$: ſo iſt z eine Function von r, die $= y$ wird, wenn man $r = g\gamma$ nimmt. Wenn nun $HI = m$ ein bekannter Querſchnitt, und die Geſchwindigkeit des durch HI laufenden Waſſers $= c$, die zugehörige Höhe $= v$, alſo $c = \sqrt{v}$ iſt; ($g = \frac{1}{4}$ geſetzt, 117 §. Mechan.) ſo läuft das Waſſer durch MN in eben dem Augenblick mit der Geſchwindigkeit $= \frac{m \cdot c}{z} = \frac{m\sqrt{v}}{z}$: und wenn ST die centriſche Linie in S berührt, ſo iſt ST die Richtung des durch MN laufenden Waſſers. Der Druck, welchen der Querſchnitt MN leidet, ſey dem Gewicht einer Waſſer-Säule auf der Grundfläche MN in der Höhe p gleich; ſo ergeben die Schlüſſe des 11 §., daß die Beſchleunigung des Elements $MmnN$ nach der Richtung $ST = \frac{dw - dp}{dr}$ ſey, weil hier $gX = w$ das iſt, was im 11 §. KO war, folglich auch $dw - dp = du$, wenn u die Höhe iſt, welche

der Geſchwindigkeit des Elements $MmnN$ zugehört. Nun iſt zwar hier, wie im 12 §., $u = \frac{m^2c^2}{z^2} = \frac{m^2v}{z^2}$; allein dort ward durch c die Geſchwindigkeit des Waſſers in der untern Oefnung, die daſelbſt f hieß, verſtanden, und vermöge der Erfahrung ward die Geſchwindigkeit c unveränderlich angenommen, wenn das Gefäß beſtändig voll blieb. Hier fallen dieſe Vorausſetzungen weg, und es iſt nicht allein z, ſondern auch c, folglich auch v veränderlich. Deswegen wird hier $du =$

$$\frac{m^2(z^2dv - 2vzdz)}{z^4} \text{ (104 §. Mechan.) } = \frac{m^2dv}{z^2} - \frac{2m^2vdz}{z^3}.$$

Weil nun MN in der Zeit dt in mn rückt, ſo wird zugleich CD in cd rücken, und das Element $CDdc$ muß $= MNnm$ ſeyn. Setzt man alſo $g\gamma = \varrho$, ſo iſt $yd\varrho = zdr$, und $z = \frac{yd\varrho}{dr}$, folglich $\frac{m^2dv}{z^2} = \frac{dv}{yd\varrho} \cdot \frac{m^2dr}{z}$. Man ſetze ferner $GVS = s$, ſo iſt $r = \beta - s$, und $dr = -ds$, alſo $\frac{m^2dv}{z^2} = -\frac{dv}{yd\varrho} \cdot \frac{m^2ds}{z}$, und $du = -\frac{dv}{yd\varrho} \cdot \frac{m^2ds}{z} - \frac{2m^2vdz}{z^3}$. Weil endlich $w =$

$a - x$, alſo $dw = - dx$ iſt, ſo erhält man ſtatt $dw - dp = du$ die Gleichung

$$dx + dp = \frac{dv}{yd\varrho} \cdot \frac{m^2 ds}{z} + \frac{2m^2 vdz}{z^3}.$$

Weil von nun an der vorige Werth von r nicht mehr gebraucht wird, ſo ſoll in der Folge r ſtatt ϱ geſchrieben werden, ſo daß $r = g\gamma$, und z eine ſolche Function von s iſt, die $= y$ wird, wenn man $s = \mathrm{GVS}\gamma = \beta - r$ ſetzt. Dieſemnach läßt ſich die geſundene Gleichung ſo ausdrücken

$$dp = - dx + \frac{dv}{ydr} \cdot \frac{m^2 ds}{z} + \frac{2m^2 vdz}{z^3}.$$

Aus dieſer Gleichung wird p vermittelſt der Integration geſunden. Weil aber der Druck gegen die Fläche MN eigentlich für eine gegebene Zeit t, alſo für eine gegebene Geſchwindigkeit c als eine Function von s geſucht wird; ſo muß man ſo integriren, daß allein x, s, und z als veränderlich, r, y, und v aber als beſtändige Größen betrachtet werden. Auf ſolche Art erhält man

$$p = \mathrm{C} - x + \frac{dv}{ydr} \int \frac{m^2 ds}{z} - \frac{m^2 v}{z^2}.$$

Nimmt man das Integral $\int \frac{m^2 ds}{z}$ ſo, daß es für $s = 0$ verſchwindet, ſo wird zugleich $x = b$, $z = \mathrm{PQ} = n$. Dieſe untere Oefnung aber leidet den Druck der Atmoſphäre: und wenn derſelbe dem Gewicht einer Waſſerſäule in der Höhe k gleicht, ſo iſt bey den eben erwehnten Vorausſetzungen $p = k$. Man erhält alſo $k = \mathrm{C} - b - \frac{m^2 v}{n^2}$, folglich $\mathrm{C} =$

$$k + b + \frac{m^2 v}{n^2}, \text{ und}$$

$$p = k + b - x + \frac{m^2 v}{n^2} + \frac{dv}{ydr} \int \frac{m^2 ds}{z} - \frac{m^2 v}{n^2}.$$

Der Druck auf die obere Fläche CD ſey dem Gewicht einer Waſſerſäule auf der Grundfläche CD in der Höhe Π gleich, ſo iſt $p = \Pi$, wenn $z = y$, $s = \beta - r$, und $x = Ff = a - w$, wenn von nun an $gf = w$ geſetzt wird. Daraus folgt

$$\Pi = k + b - (a - w) + \frac{m^2 v}{n^2} + \frac{dv}{ydr} \int \frac{m^2 ds}{z} - \frac{m^2 v}{y^2},$$

da dann in dem Integral $\int \frac{m^2 ds}{z}$ ebenfalls $\beta - r$ ſtatt s geſetzt werden muß.

Bey der fernern Rechnung kann man auch s ſtatt $\beta - r$, und x ſtatt $a - w$ behalten, dafern von nun an das Stück der centriſchen Linie GVSγ durch s, und Ff durch x verſtanden wird, da dann zugleich $dr = - ds$ wird, weil nun $z = y$ iſt. Dies vorausgeſetzt, hat man

$$\Pi = k + b - x + \frac{m^2 v}{n^2} - \frac{dv}{yds} \int \frac{m^2 ds}{z} - \frac{m^2 v}{y^2}.$$

Weil nun die Natur der centriſchen Linie ſowohl, als auch die Geſtalt der Röhre bekannt ſeyn müſſen, ſo laſſen ſich x und y durch Functionen von s ausdrücken. Wenn alsdenn Π entweder unveränderlich, oder ebenfalls durch eine Function von s oder v ausgedrückt iſt, ſo hat man eine Differentialgleichung zwiſchen v und s, woraus vermittelſt der Integration v durch s gefunden wird.

§. 160.

160 §.

Wenn auf die obere Fläche CD keine äußerliche Gewalt drückt, dergleichen z. E. die Gewalt eines Kolbens ſeyn könnte; ſo leidet doch dieſe Fläche allemahl den Druck der Atmoſpäre. Wenn alſo derſelbe ſo groß iſt, als das Gewicht einer Waſſerſäule in der Höhe $= K$, ſo muß man K ſtatt Π ſchreiben. In andern Fällen, wenn CD einen äußerlichen Druck leidet, wird derſelbe gewöhnlich durch den Druck der Atmoſphäre verſtärkt, und man muß alsdenn beide Preſſungen zuſammen, oder vielmehr die Summe ihrer zugehörigen Höhen durch Π verſtehen. Wird demnach das Waſſer blos von der Schwere fortgetrieben; ſo hat man

$$k - K = x - b - \frac{m^2 v}{n^2} + \frac{dv}{yds} \int \frac{m^2 ds}{z} + \frac{m^2 v}{y^2}.$$

Da dann zu merken iſt, daß allemahl $k > K$ ſey, wenn CD höher als PQ liegt. Wenn aber die Höhe der obern Oefnung über die untere nur wenige Fuß beträgt, ſo kann man $K = k$ ſetzen. Schreibt man überdem N ſtatt $\int \frac{m^2 ds}{z}$, ſo hat man in dieſem Fall $Ndv - \frac{m^2 vyds}{n^2} + \frac{m^2 vds}{y} = - (x - b) yds.$

161 §.

Wenn man die Geſchwindigkeit des durch die Oefnung PQ laufenden Waſſers $\sqrt{q}$ ſetzt, ſo iſt $v = \frac{n^2}{m^2} q$, und es wird

$$\frac{n^2}{m^2}\mathrm{N}dq - qyds + \frac{n^2 qds}{y} = -(x-b)yds.$$

Iſt alſo n in Vergleichung mit m und y ſehr klein; ſo wird

$$qyds = (x-b)yds \text{ alſo } q = x - b,$$

und das Waſſer ſpringt durch PQ mit einer Geſchwindigkeit, die der Höhe der obern Fläche CD über die Oeſnung PQ zugehört. Dies iſt der Satz des 58 §., der alſo hiedurch völlig beſtätiget wird. Wenn alſo überdem die Oeſnung im Boden des Gefäßes befindlich iſt, ſo hat man $b = 0$, und $q = x$.

162 §.

Wäre der Theil VG der Röhre nicht wieder aufwärts gebogen, ſondern grade und horizontal, ſo wäre ebenfalls $b = 0$. Und wenn in eben dieſem Fall VSg grade und vertical iſt, ſo iſt $x = s$, und die Gleichung des 160 §. verwandelt ſich in folgende

$$\mathrm{N}dv - \frac{m^2 vydx}{n^2} + \frac{m^2 vdx}{y} = -xydx.$$

Eben dieſe Gleichung findet auch ihre Anwendung, wenn die ganze centriſche Linie vertical, und die Oeſnung im Boden des Gefäſſes befindlich iſt. Nur muß in jedem dieſer erwehnten Fälle das Integral $\mathrm{N} = \int \frac{m^2 ds}{z}$ gehörig genommen werden, weil hier durch s die ganze Länge der centriſchen Linie von G durch V bis γ verſtanden wird. Uebrigens iſt nun dieſe Gleichung eben diejenige, welche Hr. Dan. Bernoulli aus dem Grundſatz von Erhaltung der lebendigen Kräfte herleitet. Hydrodyn. Sect. III. §. 8. pag. 34.) Um zu überſehen, wie ſie mit dieſem

ſem Grundſatz zuſammen hänge, betrachte man die ganze in einem ſolchen Gefäß befindliche Maſſe Waſſer als ein Syſtem unzählig vieler ſchweren Puncte, wovon ein jeder durch den Fall, indem das Waſſer nach und nach im Gefäß ſinkt, eine gewiſſe Geſchwindigkeit, alſo eine lebendige Kraft erlangt. Der Schwerpunct aller dieſer kleinen Maſſen wird zugleich um eine gewiſſe Tiefe ſinken, und dadurch eine lebendige Kraft erlangen, die der Summe jener lebendigen Kräfte gleich iſt (280 §. Mech.). Wenn man alſo annimmt, daß alle Theilchen mit der erlangten Geſchwindigkeit in einem gewiſſen Augenblick wieder aufwärts ſtiegen; ſo würde ihr Schwerpunct eben ſo hoch ſteigen, als er gefallen iſt. Weil nun dieſe beyden Höhen gleich ſeyn müſſen, ſo werden auch ihre Differentiale gleich ſeyn. Daniel Bernoulli hat einen eigenen Sprachgebrauch eingeführt, um das Wort: lebendige Kraft zu vermeiden. Die Höhe, worauf in jener Vorausſetzung der Schwerpunct ſteigen würde, nennt er aſcenſum potentialem, die Höhe aber, von welcher der Schwerpunct herabgefallen iſt, deſcenſum actualem, a. a. O. Sect. III. §. 1. p. 30. Es kommt alſo nun alles darauf an, daß man das Differential des aſcenſus potentialis ſowohl, als des deſcenſus actualis ſucht, und hiernächſt beyde einander gleich ſetzt. Hiezu wird folgender Vorbereitungsſatz dienen.

163. §.

Die Höhe zu finden, auf welche der Schwerpunct des Waſſers im Gefäß *AKLB* ſteigen kann, nachdem die Oberfläche *AB* bis *CD* geſunken iſt. 30 Fig.

Aufl.

Aufl. Man ſetze unbeſtimmt $MN = y$, und $LN = x$, ſo iſt das Gewicht oder die Maſſe des Elements $MNnm = ydx$. Es ſey ferner, wie im 159 §., die Geſchwindigkeit der Schichte $GH = \sqrt{v}$, alſo die Geſchwindigkeit der Schichte $MN = \frac{m}{y}\sqrt{v}$, die zugehörige Höhe $= \frac{m^2}{y^2} v$, und ihre lebendige Kraft $= \frac{m^2 v}{y^2} \times ydx = \frac{m^2 v}{y} dx$. Iſt nun u die Höhe, worauf der Schwerpunct ſteigen kann, oder der geſuchte aſcenſus potentialis, ſo hat man nach dem 279. 280 §. Mech. $u\int ydx = \int \frac{m^2 v}{y} dx = v\int \frac{m^2}{y} dx$, weil v für dieſen Augenblick conſtant iſt. Nun iſt $\int ydx$ das Gewicht der ganzen Maſſe Waſſer im Gefäß $= M$, wenn man nemlich das Integral $\int ydx$ von L bis D nimmt. Setzt man alſo überdem das Integral $\int \frac{m^2}{y} dx$ von L bis D genommen $= N$, ſo iſt $u = \frac{N.v}{M}$.

Hieraus ergiebt ſich leicht das Differential dieſes aſcenſus potentialis, wenn man nachfolgende Betrachtung damit verbindet. Indem CD in EF, MN in mn fällt, läuſt aus der Oefnung PL die Menge Waſſer $PLOQ = CEFD = MNnm = ydx$. Indem alſo die Maſſe Waſſer CKLD die Geſtalt EKPQOF annimmt; ſinkt der Schwerpunct um du, und die Menge

Menge Waſſer $\int ydx = M$ bleibt dieſelbe, ſo daß nur v und N ſich ändern. Dies giebt $du = \frac{Ndv + vdN}{M}$, wo es darauf ankömmt, dN richtig zu finden. Weil PL in QO ſinkt, wenn CD in EF rückt, alſo PLOQ $=$ CEFD $= ydx$ ſeyn muß, und PL $= n$, alſo n. LO $= ydx$ iſt; ſo wird LO $= \frac{ydx}{n}$. Es ſind aber die Abſciſſen x auf dieſer Seite des Puncts L in Abſicht der vorigen negativ, ſo daß man LO $= -\frac{ydx}{n}$ ſetzen muß. Ferner nimmt für negative x die Function y eine andre Natur an, ſo daß $y = n$ wird, und eine conſtans bleibt; und man muß nun für N die Summe $\int \frac{m^2 dx}{y}$ von O bis F nehmen. Dieſe iſt nun von L bis D $= \int \frac{m^2}{y} dx$ und von D bis F $= \frac{m^2 dx}{y}$, weil dx negativ iſt. Sie iſt ferner von L bis O $= -\frac{m^2}{n^2} \times ydx$, weil dx negativ iſt. Alſo iſt der gegenwärtige Werth der Summe N $= \int \frac{m^2 dx}{y} + \frac{m^2 dx}{y} - \frac{m^2 ydx}{n^2}$. Dies giebt $dN = \frac{m^2 dx}{y} - \frac{m^2 ydx}{n^2}$, alſo $du = \left(Ndv + \frac{m^2 vdx}{y} - \frac{m^2 vydx}{n^2}\right) : M$.

164 §.

Nun ſey b die Höhe des Schwerpuncts der Maſſe KEFL über dem Boden, r die Höhe des Schwerpuncts der Maſſe KCDL, s aber die Höhe des Schwerpuncts der Maſſe KEFOQP über eben den Boden KL des Gefäßes; ſo iſt $r =$

$$\frac{b(M - ydx) + xydx}{M},$$ und $s =$

$$\frac{b(M - ydx) - \frac{1}{2} LO \cdot ydx}{M}$$ (65 §. Stat.), oder

$$s = \frac{b(M - ydx)}{M},$$ weil LO unendlich klein iſt.

Dies giebt $s - r = - \frac{xydx}{M}$, und um ſo viel iſt der Schwerpunct in der Zeit dt geſunken, ſo daß dieſer Ausdruck das Differential des deſcenſus actualis giebt. Setzt man ihn dem im vor. §. gefundenen Werth von du gleich, ſo hat man, wie im 159 §.,

$$N dv + \frac{m^2 vdx}{y} - \frac{m^2 vydx}{n^2} = - xydx.$$

Da nun dieſe Gleichung im 159 §. aus ganz andern völlig ausgemachten Grundſätzen der Mechanik hergeleitet iſt, ſo wird auf ſolche Art bewieſen, daß der Grundſatz von Erhaltung lebendiger Kräfte bey der Bewegung des Waſſers in Gefäßen und Röhren gelte. Geſetzt aber, dieſer Grundſatz ließe ſich auch aus andern Gründen beweiſen, ſo behält doch die im 159 §. gebrauchte Methode vor der gegenwärtigen bey dieſer Theorie von der Bewegung des Waſſers einen großen Vorzug. Einmahl wird die Fundamental-Gleichung würklich durch einen kürzern Weg

gefun-

gefunden: und fürs zweyte führt eben die Methode auf eine überaus leichte Art auf eine Gleichung, die den Druck des Waſſers während ſeiner Bewegung auf die Seiten des Gefäßes beſtimmt. Wenn nemlich aus der Differential-Gleichung der Werth $\frac{dv}{dx} = \left(\frac{m^2vy}{n^2} - \frac{m^2v}{y} - xy\right) : N$ in die Gleichung für den Druck, die ſich hier in folgende verwandelt:

$$p = k - \frac{m^2v}{n^2} + x + \frac{dv}{dx} z \int \frac{m^2dx}{z} + \frac{m^2v}{z^2},$$

(159 §.) geſetzt wird; ſo erhält man den Druck p für jeden Werth von x: daß alſo die gebrauchte Methode beyde Haupt-Aufgaben, die bey der Bewegung des Waſſers in Gefäßen und Röhren vorkommen, zugleich auflöſet; da man gegentheils um den Druck bey den übrigen Methoden zu finden, noch andere Schlüſſe zu Hülfe nehmen muß, wie die Folge weiter ergeben wird.

165 §.

Das Gefäß $AKLB$ ſey ein grader Cylinder oder Prisma, und die Höhe des Waſſers über dem Boden im Anfang der Bewegung $= a$: man ſucht die Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Waſſers. 30 Fig.

Aufl. In dieſem Fall iſt $y = m$ conſtant, und $N = \int \frac{m^2}{m} dx = mx$. Dies ſetze man in die Fundamentalgleichung des 162 §., ſo wird $mxdv + mvdx - \frac{m^3vdx}{n^2} = -mxdx$, oder $\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) vdx$

$+ xdv = - xdx$. Dieſe Gleichung multiplicire man mit $x^{-\frac{m^2}{n^2}}$, ſo erhält man

$$\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) v x^{-\frac{m^2}{n^2}} dx + x^{1-\frac{m^2}{n^2}} dv =$$

$-x^{1-\frac{m^2}{n^2}} dx$, woraus durch die Integration, nach dem 111 §. Mechan., dieſe folgt

$$x^{1-\frac{m^2}{n^2}} v = C - \frac{n^2}{2n^2 - m^2} x^{2-\frac{m^2}{n^2}}.$$

Es iſt aber $v = 0$, wenn $x = a$ geſetzt wird, daher erhält man $C = -\frac{n^2}{2n^2 - m^2} a^{2-\frac{m^2}{n^2}}$, und dies ſtatt C geſetzt, giebt

$$x^{1-\frac{m^2}{n^2}} v = \frac{n^2}{2n^2 - m^2}\left(a^{2-\frac{m^2}{n^2}} - x^{2-\frac{m^2}{n^2}}\right)$$

Daraus folgt

$$v = \frac{nna}{2nn - mm} \cdot \left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{m^2}{n^2}} - \frac{x}{a}\right),$$

und dieſe Höhe gehört der Geſchwindigkeit des Waſſers im Gefäß zu, da dann die der Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Waſſers zugehörige Höhe

$$q = \frac{mm}{nn} v, \text{ alſo } q =$$

$\frac{mma}{2nn - mm}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{m^2}{n^2}} - \frac{x}{a}\right)$ iſt: und

dieſe

dieſe wird $= -a \times - \frac{x}{a} = x$, wenn n in Vergleichung mit m ſehr klein iſt, wie ſchon im 161 §. aus der Differential-Gleichung folgte.

Wenn das Gefäß gar keinen Boden hätte, alſo $n = m$ wäre, ſo erhielte man $q = a\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, oder $q = a - x$, wenn die Höhe q der Geſchwindigkeit des ausſtrömenden Waſſers zugehört, wie im 161 §. Nun fällt nemlich das Waſſer nach eben dem Geſetz, wornach alle ſchwere Körper frey fallen.

Wenn $m = n\sqrt{2}$, alſo $mm = 2nn$ iſt, ſo wird $q = \frac{mm}{0} a\left(\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\right) = \frac{m^2}{0}(x - x) = \frac{0}{0} m^2$, welches nichts beſtimmt. Dies rührt daher, weil in dieſem Fall die Differential-Gleichung nach einer andern Regel integrirt werden muß. Setzt man nemlich in derſelben $m^2 = 2nn$, ſo erhält man $xdv - vdx = - xdx$, alſo $\frac{xdv - vdx}{xx} = - \frac{dx}{x}$, woraus nach dem 111 und 315 §. Mech. durch die Integration $\frac{v}{x} = C - lx$ gefunden wird. Da nun $v = 0$ ſeyn muß, wenn $x = a$ iſt, ſo wird $C = la$, und $v = xl\frac{a}{x}$; folglich $q = \frac{mm}{nn} v = 2v = 2xl\frac{a}{x}$.

30 Fig. Weil $\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{m^2}{n^2}} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2}{n^2}-1}$, ſo iſt auch $q = \frac{mma}{2nn-mm}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2}{n^2}-1} - \frac{x}{a}\right)$, und dieſer Ausdruck wird $= 0$; einmahl, wenn $x = a$, und hiernächſt auch, wenn $x = 0$ iſt. Die Geſchwindigkeit wächſt anfangs ſehr ſchnell, wenn m gegen n einigermaßen beträchtlich groß iſt. Denn in dieſer Vorausſetzung iſt $\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{m^2}{n^2}}$ ein ſehr kleiner Bruch, alſo wird gleich anfangs, ſo bald x um etwas ſehr weniges kleiner, als a iſt, $q = \frac{mmx}{mm-2nn}$. Dieſe Geſchwindigkeit nimmt hiernächſt wieder ab. Demnach wird einmahl die Geſchwindigkeit am gröſten ſeyn.

166 §.

Die gröſte Geſchwindigkeit des Waſſers zu finden, wenn es aus einem priſmatiſchen oder cylindriſchen Gefäß läuft.

Aufl. Man ſetze, nach dem 343 §. Mechan., $\frac{dv}{dx} = 0$, ſo hat man $\left(\frac{m^2}{n^2} - 1\right)v - x = 0$, und daraus folgt $v = \frac{n^2 x}{m^2 - n^2}$, welche die der

grö-

gröſten Geſchwindigkeit zugehörige Höhe iſt, die das Waſſer in GH erreicht. Alſo erreicht es beym Auslauf PL die gröſte Geſchwindigkeit, der die Höhe $q = \frac{m^2}{m^2 - n^2} x$ zugehört. Um nun zu finden, wie groß x in dieſem Fall ſey, ſetze man dieſen Werth dem vorhin gefundenen allgemeinen Ausdruck für q gleich; ſo hat man

$$\frac{m^2 x}{m^2 - n^2} = \frac{m^2 a}{2nn - mm}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2 - n^2}{n^2}} - \frac{x}{a}\right).$$

Dieſe Gleichung durch $\frac{m^2 x}{a}$ dividirt, giebt

$$\frac{1}{m^2 - n^2} = \frac{1}{2n^2 - m^2}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2}{n^2} - 2} - 1\right),$$

alſo

$$\frac{1}{m^2 - n^2} + \frac{1}{2n^2 - m^2} = \frac{1}{2n^2 - m^2} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2}{n^2} - 2},$$

und $\frac{2n^2 - m^2}{m^2 - n^2} + 1 = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2}{n^2} - 2},$

folglich $\frac{n^2}{m^2 - n^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2}{n^2} - 2},$

oder $\left(\frac{n^2}{m^2 - n^2}\right)^{\frac{n^2}{m^2 - 2n^2}} = \frac{x}{a},$

 und

$$\text{und } x = a \left(\frac{n^2}{m^2 - n^2} \right)^{\frac{n^2}{m^2 - 2n^2}}.$$

Dies ſtatt x geſetzt, giebt die der gröſten Geſchwindigkeit zugehörige Höhe

$$= \frac{m^2 a}{m^2 - n^2} \left(\frac{nn}{mm - nn} \right)^{\frac{n^2}{m^2 - 2n^2}}.$$

Die Formuln dieſes und des vorigen §. finden auch ihre Anwendung, wenn das Waſſer durch eine ſeitwärts angebrachte verticale Oefnung nach horizontaler Richtung ausläuft, wie FG beim Gefäß ABFD (4 Fig.) wäre, wenn man die dortige Röhre FGHI hier weg läſt. Eigentlich müſte das Integral $N = \int \frac{m^2 ds}{z}$ (160 §) ſo genommen werden: wenn QPLK die centriſche Linie, und MN ein Querſchnitt des Strudels iſt, den man ſich ſo, wie im 20 §., vorſtellen muß; ſo müſte man das Integral erſtlich für den Strudel, da dann z veränderlich wäre, und alsdenn auch für den übrigen Theil des Gefäßes bis an die Oberfläche des Waſſers ſuchen. Allein die Geſtalt des Strudels iſt unbekannt: deswegen iſt man genöthiget, den dahin gehörigen Theil des Integrals N beyſeit zu ſetzen. Man muß demnach hier durch s die Höhe der Oberfläche des Waſſers im Gefäß über die Axe des ausſprützenden Waſſerſtrahls verſtehen, da dann, wie im 162 §., $s = x$ iſt. In der That iſt aus einem ähnlichen Grunde auch die Rechnung des 165 §. nur eine Näherung, weil das Integral N für den Strudel, der über der

Oef-

Oefnung im Boden entſteht, dort ebenfalls beyſeit geſetzt iſt.

167 §.

Die Röhre *ACMP* ſey cylindriſch, übrigens 31 Fig.
aber ſey ſie, wie man will, gebogen: man ſucht die Geſchwindigkeit des Waſſers, nachdem eine gegebene Menge, die den Raum *ABDC* füllte, ausgelaufen iſt.

Aufl. Es iſt im gegenwärtigen Fall $y = z = m$, alſo $N = ms$. Dies in die Differential-Gleichung des 160 §. geſetzt, und $K = k$ angenommen, giebt

$$sdv - \frac{m^2 vds}{n^2} + vds = -(x-b)ds.$$

(M. ſ. Dan. Bernoulli Hydrodyn. Sect. III. §. 20. p. 42. woſelbſt ξ das iſt, was hier s heiſt, und x ſtatt $x-b$ ſteht.) Man multiplicire mit

$s^{-\frac{m^2}{n^2}}$, ſo erhält man

$$\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) vs^{-\frac{m^2}{n^2}} ds + s^{1-\frac{m^2}{n^2}} dv = -(x-b)s^{-\frac{m^2}{n^2}} ds,$$ und dies integrirt giebt

$$vs^{1-\frac{m^2}{n^2}} = C - \int (x-b)s^{-\frac{m^2}{n^2}} ds,$$ alſo

$$v = s^{\frac{m^2}{n^2}-1} \times \left(C - \int (x-b)s^{-\frac{m^2}{n^2}} ds\right).$$

§. 168

32 Fig. Wenn der Canal ABQP grade, und gegen den Horizont unter dem Winkel $gGF = \gamma$ geneigt iſt, ſo hat man $W\gamma = x = s\sin\gamma$, und $b = 0$. Folglich wird

$$vs^{1 - \frac{m^2}{n^2}} = C - \sin\gamma \int s^{1 - \frac{m^2}{n^2}} ds = C - \frac{n^2 \sin\gamma}{2n^2 - m^2} s^{2 - \frac{m^2}{n^2}}.$$

Wenn aber $v = 0$, ſo iſt $x = a$, $s = \beta = \frac{a}{\sin\gamma}$. Dies giebt $C = \frac{n^2 \sin\gamma}{2n^2 - m^2} \beta^{2 - \frac{m^2}{n^2}}$, alſo

$$vs^{1 - \frac{m^2}{n^2}} = \frac{n^2 \sin\gamma}{2n^2 - m^2} \left(\beta^{2 - \frac{m^2}{n^2}} - s^{2 - \frac{m^2}{n^2}}\right),$$

und $v = \frac{n^2 \beta \sin\gamma}{2n^2 - m^2} \left(\left(\frac{\beta}{s}\right)^{1 - \frac{m^2}{n^2}} - \frac{s}{\beta}\right)$.

Es iſt aber $\beta \sin\gamma = a$, und $\frac{\beta}{s} = \frac{a}{x}$, alſo wird $v = \frac{n^2 a}{2n^2 - m^2} \left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1 - \frac{m^2}{n^2}} - \frac{x}{a}\right)$. Dieſer Ausdruck kommt mit demjenigen völlig überein, der im 165 §. für vertical ſtehende Gefäße gefunden ward. Demnach ſind in beyden Fällen die Geſchwindigkeiten gleich, wenn das Waſſer auf einerley Tiefe geſunken iſt.

Die im 166 §. aus dieſer Gleichung geſchloſſene Folgen finden demnach auch hier ihre Anwendung. Die Geſchwindigkeit wächſt anfangs ſehr ſchnell, und nimmt hiernächſt wieder ab. Setzt man $s = \frac{x}{\sin\gamma}$, alſo $ds = \frac{dx}{\sin\gamma}$ in die Differential-Gleichung des 167 §. ſo wird

$$xdv - \frac{m^2}{n^2}\, vdx + vdx = -xdx,$$ (weil $h = 0$)

wie für vertical ſtehende Gefäße im 165 §. Alſo iſt wie im 166 §. die der gröſten Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $= \frac{n^2 x}{m^2 - n^2}$, und $x =$

$$a\left(\frac{n^2}{m^2 - n^2}\right)^{\frac{n^2}{m^2 - 2n^2}}.$$

169 §.

Die Zeit zu finden, binnen der das Waſſer in einem graden cylindriſchen, oder priſmatiſchen Gefäß um eine gegebene Tiefe ſinkt.

Aufl. Weil allemahl $\sqrt{v} = \frac{ds}{dt}$, (106 §. Mech.) hier aber ds negativ, alſo $\sqrt{v} = -\frac{ds}{dt}$ iſt, ſo hat man $dt = -\frac{ds}{\sqrt{v}}$. In dieſe Gleichung ſetze man den im vor. §. durch s ausgedruckten Werth von v, ſo wird $dt =$

$- ds$

$$\frac{-ds}{\sqrt{\frac{n^2\beta\sin\gamma}{2n^2-m^2}\left(\left(\frac{\beta}{s}\right)^{1-\frac{m^2}{n^2}}-\frac{s}{\beta}\right)}}=$$

$$\frac{-dx:\sin\gamma}{\sqrt{\frac{n^2 a}{2n^2-m^2}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{m^2}{n^2}}-\frac{x}{a}\right)}}.$$

Kann man hievon das Integral finden, ſo hat man eine Gleichung zwiſchen t und x, da dann, wenn das Gefäß vertical ſteht, $\sin\gamma = 1$ wird. Aber die Methode, wornach das gedachte Integral geſucht werden müſte, ſetzt mehr theoretiſche Lehren voraus, als bisher vorgetragen ſind. (Wer in der Integralrechnung ſchon geübt iſt, kann die allgemeine Auflöſung in des Hrn. Dan. Bernoulli Hydrodyn. Sect. IV. §. 10. nachſchlagen.) Deswegen ſoll hier nur der Fall betrachtet werden, wenn das Gefäß eine ſehr kleine Oefnung hat, alſo m in Vergleichung mit n ſehr groß iſt. Alsdenn kann man $2n^2-m^2$ $=-m^2$, und $\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{m^2}{n^2}}=0$ ſchätzen. Dies giebt $dt=-\frac{1}{\sin\gamma}\cdot\frac{dx}{\frac{n}{m}\sqrt{x}}=$ $-\frac{m}{n\sin\gamma}x^{-\frac{1}{2}}dx$, folglich $t = C$ –

$- \frac{2m}{n \sin\gamma} x^{\frac{1}{2}} = C - \frac{2m}{n \sin\gamma} \sqrt{x}$. Da nun $t = 0$, wenn $x = a$, ſo wird $C = \frac{2m}{n \sin\gamma} \sqrt{a}$, alſo $t = \frac{2m}{n \sin\gamma} (\sqrt{a} - \sqrt{x})$, oder $t = \frac{2m\sqrt{a}}{n \sin\gamma} \left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)$. (Man vergleiche hiemit oben den 59 §.) Für vertical ſtehende Gefäße ſetzt man $\sin\gamma = 1$.

Es vergeht demnach längere Zeit, wenn das Gefäß gegen den Horizont geneigt iſt, bevor das Waſſer um eine gegebene Tiefe ſinkt, als in dem Fall, wenn das Gefäß vertical ſteht. Alſo vergeht auch längere Zeit bevor es eine gegebene Geſchwindigkeit erreicht, weil in beyden Fällen für einerley v, auch x einerley iſt.

170 §.

Die Zeit zu finden, binnen der das auslaufende Waſſer ſeine gröſte Geſchwindigkeit erreicht, nebſt der Menge Waſſer, die binnen dieſer Zeit ausläuft, wenn das Gefäß noch wie bisher beſchaffen, und die Oefnung n gegen m ſehr klein iſt.

Aufl. Die Geſchwindigkeit iſt am gröſten, wenn $x = a \left(\frac{n^2}{m^2 - n^2}\right)^{\frac{n^2}{m^2 - 2n^2}}$ wird. Setzt man dieſen Werth von x in die Gleichung $t = \frac{2m\sqrt{a}}{n \sin\gamma} \left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)$, ſo iſt die geſuchte Zeit wenigſtens beynahe gefunden.

Weil

Weil angenommen wird, daß n gegen m ſehr klein ſey, ſo kann man n weglaſſen, und $x = a \times \left(\frac{n^2}{m^2}\right)^{\frac{n^2}{m^2}}$ ſetzen, oder auch $x = a : \left(\frac{m^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{m^2}}$. Nun iſt der Ausdruck $\left(\frac{m^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{m^2}}$ beynahe $= 1$, weil $\frac{n^2}{m^2}$ beynahe $= 0$ iſt. Setzt man alſo $\left(\frac{m^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{m^2}} = 1 + z$, ſo iſt z ſehr klein, alſo beynahe $l(1+z) = z$, wenn die natürlichen Logarithmen verſtanden werden, (315 §. Mech.) folglich wird $\left(\frac{m^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{m^2}} = 1 + l\left(\frac{m^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{m^2}} = 1 + \frac{2n^2}{m^2} l \frac{m}{n}$, und der obige Werth von $x = \frac{a}{1 + \frac{2n^2}{m^2} l \frac{m}{n}}$.

Es iſt überdem beynahe $\frac{1}{1 + \frac{2n^2}{m^2} l \frac{m}{n}} = 1 - \frac{2n^2}{m^2} l \frac{m}{n}$, wie ſich durch die Diviſion ergiebt:

giebt: alſo wird $x = a - \frac{2n^2a}{m^2} l \frac{m}{n}$. Demnach iſt die Oberfläche des Waſſers, in dem Augenblick, da es die gröſte Geſchwindigkeit erlangt, um das Stück $r = a - x = \frac{2n^2a}{m^2} l \frac{m}{n}$ geſunken. Ueberdem hat man $\frac{x}{a} = 1 - \frac{2n^2}{m^2} l \frac{m}{n}$, und beynahe $\sqrt{\frac{x}{a}} = 1 - \frac{n^2}{m^2} l \frac{m}{n}$ (89 §. A. R.). Alſo wird die geſuchte Zeit $t = \frac{2m\sqrt{a}}{n \sin\gamma} \cdot \frac{n^2}{m^2} l \frac{m}{n}$, d. i. $t = \frac{2n\sqrt{a}}{m \sin\gamma} l \frac{m}{n}$. Weil nun das Waſſer im Gefäß binnen dieſer Zeit um die Tiefe $r = \frac{2n^2a}{m^2} l \frac{m}{n}$ ſinkt, ſo iſt die binnen eben der Zeit ausgelaufene Waſſermenge $= mr = \frac{2n^2a}{m} l \frac{m}{n}$.

Hiebey iſt nun zu bemerken, weil bisher die Geſchwindigkeit durch die Quadrat-Wurzel aus der zugehörigen Höhe ausgedrückt worden, daß dieſer Ausdruck die Zeit in $\frac{1}{250}$ Secunden geben würde, wenn man a in Scrupeln eines Rheinländiſchen Fußes ausdrückte. Will man aber t in Secunden haben, ſo muß $2t\sqrt{g}$ ſtatt t geſchrieben werden, da dann g die Höhe des freyen Falles in einer Secunde bedeutet (117 §. Mechan.), und man erhält $t = \frac{n\sqrt{a}}{m \sin\gamma\sqrt{g}} l \frac{m}{n}$.

Weil

Weil angenommen iſt, daß $\frac{m}{n}$ eine ſehr große Zahl ſey, ſo iſt zwar auch $l\frac{m}{n}$ etwas groß, jedoch weiß man, daß die Logarithmen bey weitem nicht ſo ſchnell, als die zugehörigen Zahlen wachſen. Demnach wird ſowohl die gefundene Zeit, als auch die Waſſermenge ganz ungemein klein ſeyn. Es ſey z. E. $a = \frac{1}{2}$ Fuß, $\frac{n}{m} = \frac{1}{100}$, und das Verhältniß der Zuſammenziehung des Waſſerſtrahls ſey $\sqrt{2:1}$ (83 §.), ſo muß man eigentlich $\frac{n}{\sqrt{2}}$ ſtatt n ſchreiben, und es wird $\frac{n^2}{m^2} = \frac{1}{20000}$, $2a = 1$, $\frac{m}{n} = 100\sqrt{2}$. Dies giebt $r = \frac{1}{20000}(l\,100 + \frac{1}{2}l.2)$, und man findet log. nat. $100 = 2 \times 2{,}302585 = 4{,}60517$; log. nat. $2 = 0{,}3010300 \times 2{,}302585 = 0{,}693147$; alſo $r = 0{,}0002475$ Fuß. Herr Dan. Bernoulli hat den Verſuch mit einem Gefäß, das die angenommenen Abmeſſungen hatte, angeſtellt, und es war $m = 6{,}2$ Quadr. Zoll. Weil nun $r = 0{,}00297$ Zoll iſt, ſo wird die Waſſermenge $m \times r = 0{,}018414$ Cub. Zoll, ungefehr $= \frac{1}{52}$ Cub. Zoll, oder 33 Cub. Linien. Das Gefäß ſtand vertical, alſo war $\sin\gamma = 1$, und man findet $t = \frac{1}{100\sqrt{2}\sqrt{2g}}(l\,100 + \frac{1}{2}l\,2)$, wo man $g = 16$ nehmen kann, und man erhält $t = 0{,}0062$ Secunden, welches eine ganz unmerklich kleine Zeit iſt. Beym Verſuch ſprützte das Waſſer nach horizontaler Richtung

tung aus, und es hätten 33 Cub. Linien Waſſer zwiſchen der äußern Gränze der Gußweite (23 §.) und dem Punct niederfallen müſſen, der grade unter der Oefnung lag. Wenn ein mittelmäßiger Tropfen ungefähr 6 Cub. Linien groß iſt, ſo wären dies etwa 5 bis 6 Tropfen. Bernoulli hat aber zwiſchen den erwähnten Gränzen gar nichts gefunden (Hydrod. Sect. IV. §. 14. p. 70. 71.). Dies rührte ohne Zweifel daher, weil die wenigen erwähnten Tropfen ſo ſchnell von dem gleich nachfolgenden Waſſer mit fortgetrieben werden, daß ſie ſich von denſelben nicht abſondern und zwiſchen den gedachten Gränzen niederfallen können.

171 §.

Die Röhre *BDLQ* ſey noch cylindriſch, unterwärts aber, wie man will, gebogen, jedoch ſo, daß wenn durch die Mitte *G* der untern Oefnung eine Horizontalfläche gelegt wird, das Stück *gH*, was oberhalb dieſer Ebene liegt, grade und gegen den Horizont unter dem Winkel γ geneigt ſey: man ſucht die Geſchwindigkeit des Waſſers, nachdem eine gegebene Menge ausgelaufen iſt. 31 Fig.

Aufl. Das Waſſer ſey von AB bis CD geſunken, ſo iſt $g\gamma = r$, $G\gamma = s$, $X\gamma = x - b$, $Fg = a$, $EG = b$. Es ſey ferner $GVH = \alpha$, ſo iſt $Hg = \beta - \alpha$, und $H\gamma = s - \alpha$. Ferner iſt $X\gamma = x - b = (s - \alpha)\sin\gamma$. Dies ſetze man in die Gleichung des 167 §., ſo wird

$$vs^{1 - \frac{m^2}{n^2}} = C - \sin\gamma \int (s^{1 - \frac{m^2}{n^2}} ds - \alpha s^{-\frac{m^2}{n^2}} ds).$$

Es ſey Kürze halber $1 - \frac{m^2}{n^2} = k$, alſo $-\frac{m^2}{n^2} = k - 1$, ſo iſt

$$vs^k = C - \frac{\sin\gamma}{k+1}s^{k+1} + \frac{\alpha\sin\gamma}{k}s^k.$$

Da nun $s = \beta$ ſeyn muß, wenn $v = 0$ iſt, ſo wird

$$C = \frac{\sin\gamma}{k+1}\beta^{k+1} - \frac{\alpha\sin\gamma}{k}\beta^k,$$

und $v = \frac{s\sin\gamma}{k+1}\left(\frac{\beta}{s}\right)^{k+1} - \frac{\alpha\sin\gamma}{k}\left(\frac{\beta}{s}\right)^k - \frac{\sin\gamma}{k+1}s + \frac{\alpha\sin\gamma}{k}$, oder $v =$

$$\frac{\alpha\sin\gamma}{k}\left(1-\left(\frac{\beta}{s}\right)^k\right) - \frac{s\sin\gamma}{k+1}\left(1-\left(\frac{\beta}{s}\right)^{k+1}\right).$$

172 §.

Wenn $m = n$, alſo $k = 0$ iſt, ſo wird der erſte Theil des gefundenen Ausdrucks $= \alpha\sin\gamma \times \frac{0}{0}$, woraus ſich nichts ſchließen läßt, und man muß für dieſen Fall das Integral beſonders ſuchen. Die Differential-Gleichung im 167 §. giebt, wenn man $m = n$ ſetzt, folgende: $sdv = -(x-b)ds$. Man ſetze $x - b = (s - \alpha)\sin\gamma$, ſo wird $sdv = (\alpha - s)ds\sin\gamma$, alſo $dv = \frac{\alpha ds\sin\gamma}{s} - ds\sin\gamma$, folglich $v = C + (\alpha ls - s)\sin\gamma$. Für $s = \beta$ iſt $v = 0$, alſo $C = (\beta - \alpha l\beta)\sin\gamma$, und $v = \left(\beta - s + \alpha l\frac{s}{\beta}\right)\sin\gamma$.

Der

Der größten Geſchwindigkeit gehört in dieſem Fall die Länge $s = \alpha$ zu, welches die Differential-Gleichung ergiebt, wenn man $dv = 0$ ſetzt. Uebrigens wird nicht alles Waſſer auslaufen, ſondern $v = 0$ ſeyn, wenn $\beta - s + \alpha l \frac{s}{\beta} = 0$ iſt. Dies erfolgt nun einmahl, wenn $s = \beta$ iſt, aber auch fürs zweytemahl, wenn $\beta + \alpha ls = s + \alpha l\beta$ iſt, oder $s - \alpha ls = \beta - \alpha l\beta$.

173 §.

Wenn $m = n\sqrt{2}$, alſo $\frac{m^2}{n^2} = 2$ iſt, ſo wird $k + 1 = 0$, und die Gleichung des 171 §. beſtimmt wiederum v nicht. Verändert man aber die Differentialgleichung dieſer Vorausſetzung gemäß, ſo wird $sdv - vds = (\alpha - s)\, ds \sin\gamma$. Man dividire mit ss, ſo wird

$$\frac{sdv - vds}{ss} = \left(\alpha s^{-2} ds - \frac{ds}{s}\right)\sin\gamma,$$

und dies giebt

$$\frac{v}{s} = C - \frac{\alpha \sin\gamma}{s} - \sin\gamma\, ls.$$

Für $s = \beta$ iſt $v = 0$, alſo $C = \frac{\alpha \sin\gamma}{\beta} + \sin\gamma\, l\beta$,

und $$\frac{v}{s} = \alpha \sin\gamma \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{s}\right) + \sin\gamma\, l \frac{\beta}{s},$$

folglich $$v = \alpha \sin\gamma \left(\frac{s}{\beta} - 1\right) + s \sin\gamma\, l \frac{\beta}{s}.$$

Wenn man $dv = 0$ ſetzt, ſo ergiebt ſich $v = (s - \alpha)\sin\gamma$. Dies dem eben gefundenen Werth

gleich geſetzt, giebt $\beta s - \alpha\beta = \alpha s - \alpha\beta + \beta s\, l\, \frac{\beta}{s}$

alſo ferner $\beta = \alpha + \beta l \frac{\beta}{s}$, und $l \frac{\beta}{s} = \frac{\beta - \alpha}{\beta}$.

Dies giebt $\frac{\beta}{s} = e^{\frac{\beta - \alpha}{\beta}}$, und $s = \beta e^{\frac{\beta - \alpha}{\beta}}$,

welches der Werth von s iſt, dem die gröſte Geſchwindigkeit zugehört. Ihre zugehörige Höhe iſt alſo $= (\beta e^{\frac{\beta - \alpha}{\beta}} - \alpha) \sin\gamma$. Da auch wiederum nicht alles Waſſer ausläuft, ſo findet man die Stelle, wie weit es in der Röhre laufen wird, aus der Gleichung $\alpha\left(\frac{s}{\beta} - 1\right) + s l \frac{\beta}{s} = 0$. (M. ſ. *Dan. Bernoulli* Hydrodyn. Sect. III. §. 26. 27. p. 49. 50.)

174 §.

33 Fig. Es ſey *ABCD* ein grader abgekürzter Kegel *FG* = *b* ſeine Axe, *BC* und *AD* ſeine Grundflächen, *MN* ein Querſchnitt mit den Grundflächen parallel, in der Höhe *GP* von der untern Grundfläche *AD*. Die Grundflächen $AD = n$; $BC = f$, nebſt der Höhe $GF = b$ ſind gegeben: man ſucht eine Gleichung zwiſchen $GP = x$, und $MN = z$.

Aufl. Es ſey EAD der ganze Kegel, wozu der abgekürzte gehört; ſo hat man $n : f = GE^2 : FE^2$, und $z : f = PE^2 : FE^2$ (367 §. G.) alſo auch $\surd n : \surd f$

=

$= GE : FE$, und $\sqrt{z} : \sqrt{f} = PE : FE$, alſo ferner $\sqrt{n} - \sqrt{f} : \sqrt{f} = GE - FE : FE$, und $\sqrt{z} - \sqrt{f} : \sqrt{f} = PE - FE : FE$ (189 §. G.). Aus dieſen beyden Proportionen folgt ferner $\sqrt{n} - \sqrt{f} : \sqrt{z} - \sqrt{f} = GE - FE : PE - FE = GF : FP$. Da nun $GF = b$, und $FP = b - x$, ſo erhält man $b(\sqrt{z} - \sqrt{f}) = (b - x)(\sqrt{n} - \sqrt{f})$. Demnach wird $z = \frac{(b\sqrt{n} + (\sqrt{f} - \sqrt{n})x)^2}{bb}$, oder auch $z = \frac{(b\sqrt{n} - (\sqrt{n} - \sqrt{f})x)^2}{bb}$.

Wenn man $FP = x$ ſetzt, ſo iſt $GP = b - x$, und es wird $b(\sqrt{z} - \sqrt{f}) = x(\sqrt{n} - \sqrt{f})$. Daraus folgt $z = \frac{(b\sqrt{f} + (\sqrt{n} - \sqrt{f})x)^2}{bb} = \frac{(b\sqrt{f} - (\sqrt{f} - \sqrt{n})x)^2}{bb}$. Dieſer Ausdruck iſt alſo dem vorigen ganz ähnlich, ſo daß, wenn man nun $BC = n$, und $AD = f$ ſetzte, beyde völlig einerley würden.

175 §.

Das cylindriſche, oder priſmatiſche Gefäß *ABEO* hängt mit der coniſchen Röhre *OPQR*, die unten am Boden ſeitwärts des Gefäßes angebracht iſt, zuſammen, worin das Waſſer aus dem Gefäß durch die Oefnung *OR* tritt, und bey *PQ* ausläuft: man ſucht die Geſchwindigkeit des Waſſers, nachdem es im Gefäß um eine gegebene Tiefe geſunken iſt. 33 Fig.

Aufl. Man muß eine von den allgemeinen Differentialgleichungen des 160 §. brauchen, und zuförderſt

derſt $N = \int \frac{m^2 ds}{z}$ ſuchen. In ſolcher Abſicht muß man erwegen, daß z veränderlich ſey, ſo lange $s < b$ iſt, für größere s aber beſtändig $= m$ bleibe. Man verſtehe alſo anfangs durch z den Querſchnitt MN der coniſchen Röhre OPQR, ſo bleibt $PQ = n$, $AB = m$, wie im 159 §. $GS = s$. So lange nun $s < b$ iſt, hat man $z = \frac{(b\sqrt{n} + (\sqrt{f} - \sqrt{n})s)^2}{bb}$

(174 §.). Dies giebt $\frac{ds}{z} = \frac{bbds}{(b\sqrt{n} + (\sqrt{f} - \sqrt{n})s)^2}$.

Um hievon das Integral zu finden, ſetze man $b\sqrt{n} + (\sqrt{f} - \sqrt{n})s = S$, ſo hat man $ds =$

$\frac{dS}{\sqrt{f} - \sqrt{n}}$, und $\frac{ds}{z} = \frac{bb}{\sqrt{f} - \sqrt{n}}$

$\cdot \frac{dS}{S^2}$, alſo $\int \frac{ds}{z} = C - \frac{bb}{\sqrt{f} - \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{S}$.

Wenn nun $s = 0$ iſt, ſo hat man $S = b\sqrt{n}$, und $\int \frac{ds}{z} = 0$, alſo $C = \frac{bb}{(\sqrt{f} - \sqrt{n})b\sqrt{n}}$. Daraus folgt $\int \frac{ds}{z} = \frac{b}{(\sqrt{f} - \sqrt{n})\sqrt{n}}$

$- \frac{bb}{(\sqrt{f} - \sqrt{n})(b\sqrt{n} + (\sqrt{f} - \sqrt{n})s)}$. Weil nun dies Integral für die ganze Röhre von G bis K genommen werden muß, ſo ſetze man $s = GK = b$, und man erhält den Ausdruck

$$\frac{b}{(\sqrt{f}-\sqrt{n})\sqrt{n}} - \frac{b}{(\sqrt{f}-\sqrt{n})\sqrt{f}} =$$

$$\frac{b\sqrt{f}-b\sqrt{n}}{(\sqrt{f}-\sqrt{n})\sqrt{fn}} = \frac{b}{\sqrt{fn}}.$$ Nun ſuche

man $\int \frac{ds}{z}$ für ſolche s die größer als b ſind, ſo hat

man allemahl $z=m$, alſo $\int \frac{ds}{z} = \frac{s}{m} + C$

Aber für $s=b$ iſt dies Integral $= \frac{b}{\sqrt{fn}}$, alſo C

$= \frac{b}{\sqrt{fn}} - \frac{b}{m}$, und dies giebt $\int \frac{ds}{z} =$

$\frac{s-b}{m} + \frac{b}{\sqrt{fn}}$, folglich $N = m(s-b) + \frac{m^2 b}{\sqrt{fn}}$.

Nun ſetze man den Winkel AKG $=\eta$, und ziehe GL horizontal, ſo iſt KL $= b\cos\eta$ das, was im 159 §. b hieß. Man ſchreibe alſo in der Gleichung des 160 §. $b\cos\eta$ ſtatt b, ſetze $K=k$ und $N=m(s-b)$ $+ \frac{m^2 b}{\sqrt{fn}}$, ſo erhält man

$$\left(m(s-b)+\frac{m^2 b}{\sqrt{fn}}\right)dv - \frac{m^2 vyds}{n^2} + \frac{m^2 vds}{y}$$
$$= -(x - b\cos\eta)yds.$$ Weil nun $y=m$ iſt, ſo wird

$$\left(s-b+\frac{mb}{\sqrt{fn}}\right)dv - \frac{m^2}{n^2}vds + vds =$$
$$-(x-b\cos\eta)ds.$$

Dafern die Röhre cylindriſch, und horizontal wäre, ſo hätte man $f = n$, und $\cos\eta = 0$, alſo

$$\left(s - b + \frac{mb}{n}\right)dv - \frac{m^2}{n^2}\,vds + vds = -xds.$$

Ferner iſt hier $x = a - r$, wenn r die Tiefe bedeutet, um welche das Waſſer im Gefäß ſchon geſunken iſt, und wenn w die Länge des ausgelaufenen Waſſer-Cylinders bedeutet, ſo iſt $r = \frac{nw}{m}$, alſo $x = a - \frac{n}{m}w$. Die Geſchwindigkeit des durch PQ laufenden Waſſers ſey q, ſo iſt $v = \frac{n^2}{m^2}\,q$. Man ſetze dies in die letzte Differentialgleichung, ſo wird

$$\left(s - b + \frac{mb}{n}\right) \cdot \frac{n^2}{m^2}\,dq - qds + \frac{n^2}{m^2}\,qds$$

$$= -ads + \frac{n}{m}\,wds.$$

Weil ferner $s = b + x = b + a - \frac{n}{m}\,w$, alſo $ds = -\frac{n}{m}\,dw$, ſo erhält man

$$\left(a + \frac{m}{n}b - \frac{n}{m}w\right)\frac{n^2}{m^2}dq + \frac{n}{m}\,qdw - \frac{n^3}{m^3}\,qdw$$

$$= \frac{n}{m}\,adw - \frac{n^2}{m^2}\,wdw, \text{ oder}$$

$$\frac{n}{m}adq + bdq - \frac{n^2}{m^2}wdq + qdw - \frac{n^2}{m^2}qdw =$$
$$adw - \frac{n}{m}wdw,$$

und wenn man mit m multiplicirt, durch dw aber dividirt, ſo wird

$$\frac{m^2-n^2}{m}q + \frac{mbdq}{dw} + \frac{ndq}{mdw}(am-nw) = am - nw.$$

Dies iſt die Gleichung, welche Joh. Bernoulli für dieſen beſondern Fall der horizontalen cylindriſchen Röhre nach ſeiner Methode findet, Op. Joh. Bernoulli T. IV. pag. 405. woſelbſt z, h, m, x, das iſt, was hier q, m, n, w heißt.

Um nun die allgemeine Differentialgleichung zu integriren, ſetze man in derſelben $s - b$ ſtatt x, ſo hat man

$$\left(s - b + \frac{mb}{\sqrt{fn}}\right)dv - \frac{m^2}{n^2}vds + vds =$$
$$-(s - b - b\cos\eta)\,ds.$$

Man ſetze $s - b + \frac{mb}{\sqrt{fn}} = z$, alſo $s = b + z - \frac{mb}{\sqrt{fn}}$, und $ds = dz$, ſo verwandelt ſich die Gleichung in folgende

$$zdv + \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)vdz = bdz\cos\eta + \frac{mbdz}{\sqrt{fn}} - zdz.$$

Man ſetze ferner $1 - \frac{m^2}{n^2} = k$, und multiplicire die Gleichung durch z^{k-1}, ſo wird

$$z^{k} dv + kvz^{k-1} dz = bz^{k-1} dz \cos\eta + \frac{mb}{\sqrt{fn}} z^{k-1} dz - z^{k} dz,$$ und die Integration giebt

$$z^{k} v = \left(\frac{b \cos\eta}{k} + \frac{mb}{k\sqrt{fn}} \right) z^{k} - \frac{z^{k-1}}{k+1} + C.$$

Weil nun $v = 0$ iſt, wenn $s = \beta = b + a$, ſo wird zugleich $z = a + \frac{mb}{\sqrt{fn}}$. Statt deſſen ſchreibe man A, ſo erhält man C =

$$\frac{A^{k+1}}{k+1} - \left(\frac{b \cos\eta}{k} + \frac{mb}{k\sqrt{fn}} \right) A^{k},$$ alſo

$$z^{k} v = \frac{b \cos\eta \sqrt{fn} + mb}{k\sqrt{fn}} \left(z^{k} - A^{k} \right) + \frac{1}{k+1} \left(A^{k+1} - z^{k+1} \right),$$

und $$v = \frac{b \cos\eta \sqrt{fn} + mb}{k\sqrt{fn}} \left(1 - \left(\frac{A}{z} \right)^{k} \right) + \frac{A}{k+1} \left(\left(\frac{A}{z} \right)^{k} - \frac{z}{A} \right).$$

Unter dieſer allgemeinen Auflöſung iſt eine ziemliche Anzahl beſonderer Fälle enthalten. Wenn die Röhre horizontal iſt, ſo wird $\cos\eta = 0$, alſo $v =$

$$\frac{mb}{k\sqrt{fn}} \left(1 - \left(\frac{A}{z} \right)^{k} \right) + \frac{A}{k+1} \left(\left(\frac{A}{z} \right)^{k} - \frac{z}{A} \right).$$

Iſt aber die Röhre vertical am Boden des Gefäſ-
35 ſes angebracht, wie in der 35 Figur, ſo wird $\cos\eta$
Fig. $= -1$, alſo

$v =$

$$v = \frac{mb - b\surd fn}{k\surd fn}\left(1 - \left(\frac{A}{z}\right)^k\right)$$

$$+ \frac{A}{k+1}\left(\left(\frac{A}{z}\right)^k - \frac{z}{A}\right).$$

In den Fällen, wenn die Röhre cylindriſch iſt, muß man $f = n$ ſetzen.

176 §.

In eben dem Fall des vor. §. die Geſchwindigkeit des Waſſers zu finden, wenn die Oefnung n gegen m ſehr klein iſt.

Aufl. Die Geſchwindigkeit des aus der Oefnung PQ laufenden Waſſers ſey $\surd q$, alſo $v = \frac{n^2}{m^2} q$. Dies in die Differentialgleichung des vor. §. geſetzt, giebt

$$\left(s - b + \frac{mb}{\surd fn}\right)\frac{n^2}{m^2} dq - qds + \frac{n^2}{m^2} qds =$$
$$-(s - b - b \operatorname{coſ}\eta)\, ds.$$

Läſt man hier alles weg, was den Factor $\frac{n}{m}$ hat, ſo wird $q = s - b - b \operatorname{coſ}\eta$, d. i. $q = x - b \operatorname{coſ}\eta$, welches wieder dem 58 §. gemäß iſt. Es iſt nemlich $x - b \operatorname{coſ}\eta$ die Höhe der obern Waſſerfläche über die untere Oefnung.

Man kann aber die geſuchte Geſchwindigkeit richtiger auf folgende Art finden. Aus der eben angeführten Differential-Gleichung laſſe man nur diejenigen Glieder weg, die den Factor $\frac{n^2}{m^2}$ haben,

weil

weil $\frac{n^2}{m^2}$ ſehr viel kleiner, als $\frac{n}{m}$ iſt, ſo wird

$$\frac{nb\sqrt{n}}{m\sqrt{f}} \cdot dq - qds = -(s - b - b\cos\eta)\, ds$$

wo auch wieder $\frac{m^2}{n^2} v$ ſtatt q geſetzt werden kann, ſo daß man dieſe Gleichung erhält

$$\frac{mb}{\sqrt{fn}} dv - \frac{m^2}{n^2} vds = -(s - b - b\cos\eta)\, ds.$$

Um hievon das Integral zu finden, ſetze man $\frac{m^2}{n^2} v - s = r$, folglich $v = \frac{n^2}{m^2}(r+s)$, und $dv = \frac{n^2}{m^2}(dr + ds)$, ſo wird

$$\frac{mb}{\sqrt{fn}} \cdot \frac{n^2}{m^2}(dr + ds) - (r+s)\, ds) = -(s - b - b\cos\eta)\, ds,$$

oder

$$\frac{n^2 b}{m\sqrt{fn}} dr + \frac{n^2 b}{m\sqrt{fn}} ds - rds = (b + b\cos\eta)\, ds$$

folglich

$$n^2 bdr + n^2 bds - mrds\sqrt{fn} = m(b + b\cos\eta)\, ds\sqrt{fn}.$$

Daraus folgt

$$(n^2 b - mr\sqrt{fn} - m(b + b\cos\eta)\sqrt{fn})\, ds = -n^2 bdr$$

alſo $ds = -\frac{n^2 bdr}{n^2 b - mr\sqrt{fn} - m(b + b\cos\eta)\sqrt{fn}}$.

Man ſetze ferner

$$n^2 b - m(b + b\cos\eta)\sqrt{fn} - mr\sqrt{fn} = z,$$

ſo

ſo iſt $dr = -\frac{dz}{m\sqrt{fn}}$, folglich $ds =$
$\frac{n^2 b}{m\sqrt{fn}} \cdot \frac{dz}{z}$, und die Integration giebt $s =$
$C + \frac{n^2 b}{m\sqrt{fn}}\, lz$. Wenn $s = \beta = b + a$ iſt, ſo wird
$v = o$, alſo $r = -\beta$. Dies giebt

$$C = \beta - \frac{n^2 b}{m\sqrt{fn}}\, l n^2 b - m(b + b\cos\eta)\sqrt{fn} - m\beta\sqrt{fn},$$

alſo

$$s = \beta + \frac{n^2 b}{m\sqrt{fn}}\, l \frac{n^2 b - m(b + b\cos\eta)\sqrt{fn} - mr\sqrt{fn}}{n^2 b - m(b + b\cos\eta)\sqrt{fn} - m\beta\sqrt{fn}}.$$

Läßt man aus dem Zehler und Nenner des letzten Bruchs $n^2 b$ weg, und ſtellt den Werth $r =$
$\frac{m^2}{n^2} v - s$ wieder her, ſo wird

$$s = \beta + \frac{n^2 b}{m\sqrt{fn}}\, l \frac{m(b + b\cos\eta)\sqrt{fn} + \frac{m^3}{n^2} v\sqrt{fn} - ms\sqrt{fn}}{m(b + b\cos\eta)\sqrt{fn} - m\beta\sqrt{fn}}.$$

oder $s - \beta = \frac{n^2 b}{m\sqrt{fn}}\, l \frac{n^2(b + b\cos\eta) + m^2 v - n^2 s}{n^2(b + b\cos\eta) - n^2\beta}$.

Daraus folgt

$$e^{\frac{m(s-\beta)\sqrt{fn}}{n^2 b}} = \frac{n^2(b + b\cos\eta) + m^2 v - n^2 s}{n^2(b + b\cos\eta) - n^2\beta},$$

alſo $n^2(b + b\cos\eta)$

$+ m^2 v$

$$+m^2 v - n^2 s = (n^2(b + b\cos\eta) - n^2\beta)e^{\frac{m(s-\beta)\sqrt{fn}}{n^2 b}},$$

und

$$v = \frac{n^2(s-b-b\cos\eta)}{m^2} - \frac{n^2(\beta-b-b\cos\eta)}{m^2}e^{\frac{m(s-\beta)\sqrt{fn}}{n^2 b}}$$

wo man x ſtatt $s - b$, und a ſtatt $\beta - b$ ſchreiben kann, ſo daß

$$v = \frac{n^2(x-b\cos\eta)}{m^2} - \frac{n^2(a-b\cos\eta)}{m^2}e^{\frac{m(s-\beta)\sqrt{fn}}{n^2 b}}.$$

Setzt man die Tiefe, um welche das Waſſer im Gefäß ſchon geſunken iſt, $= r$, ſo iſt $\beta - r = s$, alſo $s - \beta = - r$; überdem iſt $x = s - b = \beta - r - b, = a - r$, weil $\beta - b = a$; alſo wird

$$v = \frac{n^2(a-r-b\cos\eta)}{m^2} - \frac{n^2(a-b\cos\eta)}{m^2}e^{-\frac{mr\sqrt{fn}}{n^2 b}}.$$

Wenn $r = 0$ iſt, ſo wird dieſer Ausdruck $= 0$, wie erfordert wird, er wächſt aber ſehr ſchnell, ſo lange s ſehr klein iſt, und iſt faſt $= \frac{n^2(a-b\cos\eta)}{m^2}$, ſo bald r nur den kleinſten endlichen Werth hat, weil in dem Fall der negative Theil beynahe verſchwindet. Für größere r nimmt v wieder ab, und muß dieſerwegen für einen gewiſſen Werth von r am größten ſeyn.

Liegt die Röhre horizontal, ſo iſt $\cos\eta = 0$, alſo

$v =$

$$v = \frac{n^2(a-r)}{m^2} - \frac{n^2 a}{m^2} e^{-\frac{mr\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}}.$$

Falls aber die Röhre am Boden des Gefäßes vertical angebracht iſt, wie in der 35 Figur, ſo wird $\cos\eta = -1$, alſo

$$v = \frac{n^2(a+b-r)}{m^2} - \frac{n^2(a+b)}{m^2} e^{-\frac{mr\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}}.$$

M. ſ. für dieſen letzten Fall *Dan. Bernoulli* Hydrod. Sect. IV. §. 16. p. 73. 74. da dann bey ihm a das iſt, was hier $a+b$ heiſt, nemlich die Höhe der obern Oefnung über die untere. Die Vergleichung mit dem vorigen Fall der horizontalen Röhre ergiebt, daß für beyde Fälle einerley Gleichung gebraucht werden könne, wenn man a ſtatt $a+b$ ſchreibt, nur muß alsdenn durch a die Höhe der obern Oefnung über die untere verſtanden werden.

177 §.

Es bleiben alle gegebene Stücke, wie im 175 §. man ſucht die gröſte Geſchwindigkeit des Waſſers.

I. Aufl. Man muß $dv = 0$ ſetzen, um den Werth von s oder r zu finden, der dem gröſten Werth von v zugehört. Nun war im vor. §. $v =$

$$\frac{n^2(a-r-b\cos\eta)}{m^2} - \frac{n^2(a-b\cos\eta)}{m^2} e^{-\frac{mr\sqrt{fn}}{n^2 b}},$$

und daraus wird dv gefunden, wenn man das Differential der im zweyten Theil dieſes Ausdrucks vorkom-

kommenden Exponential-Größe nach dem 316 §. Mech. ſucht. Man erhält nemlich $d\upsilon =$

$$-\frac{n^2 dr}{m^2} + \frac{n^2(a-b\cos\eta)}{m^2} \cdot \frac{m\sqrt{fn}}{n^2} e^{-\frac{mr\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}} dr,$$

oder $d\upsilon = -\frac{n^2 dr}{m^2} + \frac{(a-b\cos\eta)\sqrt{fr}}{mb} e^{-\frac{mr\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}} dr.$

Dies = o geſetzt giebt

$$\frac{(a-b\cos\eta)\sqrt{fn}}{mb} e^{-\frac{mr\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}} = \frac{n^2}{m^2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{m(a-b\cos\eta)\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}} = e^{\frac{mr\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}}$$, alſo wird

$\frac{mr\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}} = l\,\frac{m(a-b\cos\eta)\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}$, und $r =$
$\frac{bn\sqrt{n}}{m\sqrt{f}}\; l\,\frac{m(a-b\cos\eta)\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}$. Ob nun gleich der Bruch $\frac{m(a-b\cos\eta)\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}$ ſehr groß iſt, ſo iſt doch ſein Logarithme dagegen nur klein, und dieſer iſt wiederum in den ſehr kleinen Bruch $\frac{nb\sqrt{n}}{m\sqrt{f}}$ multiplicirt. Daher iſt der gefundene Werth von r allemahl ſehr klein, woraus ſich die Folge ergiebt, daß das Waſſer die größte Geſchwindigkeit ſehr ſchnell erreiche.

Wenn die am Gefäß befindliche Röhre cylindriſch iſt, ſo iſt $f = n$, und folglich

$$r = \frac{nb}{m} \, l \, \frac{m(a - b\cos\eta)}{nb}.$$

Um nun eine Vergleichung zwiſchen den gröſten Geſchwindigkeiten des Waſſers für die verſchiedenen Fälle anzuſtellen, wenn die Röhre entweder cylindriſch oder coniſch iſt, darf man nur in Erwägung ziehen, daß $l \, \frac{m(a - b\cos\eta)\sqrt{f}}{nb\sqrt{n}}$ ſich deswegen, weil $\frac{m}{n}$ ſehr groß iſt, nicht merklich ändre, wenn gleich der Bruch $\sqrt{\frac{f}{n}}$ einige nicht gar groſſe Aenderungen leidet. Deswegen kann man auch für die Fälle, wenn die Röhre coniſch iſt,

$$r = \frac{nb\sqrt{n}}{m\sqrt{f}} \, l \, \frac{m(a - b\cos\eta)}{nb}$$

ſchätzen. Sind alſo die übrigen Gröſſen alle einerley, und man betrachtet die drey Fälle, da entweder $f > n$, oder $f = n$, oder $f < n$ iſt; ſo ergiebt ſich, daß r für dieſe drey Fälle nach der Ordnung immer etwas gröſſer ſey. Weil man nun überhaupt $\upsilon = \frac{n^2(a - r - b\cos\eta)}{m^2}$ ſchätzen kann, ſo iſt υ für die gedachten drey Fälle nach der Ordnung immer etwas kleiner. Läuft das Waſſer durch eine coniſche Röhre, die ſich gegen die äuſſere Oefnung zu erweitert, ſo erlangt es eine gröſſere Geſchwindigkeit; wenn ſich aber die coniſche Röhre verengert, eine kleinere Geſchwindigkeit, als in der cylindriſchen Röhre.

Dafern die Röhre horizontal liegt, alſo $\cos\eta = 0$ iſt; ſo hat man $r = \frac{bn\sqrt{n}}{m\sqrt{f}}\ l\ \frac{ma\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}$; iſt aber die Röhre vertical, alſo $\cos\eta = -1$, ſo hat man $r = \frac{bn\sqrt{n}}{m\sqrt{f}}\ l\ \frac{m(a+b)\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}$. Im letzten Fall iſt $a + b$, in jenem Fall aber a die Höhe der obern Oefnung über die untere. Man ſ. *Dan. Bernoulli* Hydrod. Sect. IV. §. 17. p. 75.

Indem die Oberfläche des Waſſers im Gefäß um die Tiefe r ſinkt, läuft ſo viel Waſſer aus, als den Raum mr füllte. Setzt man alſo ſtatt r den gefundenen Werth, ſo hat man die Menge Waſſer, die bis zu dem Augenblick ausläuft, da das Waſſer die gröſte Geſchwindigkeit erlangt,

$$= \frac{bn\sqrt{n}}{\sqrt{f}}\ l\ \frac{m(a - b\cos\eta)\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}.$$

II. Aufl. Verlangt man den Werth von r oder s, welcher der gröſten Geſchwindigkeit zugehört, völlig genau, ſo muß man ihn aus der allgemeinen Differential-Gleichung des 175 §. ſuchen. Dieſe war

$$\left(s - b + \frac{mb}{\sqrt{fn}}\right) dv - \frac{m^2}{n^2} v\,ds + v\,ds = -(s - b - b\cos\eta)\,ds,$$

welche, wenn z ſtatt $s - b + \frac{mb}{\sqrt{fn}}$, und k ſtatt $1 - \frac{m^2}{n^2}$ geſetzt ward, ſich in folgende verwandelte,

$$z^{k} dv + kvz^{k-1} dz = bz^{k-1} dz \cos\eta + \frac{mb}{\sqrt{fn}} z^{k-1} dz - z^{k} dz.$$

Man

Man ſetze nun $d\upsilon = 0$, ſo hat man

$$k\upsilon z^{k-1} = bz^{k-1}\operatorname{coſ}\eta + \frac{mb}{\sqrt{fn}}z^{k-1} - z^{k},$$

alſo $\upsilon = \frac{b\operatorname{coſ}\eta}{k} + \frac{mb}{k\sqrt{fn}} - \frac{z}{k}$. Dieſer Ausdruck dem im 175 §. gefundenen Werth von υ gleich geſetzt, giebt die Gleichung $\frac{b\operatorname{coſ}\eta\sqrt{fn}+mb}{k\sqrt{fn}} - \frac{z}{k} =$

$$\frac{b\operatorname{coſ}\eta\sqrt{fn}+mb}{k\sqrt{fn}}\left(1-\left(\frac{A}{z}\right)^{k}\right) + \frac{A}{k+1}\left(\left(\frac{A}{z}\right)^{k} - \frac{z}{A}\right).$$

Daraus folgt $\frac{z}{k+1} - \frac{z}{k} =$

$$-\frac{b\operatorname{coſ}\eta\sqrt{fn}+mb}{k\sqrt{fn}}\cdot\left(\frac{A}{z}\right)^{k} + \frac{A}{k+1}\cdot\left(\frac{A}{z}\right)^{k},$$

oder

$$\frac{z}{k(k+1)} = \left(\frac{b\operatorname{coſ}\eta\sqrt{fn}+mb}{k\sqrt{fn}} - \frac{A}{k+1}\right)\cdot\left(\frac{A}{z}\right)^{k}.$$

Man multiplicire mit $\frac{A}{z}$, ſo erhält man

$$\frac{A}{k(k+1)} = \left(\frac{b\operatorname{coſ}\eta\sqrt{fn}+mb}{k\sqrt{fn}} - \frac{A}{k+1}\right)\cdot\left(\frac{A}{z}\right)^{k+1},$$

oder $A\sqrt{fn} = (b\operatorname{coſ}\eta\sqrt{fn}+mb)(k+1) - Ak\sqrt{fn})$ $\cdot\left(\frac{A}{z}\right)^{k+1}$. Dies giebt

$$\left(\frac{z}{A}\right)^{k+1} = \frac{(b\operatorname{coſ}\eta\sqrt{fn}+mb)(k+1) - Ak\sqrt{fn}}{A\sqrt{fn}},$$

folglich

$$z = A.\left(\frac{(b\cos\eta\sqrt{fn}+mb)(k+1)-Ak\sqrt{fn}}{A\sqrt{fn}}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Stellt man nun die Werthe $A = a + \frac{mb}{\sqrt{fn}}$, $k = 1 - \frac{m^2}{n^2}$, und $z = s - b + \frac{mb}{\sqrt{fn}}$, aus dem 175 §. wieder her, ſo hat man eine Gleichung, woraus der geſuchte Werth von s genau gefunden wird. Und wenn man die gröſte Geſchwindigkeit ſelbſt verlangt, ſo muß man den eben gefundenen Werth von z in der Gleichung $v = \frac{mb}{k\sqrt{fn}} + \frac{b\cos\eta - z}{k}$ ſubſtituiren.

Wenn die Röhre fehlt, alſo $b = 0$ iſt, ſo wird $A = a$, und $z = s = x$, alſo $x = a.(-k)^{\frac{1}{k+1}} = a$

$$.\left(\frac{m^2-n^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2n^2-m^2}}, \text{ oder}$$

$$x = a.\left(\frac{n^2}{m^2-n^2}\right)^{\frac{n^2}{m^2-2n^2}}, \text{ wie im 166 §.}$$

So wird auch $v = -\frac{x}{k} = \frac{n^2x}{m^2-n^2}$.

178 §.

178 §.

Es bleiben noch eben die gegebenen Stücke, wie im 175 §. man ſucht die Zeit, binnen der das Waſſer ſeine gröſte Geſchwindigkeit erlangt, vorausgeſetzt, daß die Oefnung n gegen m ſehr klein ſey.

Aufl. Bey der angenommenen Vorausſetzung iſt $v = \frac{n^2(x - b\cos\eta)}{m^2}$ (176 §.), alſo $\sqrt{v} = \frac{n\sqrt{(x - b\cos\eta)}}{m}$. Da nun $dt = -\frac{ds}{\sqrt{v}}$, und $s - b = x$, alſo $ds = dx$, ſo erhält man $dt = -\frac{m\,dx}{n\sqrt{(x - b\cos\eta)}}$, alſo $t = C - \frac{2m}{n}\sqrt{(x - b\cos\eta)}$.

Für $x = a$ iſt $t = 0$, alſo $C = \frac{2m}{n}\sqrt{(a - b\cos\eta)}$,

und $t = \frac{2m}{n}(\sqrt{(a - b\cos\eta)} - \sqrt{(x - b\cos\eta)})$, oder

$$t = \frac{2m\sqrt{(a - b\cos\eta)}}{n}\left(1 - \sqrt{\frac{x - b\cos\eta}{(a - b\cos\eta)}}\right).$$

Nun muß ſtatt x derjenige Werth geſetzt werden, welcher der gröſten Geſchwindigkeit zugehört. Man nehme in ſolcher Abſicht den am Ende des vor. §. gefundenen Werth von z, woraus ſich hiernächſt $s = z + b - \frac{mb}{\sqrt{fn}}$, alſo auch $x = s - b$ beſtimmen läſt. Weil aber $k = 1 - \frac{m^2}{n^2}$ eine ſehr groſſe Zahl iſt, ſo kann man $k + 1 = k$ ſchätzen, und dies giebt

$$z = A\,.\left(\frac{(b\,\text{coſ}\eta\sqrt{fn}+mb)\,k - Ak\sqrt{fn}}{A\sqrt{fn}}\right)^{\frac{1}{k}},$$

wo man auch aus der eben angeführten Urſache $k = -\frac{m^2}{n^2}$ ſetzen kann. Alſo wird

$$z = A\left(\frac{Am^2\sqrt{fn}-(b\,\text{coſ}\eta\sqrt{fn}+mb)m^2}{n^2A\sqrt{fn}}\right)^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

Weiter iſt $A = \frac{a\sqrt{fn}+mb}{\sqrt{fn}}$, dies giebt $A\sqrt{fn} = a\sqrt{fn}+mb$, und $A\sqrt{fn}-mb = a\sqrt{fn}$, folglich

$$z = \frac{a\sqrt{fn}+mb}{\sqrt{fn}}\,.\left(\frac{m^2(a-b\,\text{coſ}\eta)\sqrt{fn}}{n^2(a\sqrt{fn}+mb)}\right)^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

Nun ergiebt ſich, wie im 170 §., es ſey beynahe

$$\left(\frac{m^2(a-b\,\text{coſ}\eta)\sqrt{fn}}{n^2(a\sqrt{fn}+mb)}\right)^{-\frac{n^2}{m^2}} =$$

$$1 - l\left(\frac{m^2(a-b\,\text{coſ}\eta)\sqrt{fn}}{n^2(a\sqrt{fn}+mb)}\right)^{\frac{n^2}{m^2}};$$

wenn alſo Kürze halber B ſtatt $\frac{m^2(a-b\,\text{coſ}\eta)\sqrt{fn}}{n^2(a\sqrt{fn}+mb)}$ geſchrieben wird, ſo hat man

$$z = \frac{a\sqrt{fn}+mb}{\sqrt{fn}}\left(1-\frac{n^2}{m^2}\,lB\right).$$

Da nun $z = s - b + \frac{mb}{\sqrt{fn}} = x + \frac{mb}{\sqrt{fn}}$, ſo

ſo wird $x = a - \frac{n^2(a\sqrt{fn} + mb)}{m^2\sqrt{fn}} lB$, und

$x - b\cos\eta = a - b\cos\eta - \frac{n^2(a\sqrt{fn} + mb)}{m^2\sqrt{fn}} lB$;

folglich $\frac{x - b\cos\eta}{a - b\cos\eta} = 1 - \frac{n^2(a\sqrt{fn} + mb)}{m^2(a - b\cos\eta)\sqrt{fn}} lB$,

und $\sqrt{\frac{x - b\cos\eta}{a - b\cos\eta}} = 1 - \frac{n^2(a\sqrt{fn} + mb)}{2m^2(a - b\cos\eta)\sqrt{fn}} lB$.

Folglich wird die geſuchte Zeit

$$t = \frac{n(a\sqrt{fn} + mb)}{m\sqrt{(a - b\cos\eta)}\sqrt{fn}}\, l\, \frac{m^2(a - b\cos\eta)\sqrt{fn}}{n^2(a\sqrt{fn} + mb)}.$$

Wenn man $b = 0$ ſetzt, ſo hat man den Fall des 170 §., und es wird $t = \frac{n\sqrt{a}}{m} l \frac{m^2}{n^2} = \frac{2n\sqrt{a}}{m} l \frac{m}{n}$, wie dort in der Vorausſetzung $\gamma = 90°$ gefunden iſt, und die Vergleichung ergiebt, daß die hier gefundene Zeit beträchtlich größer ſey als in jenem Fall, wenn $b = 0$ iſt. Die eben gefundene Formul läſt ſich noch etwas verkürzen, wenn man blos die in m multiplicirten Glieder behält, und das übrige wegläſt. Dies giebt

$$t = \frac{b\sqrt{n}}{\sqrt{(a - b\cos\eta)}\sqrt{f}}\, l\, \frac{m(a - b\cos\eta)\sqrt{f}}{nb\sqrt{n}}.$$

Dieſen Ausdruck würde man gefunden haben, wenn man aus dem 177 §. den Werth

$r = \frac{bn\sqrt{n}}{m\sqrt{f}}\, l\, \frac{m(a - b\cos\eta)\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}$ gebraucht

hätte. Weil nemlich $r = a - x$, alſo $x = a - r$; ſo wird $x - b\cos\eta = a - b\cos\eta$

$$-\frac{bn\sqrt{n}}{m\sqrt{f}}\, l\, \frac{m(a-b\cos\eta)\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}},$$ und daraus folgt

$$t = \frac{2m\sqrt{(a-b\cos\eta)}}{n}\left(1-\sqrt{\frac{x-b\cos\eta}{a-b\cos\eta}}\right) =$$

$$\frac{2m\sqrt{(a-b\cos\eta)}}{n} \cdot \frac{bn\sqrt{n}}{2m(a-b\cos\eta)\sqrt{f}}\, l\, \frac{m(a-b\cos\eta)\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}$$

$$= \frac{b\sqrt{n}}{\sqrt{(a-b\cos\eta)}\sqrt{f}}\, l\, \frac{m(a-b\cos\eta)\sqrt{f}}{bn\sqrt{n}}.$$ Dieſe Aufloͤſung giebt Daniel Bernoulli Hydrodyn. Sect. IV. §. 18. p. 76. und bey ihm iſt a das, was hier $a-b\cos\eta$ heiſt. Dieſe Formul laͤſt ſich aber nicht brauchen, den Fall daraus herzuleiten, wenn das Gefaͤß gar keine Roͤhre hat, weil der eine Factor $=0$, und der andre unendlich groß wird, wenn man $b=0$ ſetzt.

179 §.

Es iſt fuͤr einen gewiſſen Augenblick die Geſchwindigkeit des aus der Oefnung PQ ſtroͤmenden Waſſers gegeben: man fraͤgt, wie tief es im Gefaͤß geſunken, wie viel Waſſer ausgelaufen, und wie viel Zeit ſeit dem Anfang der Bewegung verfloſſen ſey.

Aufl. Das Waſſer laufe jetzt mit einer Geſchwindigkeit aus, die der Hoͤhe $=h$ zugehoͤrt, und man behalte die Vorausſetzung bey, daß m gegen n ſehr groß ſey, alſo in dem Ausdruck fuͤr v im 175 §. $k=k+1=-\frac{m^2}{n^2}$ geſetzt werden koͤnne. Dies giebt

$v=$

$$v = \frac{(b\cos\eta\sqrt{fn}+mb)n\sqrt{n}}{m^2\sqrt{f}} \cdot \left(\left(\frac{A}{z}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}} - 1\right)$$

$$- \frac{n^2 A}{m^2}\left(\left(\frac{A}{z}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}} - \frac{z}{A}\right).$$

Man ſetze $v = \frac{n^2}{m^2} h$, ſo erhält man $h =$

$$\frac{b\cos\eta\sqrt{fn}+mb}{\sqrt{fn}}\left(\left(\frac{A}{z}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}} - 1\right)$$

$$-A\left(\left(\frac{A}{z}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}} - \frac{z}{A}\right),$$ oder $h = z - b\cos\eta$

$$- \frac{mb}{\sqrt{fn}} + \left(b\cos\eta + \frac{mb}{\sqrt{fn}} - A\right)\left(\frac{z}{A}\right)^{\frac{m^2}{n^2}}.$$

Nun erreicht das Waſſer zweymahl die Geſchwindigkeit $\sqrt{h}$, einmahl vor der gröſten, das andre mahl nach der gröſten Geſchwindigkeit, und hier wird eigentlich s für den erſten Fall geſucht. Es war aber $z = s - b + \frac{mb}{\sqrt{fn}}$, und $A = a + \frac{mb}{\sqrt{fn}}$, alſo wird

$$h = s - b - b\cos\eta + (b\cos\eta - a)\left(\frac{z}{A}\right)^{\frac{m^2}{n^2}},$$ und

man kann β ſtatt s ſchreiben, weil s von β noch nicht merklich unterſchieden iſt, wenn $v = h$ wird. Alſo

 hat

hat man $h = a - b\cos\eta - (a - b\cos\eta)\left(\frac{z}{A}\right)^{\frac{m^2}{n^2}}$.

Daraus folgt $(a - b\cos\eta)\left(\frac{z}{A}\right)^{\frac{n^2}{m^2}} = a - b\cos\eta - h$,

und $z = A\left(\frac{a - b\cos\eta - h}{a - b\cos\eta}\right)^{\frac{n^2}{m^2}}$, welches ſich ſo ausdrücken läſt, $z = A\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\, l\, \frac{a - b\cos\eta - h}{a - b\cos\eta}\right)$.

Nun ſchreibe man die Werthe von z und A in dieſe Gleichung, ſo wird

$$s - b = a + \left(a + \frac{mb}{\sqrt{fn}}\right) \cdot \frac{n^2}{m^2}\, l\, \frac{a - b\cos\eta - h}{a - b\cos\eta}, \text{ oder}$$

$$a + b - s = \left(a + \frac{mb}{\sqrt{fn}}\right)\frac{n^2}{m^2}\, l\, \frac{a - b\cos\eta}{a - b\cos\eta - h}.$$

Weil nun $a + b - s = \beta - s = r$ (176 §.), und der Bruch $\frac{n^2}{m^2}\, a$ ſehr klein iſt, ſo kann man $r = \frac{nb\sqrt{n}}{m\sqrt{f}}\, l\, \frac{a - b\cos\eta}{a - b\cos\eta - h}$ ſetzen. Derſelbe Ausdruck folgt aus der Gleichung

$$v = \frac{n^2(a - b\cos\eta - r)}{m^2} - \frac{n^2(a - b\cos\eta)}{m^2}\, e^{-\frac{mr\sqrt{f}}{nb\sqrt{n}}}$$

(176 §.)

(176 §.), wenn man $v = \frac{n^2}{m^2} h$ ſetzt, und a ſtatt $a - r$ ſchreibt, weil r ſehr klein iſt. Es wird nemlich $h = a - b\cos\eta - (a - b\cos\eta)\, e^{-\frac{mr\sqrt{f}}{nb\sqrt{n}}}$, alſo

$$a - b\cos\eta - h = (a - b\cos\eta)\, e^{-\frac{mr\sqrt{f}}{nb\sqrt{n}}}, \text{ folglich}$$

$l \frac{a - b\cos\eta - h}{a - b\cos\eta} = -\frac{mr\sqrt{f}}{nb\sqrt{n}}$, woraus $r = \frac{nb\sqrt{n}}{m\sqrt{f}}\, l \frac{a - b\cos\eta}{a - b\cos\eta - h}$ folgt. Es iſt alſo die Menge des ausgelaufenen Waſſers $mr =$

$$\frac{nb\sqrt{n}}{\sqrt{f}}\, l \frac{a - b\cos\eta}{a - b\cos\eta - h}.$$

Um die Zeit zu finden, brauche man die Gleichung

$$s = a + b - \left(a + \frac{mb}{\sqrt{fn}}\right) \frac{n^2}{m^2}\, l \frac{a - b\cos\eta}{a - b\cos\eta - h}.$$

Man ſchreibe $b + x$ ſtatt s, und ſubtrahire auf beyden Seiten $b\cos\eta$, ſo findet man

$$\frac{x - b\cos\eta}{a - b\cos\eta} = 1 - \frac{a\sqrt{fn} + mb}{(a - b\cos\eta)\sqrt{fn}} \cdot \frac{n^2}{m^2}\, l \frac{a - b\cos\eta}{a - b\cos\eta - h}.$$

Da nun überhaupt

$$t = \frac{2m\sqrt{(a - b\cos\eta)}}{n}\left(1 - \sqrt{\frac{x - b\cos\eta}{a - b\cos\eta}}\right),$$

ſo erhält man für den gegenwärtigen Fall

$$t = \frac{(a\sqrt{fn} + mb)\sqrt{n}}{m\sqrt{(a - b\cos\eta)}\sqrt{f}}\, l \frac{a - b\cos\eta}{a - b\cos\eta - h}, \text{ oder}$$

bey-

beynahe $t = \frac{b\surd n}{\surd(a - b\cos\eta)\surd f} \, l \frac{a - b\cos\eta}{a - b\cos\eta - h}$.
Man ſ. *Dan. Bernoulli* Hydrodyn. Sect. IV. §. 20. p. 77.

180 §.

Die im letzten § angeſtellten Unterſuchungen dienen, die bisherige Theorie mit Verſuchen zu vergleichen. Hr. Dan. Bernoulli iſt der erſte geweſen, der über die Geſetze, nach welchen die Bewegung des Waſſers vom erſten Augenblick der Entſtehung an beſchleuniget wird, Verſuche angeſtellet hat, da man ſich ſonſt begnügt hatte, die Bewegung des Waſſers nur im Beharrungsſtande zu betrachten. Man findet ſeine hieher gehörigen Verſuche in der Hydrodynamica Sect. IV. p. 85 - 89. und die Einrichtung dazu war folgende. Das Waſſer ſprützte nach horizontaler Richtung durch eine mit dem Gefäß ver-
4 Fig. bundene Röhre, ungefähr wie es die 4 Figur vorſtellt. Man verbinde hiemit die Vorſtellung, daß
6 Fig. EL in der 6 Fig. der ganze Waſſerſtrahl in dem Augenblick ſey, da das Waſſer ſeine gröſte Geſchwindigkeit erreicht, alſo CL die gröſte Gußweite. Weil nun die Geſchwindigkeit des Waſſers nicht in einem Augenblick, ſondern nach und nach, obgleich in einer ſehr kleinen Zeit, bis zur gröſten anwächſt, ſo werden die erſten Waſſertropfen nicht gleich die Weite CL erreichen, ſondern es wird etwas weniges Waſſer zwiſchen C und L niederfallen. Bernoulli fieng auf folgende Art einen Theil davon auf. Er ſetzte grade unter der äußern Mündung der Röhre E eine Schüſſel, ſo daß die Verticallinie EC bey C durch die Mitte der Schüſſel gieng. War nun CH der

Halbmeſſer der Schüſſel, ſo muſte alles Waſſer in die Schüſſel fallen, was bis dahin auslief, da der Waſſerſtrahl die Weite CH erreichte. Aus der Weite CH berechnete Bernoulli, nach der Regel des 23 §., die Geſchwindigkeit des Waſſers für den Augenblick, da der Waſſerſtrahl die Gränze H erreicht hatte, und aus der Weite CL nach eben der Regel ſeine gröſte Geſchwindigkeit. Die dieſen Geſchwindigkeiten zugehörigen Höhen ließen ſich alsdenn ſtatt h und a in der Formul für die Waſſermenge des vor. §. brauchen, die in dieſem Fall wegen der horizontalen Lage der Röhre =

$$\frac{nb\sqrt{n}}{\sqrt{f}}\, l\, \frac{a}{a-h}$$ ſeyn muſte, weil alsdenn $\cos\eta = 0$ iſt.

Wenn das Waſſer durch eine in Vergleichung mit der Weite des Gefäßes ſehr kleine Oefnung ſprützte, ſo war die Beſchleunigung ſo ſchnell, daß gar kein Tropfen Waſſer in die Schüſſel fiel. Die in den erſten Augenblicken hervorſpringenden Tropfen werden von den unmittelbar folgenden ſo ſchnell mit fortgetrieben, daß nichts merkliches zwiſchen C und L niederfallen kann. Man vergleiche hiemit den 170 §. Wenn dagegen das Waſſer durch Röhren ſprützt, ſo iſt, vermöge der bisherigen Theorie, die Beſchleunigung nicht ſo gar ſehr ſchnell. Es fiel auch würklich bey den Verſuchen; die Bernoulli anſtellte, etwas waſſer in die Schüſſel. Weil indeſſen die Beſchleunigung noch immer ſo ſchnell bleibt, daß das nachfolgende Waſſer einen Theil des voran laufenden weiter forttreiben wird, als es für ſich geſprützt wäre, ſo denke ich, läſt ſich vorausſehen, daß die Schlüſſel nicht ſo viel auffangen werde, als ſie nach

der

der Formul des vor. §. auffangen ſollte. Der Erfolg beſtätigte dieſen Gedanken.

Beym erſten Verſuch war die Röhre coniſch, und erweiterte ſich nach außen, ihre Länge b hielte 125 ſolcher Theilchen, die bey dieſen Verſuchen zum Maaß erwählt waren, die innere Oefung f faſte 133 und die äußere Oefnung n 227 ſolcher Quadrat-Theilchen. Die Waſſerhöhe über der Axe der Röhre war 433 Theile, und in ſolchen Theilen war CL = 287, CH, = 206, die Höhe CE = 146. Das in die Schüſſel gefallene Waſſer ward in eine gläſerne cylindriſche Röhre ſorgfältig geſammlet, die im Durchmeſſer $8\frac{1}{2}$ Theile weit war, und das aufgefangene Waſſer ſtand darin 210 Theile hoch; demnach füllte es einen Raum von $11916\frac{1}{2}$ Cub. Theilen (Bernoulli findet 11922). Nun findet man weiter mit Bernoulli $\frac{CL^2}{4CE} = 141$, $\frac{CH^2}{4CE} = 73$ (23 §.). Jene Höhe ſtatt a, dieſe ſtatt h gebraucht, giebt $\frac{a}{a-h} = \frac{141}{68}$, und log. nat. $\frac{a}{a-h} = 0{,}3167102 \times 2{,}302585 = 0{,}729252$. Ferner wird $\sqrt{\frac{n}{f}} = 1{,}306$, $nb = 28375$, folglich die Waſſermenge $= 28375 \times 1{,}306 \times 0{,}729252 = 26964$ Cub. Theile. Der Verſuch gab nur 11916, welches noch nicht die Hälfte der berechneten Zahl iſt. Hr. Bernoulli erklärt ſich über dieſe Abweichung auf folgende Art.

Die Formul für die Waſſermenge =
$\frac{nb\sqrt{n}}{\sqrt{f}}\, l\, \frac{a}{a-h}$ gilt eigentlich in der Vorausſe-

zung, daß die Bewegung des Waſſers durch keine Hinderniſſe verzögert werde, und auch nur in dieſer Vorausſetzung wäre $a = \frac{CL^2}{4CE}$, und $h = \frac{CH^2}{4CE}$ (23 §.). Wegen der Hinderniſſe der Bewegung aber iſt $\frac{CL^2}{4CE} < a$, und $\frac{CH^2}{4CE} < h$, denn hier müſte $a = 433$ ſeyn. Wäre indeſſen $a : h = CL^2 : CH^2$, alſo $h = \frac{CH^2}{CL^2} a$; ſo hätte man $\frac{a}{a-h} = \frac{CL^2}{CL^2 - CH^2}$, und die Rechnung müſte mit den Verſuch überein kommen. Allein die Hinderniſſe wachſen mit der Geſchwindigkeit des Waſſers, und um deswillen iſt in dem Augenblick, da der Strahl die Gränze H erreicht, die Verzögerung noch nicht ſo ſtark, als ſie nachher wird. Demnach iſt $h < \frac{CH^2}{CL^2} . a$, alſo $l \frac{a}{a-h} < l \frac{CL^2}{CL^2 - CH^2}$, und die Waſſermenge muß kleiner ſeyn, als ſie nach jener Vorausſetzung gefunden wird. Man hätte bey obiger Rechnung $a = 433$ behalten, und alsdenn $h = \frac{CH^2}{CL^2} a = 223$ ſetzen können. Dies hätte eben das Reſultat gegeben. Allein wegen der angeführten Gründe muß man h kleiner nehmen, und der Verſuch kommt mit der Rechnung überein, wenn man h ungefähr =

120 ſetzt. Ob ich gleich an dieſen Schlüſſen an ſich nichts auszuſetzen habe, ſo ſcheint doch dieſe Verminderung des Werths von h faſt zu ſtark zu ſeyn, als daß man dieſen Umſtand allein für die Urſache der Abweichung des Verſuchs von obiger Rechnung halten könnte: und ich denke, daß die oben von mir angeführte Urſache, die Beſchleunigung des voranlaufenden Waſſers von dem nachfolgenden, wenigſtens einigen Antheil daran habe. Meine Gedanken werden, wo ich nicht irre, ſelbſt durch den zweyten Bernoulliſchen Verſuch beſtätiget.

Hiebey ward eine cylindriſche Röhre gebraucht 130 Theile lang, die Waſſerhöhe über die Axe der Röhre war 130 Theile, die Höhe CE = 553, die Weite CL = 453 und CH = 297. Nun iſt die Waſſermenge $= nb\, l \frac{a}{a-h}$, und man findet $\frac{CL^2}{4CE} =$ 93, $\frac{CH^2}{4CE} = 40$. Ueberdem war $n = 284$ Quadrat Theilen, alſo $nb = 36920$, $\frac{a}{a-h} = \frac{93}{53}$, und log. nat. $\frac{93}{53} = 0{,}2442070 \times 2{,}302585 = 0{,}562298$. Dies giebt die Waſſermenge $= 36920 \times 0{,}562298 = 20760$, dagegen gab der Verſuch 15950, und die Abweichung iſt lange ſo groß nicht, wie vorhin, weil dieſe Waſſermenge beynahe $\frac{4}{5}$ der berechneten iſt, da ſie gegentheils im vorigen Fall noch nicht halb ſo groß war. Wenn aber der von Hr. Bernoulli angeführte Umſtand allein die Abweichung verurſachte, ſo müſte ſie in dieſem Fall noch größer ſeyn als im vorigen Verſuch. Hier iſt CH noch nicht völlig $\frac{2}{3}$ von CL, und dort war CH beynahe

nahe $\frac{3}{4}$ von CL. Hier müſte alſo der Unterſcheid der Verzögerungen in den Augenblicken, da der Strahl die Gränzen H und L erreicht noch größer, als in dem vorigen Fall ſeyn. Bey der von mir angegebenen Urſache der Verſchiedenheit zwiſchen der berechneten und beobachteten Waſſermenge harmonirt alles beſſer. Beym erſten Verſuch war die Beſchleunigung ſtärker, als beym letzten. Dort war die Waſſerhöhe 433, hier 130; dort war die beobachtete gröſte Geſchwindigkeit 141, hier 93; dort war ſelbſt die coniſche Röhre etwas kürzer, als hier die cylindriſche. Demnach ſind dort die voranlaufenden Waſſertheilchen von den nachfolgenden ſtärker, als hier, beſchleuniget worden, und eben deswegen proportionirlich mehrere über die Schüſſel weggeſprützt, als in dieſem Fall.

Der XII. Abſchnitt.

Fortſetzung der vorigen Unterſuchung auch für die Fälle, wenn die Gefäße beſtändig voll gehalten werden.

181 §.

Es bleiben alle gegebene Stücke, wie im 159 §. Das aus dem Gefäß *ACHMKP* laufende Waſſer aber werde beſtändig durch neues erſetzt, ſo daß daſſelbe bis an *AB* beſtändig voll bleibt: man ſucht die Geſchwin- 29 Fig.

digkeit des Waſſers, nach dem ſo viel ausgelaufen iſt, als in dem Raum *ABCD* enthalten war.

Aufl. Wenn man eben ſo, wie im 159 §. eine Gleichung ſucht, welche den Druck beſtimmt, den das Waſſer in jedem Querſchnitt MN der Röhre leidet, ſo findet man wie dort die Gleichung

$$p = k + b - x + \frac{m^2 v}{n^2} + \frac{dv}{ydr} \int \frac{m^2 ds}{z} - \frac{m^2 v}{z^2}.$$

Man nehme an, daß auf die Fläche AB eine Kraft drückt, die ſo groß iſt, als das Gewicht einer Waſſerſäule auf der Grundfläche AB in der Höhe $= \Pi$. Weil nun die Röhre bis an AB beſtändig voll bleibt, ſo muß $p = \Pi$ ſeyn, wenn $x = a$, und $s = \beta$, alſo $z = h$ wird, (es wird nemlich, wie im 159 §., $AB = h$ geſetzt) und man erhält die Gleichung

$$\Pi = k + b - a + \frac{m^2 v}{n^2} + \frac{dv}{ydr} \int \frac{m^2 ds}{z} - \frac{m^2 v}{h^2}.$$

Es wird demnach in allen hieher gehörigen Fällen das Integral $\int \frac{ds}{z}$ eine beſtändige Größe, weil nach der Integration $s = \beta$ und $z = h$ geſetzt werden muß. Dieſer Umſtand erleichtert die fernere Rechnung ganz ungemein, wie ſich aus dem folgenden weiter ergeben wird.

182 §.

Wenn auf AB ſonſt nichts als die Atmoſphäre drückt, und AB nicht ſehr viel höher als PQ liegt, ſo kann man $\Pi = k$ ſetzen, wie im 160 §. Wird alsdenn die Geſchwindigkeit des durch PQ laufenden

Waſ-

Waſſers $=\sqrt{q}$ geſetzt, ſo hat man $v = \frac{n^2}{m^2} q$. Iſt überdem die Länge des ausgelaufenen Waſſer-Cylinders $= w$, alſo $ydr = ndw$, und man ſetzt dieſe Werthe in die gefundene Gleichung; ſo erhält man

$$o = b - a + q + \frac{ndq}{dw} \int \frac{ds}{z} - \frac{n^2 q}{h^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{h^2 - n^2}{h^2} q + \frac{ndq}{dw} \int \frac{ds}{z} = a - b.$$

Dieſe Gleichung iſt mit derjenigen einerley, welche Joh. Bernoulli nach ſeiner Methode herausbringt. (Hydraul. P. I. §. 20. Cor. I. verglichen mit dem Cor. VI.) Bey ihm iſt ω, z, M, x, dasjenige, was hier n, q, $\int \frac{ds}{z}$, w, heiſt. Dafern das Gefäß cylindriſch, und ſeitwärts nahe am Boden mit einer coniſchen Röhre, wie im 175 §. verbunden iſt; ſo iſt wie dort $\int \frac{ds}{z} = \frac{s - b}{h} + \frac{b}{\sqrt{fn}}$, wenn b die Länge der coniſchen Röhre bedeutet, und man muß nach der Integration $s = \beta$ ſetzen, ſo daß man $\int \frac{ds}{z} = \frac{\beta - b}{h} + \frac{b}{\sqrt{fn}}$ erhält, wo auch $\beta - b$ $= a$ iſt. Setzt man dieſen Werth in die Differential-Gleichung und ſchreibt $a - b \cos\eta$ ſtatt $a - b$, ſo hat man

$$\frac{h^2 - n^2}{h^2} q + \frac{ndq}{dw} \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{\sqrt{fn}} \right) = a - b \cos\eta.$$

Dafern alſo die Röhre cylindriſch und horizontal,

 alſo

alſo $f = n$, und $\cos\eta = 0$ iſt, ſo wird

$$\frac{h^2 - n^2}{h^2}\, q + \frac{nadq}{hdw} + \frac{bdq}{dw} = a.$$

M. ſ. Jo. Bernoulli Hydraul. P. I. §. XI. Op. T. IV. p. 404. wo m, x, z, das iſt, was hier n, w, q, heiſt.

Setzt man $\int \frac{n^2 ds}{z} = N$, ſo hat man

$$q - \frac{n^2}{h^2}\, q + \frac{Ndq}{ndw} = a - b, \text{ alſo}$$

$$Ndq = n(a-b)\,dw + \frac{n^3}{h^2}\, qdw - nqdw, \text{ folglich}$$

wird $dw = \dfrac{Ndq}{n(a-b) + \left(\dfrac{n^3}{h^2} - n\right) q}$.

Dies iſt die Gleichung, welche Daniel Bernoulli aus dem Grundſatz von Erhaltung der lebendigen Kräfte ſchlieſt, Hydrodyn. Sect. V. §. 3. pag. 93. Bey ihm aber bezeichnen die Buchſtaben m, v, x, das, was hier die Buchſtaben h, q, w, bedeuten, und a iſt bey ihm die Höhe der obern Oefnung über die untere, welches hier $a - b$ iſt.

183 §.

Wenn dieſelben gegebenen Stücke, wie im 181 §. bleiben, eine Gleichung zwiſchen der Länge des ausgelaufenen Waſſer-Cylinders, und der Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers zu finden.

Aufl. Dafern man von nun an mit Daniel Bernoulli m, v, x, ſtatt h, q, w, in die Gleichung des vor. §. ſetzt, ſo hat man

$$dx = \frac{N d\upsilon}{n(a-b) + \left(\frac{n^3}{m^2} - n\right)\upsilon}.$$

Um das Integral zu finden, ſetze man $n(a-b) + \left(\frac{n^3}{m^2} - n\right)\upsilon = Z$, ſo iſt $\left(\frac{n^3}{m^2} - n\right)d\upsilon = dZ$, alſo $N d\upsilon = \frac{m^2}{n^3 - m^2 n} N dZ$, und $dx = \frac{m^2 N}{n^3 - m^2 n} \cdot \frac{dZ}{Z}$. Dies giebt

$$x = C + \frac{m^2 N}{n^3 - m^2 n}\, l\left(n(a-b) + \left(\frac{n^3}{m^2} - n\right)\upsilon\right).$$

Wenn aber $x = 0$ iſt, ſo muß $\upsilon = 0$ ſeyn. Dies giebt $C = -\frac{m^2 N}{n^3 - m^2 n}\, l n(a-b)$, folglich iſt

$$x = \frac{m^2 N}{n^3 - m^2 n}\, l\, \frac{m^2(a-b) + (n^2 - m^2)\upsilon}{m^2(a-b)}.$$

Daraus folgt $\frac{(n^3 - m^2 n)x}{m^2 N} = l\, \frac{m^2(a-b) + (n^2 - m^2)\upsilon}{m^2(a-b)}$

und $e^{\frac{n^3 - m^2 n}{m^2 N}x} = \frac{m^2(a-b) + (n^2 - m^2)\upsilon}{m^2(a-b)}$

alſo ferner $\upsilon = \frac{m^2(a-b)}{m^2 - n^2}\left(1 - e^{\frac{n^3 - m^2 n}{m^2 N}x}\right)$,

wo e die baſis der natürlichen Logarithmen iſt.

Weil $m > n$ angenommen wird, ſo iſt der Exponent von e allemahl negativ, und es wird

$e^{\frac{n^3 - m^2 n}{m^2 N} x}$ bald ein ſehr kleiner Bruch, ſo daß ſich v dem Werth $\frac{m^2 (a - b)}{m^2 - n^2}$ beſtändig mehr nähert, je größer x wird. Ob nun gleich eigentlich nie $v = \frac{m^2 (a - b)}{m^2 - n^2}$ wird, ſo kann man doch dieſe Gleichung für richtig annehmen, ſo bald eine etwas beträchtliche Menge Waſſer ausgelaufen iſt, wodurch alſo die im 10 u. f. §. gegebene Auflöſung der dortigen Aufgabe beſtätiget wird.

Dafern man über die Auflöſung der gegenwärtigen Aufgabe eine etwas genauere Betrachtung anſtellet, ſo ergiebt ſich leicht, daß dabey etwas ſey vorausgeſetzt worden, das in der Ausübung nicht allemahl ſtatt hat. Es läuft nemlich das Waſſer durch die untere Oefnung immer ſchneller, ſo daß v nach und nach größer wird. Da nun $\frac{n^2}{m^2} v$ die Geſchwindigkeit des durch den Querſchnitt AB laufenden Waſſers iſt, ſo wird auch dieſe nach und nach wachſen. Soll demnach den Bedingungen ein Genüge geſchehen, die bey der bisherigen Rechnung vorausgeſetzt ſind, ſo muß das neu hinzukommende Waſſer, wodurch der Abgang des ausflieſſenden erſetzt wird, mit der Geſchwindigkeit $\frac{n}{m} \sqrt{v}$ nach der Richtung der Röhre zufließen, damit es in dem Querſchnitt AB beſtändig die vorausgeſetzte Geſchwindigkeit habe. Wenn alſo das Waſſer ſeitwärts in AB zufließet, ſo daß es noch gar keine Geſchwindigkeit nach der Rich-

tung der Röhre in dem Augenblick hat, da es den Querſchnitt AB einnimmt, ſo findet die eben vorgetragene Auflöſung weiter keine Anwendung. Man kann ſie aber leicht ſo verändern, wie es die jetzige Bedingung erfordert. Es muß nemlich allemahl $\frac{n^2}{m^2} \upsilon = 0$ ſeyn. Alſo erhält man im 182 §. die Gleichung $\upsilon + \frac{N d\upsilon}{n dx} = a - b$, wenn nemlich υ und x ſtatt q und w geſchrieben werden. Es folgt hieraus $N d\upsilon = n(a - b - \upsilon) dx$, und $dx = \frac{N d\upsilon}{n(a-b-\upsilon)}$. Weil nun $\int \frac{d\upsilon}{a-b-\upsilon} = -l(a-b-\upsilon)$ iſt, ſo wird $x = C - \frac{N}{n} l(a-b-\upsilon)$. Und weil $x = 0$ ſeyn muß, wenn $\upsilon = 0$ iſt, ſo hat man $x = \frac{N}{n} l \frac{a-b}{a-b-\upsilon}$, und dies giebt $\frac{nx}{N} = l \frac{a-b}{a-b-\upsilon}$, alſo $e^{\frac{nx}{N}} = \frac{a-b}{a-b-\upsilon}$, und $1 - \frac{\upsilon}{a-b} = e^{-\frac{nx}{N}}$, folglich $\upsilon = (a-b)\left(1 - e^{-\frac{nx}{N}}\right)$.

Je größer m in Vergleichung mit n iſt, deſto kleiner muß auch in dem zuerſt betrachteten Fall die Geſchwindigkeit $\frac{n}{m} \sqrt{\upsilon}$ des in AB zufließenden Waſſers ſeyn: und dieſe Geſchwindigkeit wäre $= 0$, wenn m unendlich groß wäre. Bey dieſer Vorausſetzung würde der erſte Fall mit dem zweyten einerley ſeyn,

wie denn auch würklich die für den erſten Fall gefundene Gleichung

$$v = \frac{m^2(a-b)}{m^2-n^2}\left(1 - e^{\frac{n^3-m^2n}{m^2N}x}\right)$$

in folgende

$$v = (a-b)\left(1 - e^{-\frac{n}{N}x}\right)$$

verwandelt wird, wenn man $m = \infty$ ſetzt, welche mit der für den zweyten Fall gefundenen einerley iſt. Man ſ. *Dan. Bernoulli* Hydrodyn. Sect. V. §. 3. Caſ. II. p. 93. 94.

184 §.

Die Anwendung dieſer allgemeinen Auflöſung auf beſondere Fälle läſt ſich nun leicht machen, und die Sache hat keine andere Schwierigkeit, als daß man jedesmahl das Integral $N = \int \frac{n^2 ds}{z}$ gehörig aus der gegebenen Geſtalt des Gefäßes berechnen muß. Dafern die Röhre durchgängig gleich weit iſt, alſo $z = m$, ſo hat man $\int \frac{ds}{z} = \frac{s}{m}$ und $N = \frac{nn\beta}{m}$, weil nach der Integration $s = \beta$ geſetzt werden muß. Dies giebt für beyde betrachtete Fälle die Gleichungen $v = \frac{m^2(a-b)}{m^2-n^2}\left(1 - e^{\frac{(n^2-m^2)x}{mn\beta}}\right)$, und

$$v = (a-b)\left(1 - e^{-\frac{m}{n\beta}x}\right).$$

Hat man aber ein vertical ſtehendes cylindriſches oder priſmatiſches Gefäß, woran ſeitwärts die coniſche Röhre, wie im 175 §. angebracht iſt; ſo ſetze man $s = \beta$ in dem Integral $\int \frac{ds}{z} = \frac{s-b}{m} + \frac{b}{\sqrt{fn}}$, wo b die Länge der coniſchen Röhre bedeutet, und man erhält $N = \frac{n^2(\beta - b)}{m} + \frac{n^2 b}{\sqrt{fn}}$.

Demnach wird für dieſen Fall

$$v = \frac{m^2(a - b\cos\eta)}{m^2 - n^2}\left(1 - e^{\frac{(n^2 - m^2)x\sqrt{fn}}{mn(\beta - b)\sqrt{fn} + mn^2 b}}\right),$$

oder falls das Waſſer ſeitwärts zufließet, $v =$

$$(a - b\cos\eta)\left(1 - e^{\frac{mx\sqrt{fn}}{n(\beta - b)\sqrt{fn} + mnb}}\right).$$

Es iſt nemlich in dieſem beſondern Fall $b\cos\eta$ das, was in der allgemeinen Gleichung b iſt, wie im 175 §.

185 §.

Es bleiben alle gegebene Stücke, wie im 181 §., man ſucht die Zeit, binnen der das auslaufende Waſſer eine gegebene Geſchwindigkeit erlangt.

Aufl. In die Gleichung

$$dx = \frac{N dv}{n(a-b) + \left(\frac{n^3}{m^2} - n\right)v} \quad (183\ \S.)$$

ſetze man $dx = dt\surd v$ (106. §. Mech.) und überdem $\surd v = c$, ſo wird

$$dt = \frac{2N}{n} \cdot \frac{dc}{a - b - \frac{m^2 - n^2}{m^2} cc},$$

oder auch

$$dt = \frac{2N}{n(a-b)} \cdot \frac{dc}{1 - \frac{m^2 - n^2}{m^2(a-b)} cc}.$$

Man ſetze $c \surd \frac{m^2 - n^2}{m^2(a-b)} = Z$, ſo iſt $dc = \frac{mdZ\surd(a-b)}{\surd(m^2-n^2)}$, und $dt = \frac{2Nm}{n\surd(a-b)(m^2-n^2)} \cdot \frac{dZ}{1 - ZZ}$. Dies nach dem 319 §. Mech. integrirt giebt $t = C + \frac{Nm}{n\surd(a-b)(m^2-n^2)} l \frac{1+Z}{1-Z}$. Für $c = 0$ iſt $t = 0$, alſo zugleich $Z = 0$, dies giebt $C = 0$, und wenn man den angenommenen Werth von Z wieder herſtellt, ſo wird $t =$

$$\frac{Nm}{n\surd(a-b)(m^2-n^2)} l \frac{m\surd(a-b) + c\surd(m^2-n^2)}{m\surd(a-b) - c\surd(m^2-n^2)}.$$

Wird $\surd v$ ſtatt c geſetzt, ſo hat man $t =$

$$\frac{Nm}{n\surd(a-b)(m^2-n^2)} l \frac{m\surd(a-b) + \surd(m^2 v - n^2 v)}{m\surd(a-b) - \surd(m^2 v - n^2 v)}.$$

Dafern das Waſſer in die obere Oefnung AB ſeitwärts zufließt, ſo muß man die zweyte Gleichung des

des 183 §. $dx = \frac{N dv}{n(a-b-v)}$ gebrauchen, und $dt \sqrt{v}$ ſtatt dx, ſo wie c ſtatt $\sqrt{v}$ ſchreiben. Dies giebt $dt = \frac{2N}{n} \cdot \frac{dc}{a-b-cc} = \frac{2N}{n\sqrt{(a-b)}} \cdot \frac{dc : \sqrt{(a-b)}}{1 - \frac{cc}{a-b}}$; und wenn man eben ſo wie vorhin integrirt, ſo wird $t = \frac{N}{n\sqrt{(a-b)}} l \frac{\sqrt{(a-b)}+c}{\sqrt{(a-b)}-c}$, oder auch $t = \frac{N}{n\sqrt{(a-b)}} l \frac{\sqrt{(a-b)}+\sqrt{v}}{\sqrt{(a-b)}-\sqrt{v}}$.

186 §.

Wenn die Röhre cylindriſch, oder priſmatiſch, alſo $N = \frac{nn\beta}{m}$ iſt; ſo wird $\frac{N}{n\sqrt{(a-b)}} = \frac{n\beta}{m\sqrt{(a-b)}}$. Und wenn nach dem 117 §. Mechan. $2t\sqrt{g}$ ſtatt t geſchrieben wird; ſo giebt dies für beyde betrachtete Fälle die Gleichungen

$$\text{I)}\quad t = \frac{n\beta}{2\sqrt{g}\sqrt{(a-b)}\sqrt{(m^2-n^2)}} \times l \frac{m\sqrt{(a-b)}+\sqrt{(m^2 v - n^2 v)}}{m\sqrt{(a-b)}-\sqrt{(m^2 v - n^2 v)}}.$$

$$\text{II)}\quad t = \frac{n\beta}{2m\sqrt{g}\sqrt{(a-b)}}\, l\, \frac{\sqrt{(a-b)}+\sqrt{v}}{\sqrt{(a-b)}-\sqrt{v}},$$

da dann $g = 15{,}625$ Rheinl. Fuß iſt; oder ungefähr 16 Engl. Fuß.

Hat man ein grades und vertical ſtehendes cylindriſches Gefäß, in deſſen Boden die Oeſnung n befindlich iſt, und worin das Waſſer beſtändig auf die Höhe $= a$ erhalten wird; ſo iſt $b = 0$, $\beta = a$, und man erhält die Gleichungen

$$\text{I)}\quad t = \frac{n\sqrt{a}}{2\sqrt{g}\sqrt{(m^2-n^2)}}\, l\, \frac{m\sqrt{a}+\sqrt{(m^2v-n^2v)}}{m\sqrt{a}-\sqrt{(m^2v-n^2v)}},$$

$$\text{II)}\quad t = \frac{n\sqrt{a}}{2m\sqrt{g}}\, l\, \frac{\sqrt{a}+\sqrt{v}}{\sqrt{a}-\sqrt{v}}.$$

Es ſey z. E. das Gefäß 16 Engl. Fuß hoch, und $\frac{n}{m} = \frac{1}{25}$, man ſucht, wie viele Zeit vergehe, bevor $v = \frac{99}{100}\, a$ wird. Die Gleichung n. II. giebt $t = \frac{1}{50}\, l\, \frac{1+\sqrt{0{,}99}}{1-\sqrt{0{,}99}} = \frac{1}{50}\, l\, 199$. Die Gleichung n. I. aber giebt $t = \frac{1}{2\sqrt{(25^2-1)}}\, \times$

$$l\, \frac{1+\sqrt{\frac{25^2-1}{25^2}}\sqrt{\frac{99}{100}}}{1-\sqrt{\frac{25^2-1}{25^2}}\sqrt{\frac{99}{100}}},$$

und dieſer letzte Ausdruck iſt ebenfals beynahe $= \frac{1}{50}\, l\, 199$, daß alſo in beyden Fällen die Zeit ſehr wenig unterſchieden iſt. Es wird aber

Brigg.

Brigg. l 199 =	2.2988531	
Dies mult. mit	2.302585	(163 §. A. R.)
	4.5976062	
	6896559	
	45976	
	11490	
	1832	
	110	
giebt	5,2931	

und dies weiter durch 50 dividirt, giebt $t = 0,10586$ Secunden. Da dies noch nicht $\frac{1}{9}$ Secund. ausmacht, ſo ſiehet man, wie ſchnell auch in dieſem Fall die Geſchwindigkeit des Waſſers gleich anfangs wachſe.

In langen Waſſer-Leitungen iſt die Beſchleunigung nicht ſo ſchnell. Man nehme z. E. an, es ſey die Höhe der obern Oefnung über die untere, nemlich $a - b = 16$ Engl. Fuß, wie vorhin, aber $\beta = 184$ Toiſen oder 1104 Par. Fuß, und die ganze Röhre ſey cylindriſch; ſo findet man $\frac{\beta}{\sqrt{(a-b)}} = 276$, und $\frac{\beta\beta}{a-b} = 76176$. Da nun $g = 15$ Par. Fuß, ſo hat man $\frac{\beta}{\sqrt{(a-b)}\sqrt{g}} = 71,2$ Fuß. Setzt man überdem, wie vorhin, $v = \frac{99}{100} a$, ſo findet man $t = 7\frac{1}{2}$ Secunden. M. ſ. Dan. Bernoulli Hydrod. Sect. V. §. 13. p. 101. und vergleiche hiemit den 25 §. am Ende.

Will man die allgemeine Auflöſung des 185 §. auf den Fall anwenden, wenn an einem cylindriſchen

oder

oder priſmatiſchen vertical ſtehenden Gefäß ſeitwärts eine coniſche Röhre, deren Länge $= b$ iſt, unter dem Winkel η mit der Verticallinie angebracht worden; ſo muß in den Formuln des 185 §. $b \cos\eta$ ſtatt b geſchrieben, und $N = \frac{n^2(\beta - b)\sqrt{fn} + mn^2 b}{m\sqrt{fn}}$ geſetzt werden. Auf ſolche Art ergiebt ſich

$$t = \frac{n(\beta - b)\sqrt{fn} + mb\sqrt{n}}{\sqrt{(a - b\cos\eta)}\sqrt{(m^2 - n^2)}\sqrt{f}} \times$$

$$l\,\frac{m\sqrt{(a - b\cos\eta)} + \sqrt{(m^2 v - n^2 v)}}{m\sqrt{(a - b\cos\eta)} - \sqrt{(m^2 v - n^2 v)}},$$ und

im Fall das Waſſer ſeitwärts zuflieſt,

$$t = \frac{n(\beta - b)\sqrt{f} + mb\sqrt{n}}{m\sqrt{(a - b\cos\eta)}\sqrt{f}}\, l\, \frac{\sqrt{(a - b\cos\eta)} + \sqrt{v}}{\sqrt{(a - b\cos\eta)} - \sqrt{v}}.$$

187 §.

Aus einem gegebenen Gefäß, das beſtändig voll bleibt, iſt ein Waſſer-Cylinder von gegebener Länge ausgelaufen, man ſucht die Zeit, welche während der Bewegung verfloſſen iſt.

Aufl. Es iſt allemahl $\sqrt{v} = \frac{dx}{dt}$, alſo $v = \frac{dx^2}{dt^2}$. Nun war im 183 §. $v =$

$$\frac{m^2(a - b)}{m^2 - n^2}\left(1 - e^{\frac{n^3 - m^2 n}{m^2 N}x}\right),$$ alſo wird

$$\frac{dx\sqrt{(m^2 - n^2)}}{mdt\sqrt{(a - b)}} = \sqrt{\left(1 - e^{\frac{n^3 - m^2 n}{m^2 N}x}\right)},$$ und

daraus

daraus folgt $dt = \frac{dx\sqrt{(m^2-n^2)}}{m\sqrt{(a-b)}\sqrt{\left(1-e^{\frac{n^3-m^2n}{m^2N}x}\right)}}$.

Um hievon das Integral zu finden, ſetze man

$e^{\frac{n^3-m^2n}{m^2N}x} = z$, alſo $\frac{n^3-m^2n}{m^2N} zdx = dz$

(316 §. Mechan.) und

$dt = \frac{\sqrt{(m^2-n^2)}}{m\sqrt{(a-b)}} \cdot \frac{m^2N}{n^3-m^2n} \cdot \frac{dz}{z\sqrt{(1-z)}}$;

Der beſtändige Factor dieſes Ausdrucks ſey $= k$, ſo wird $k = -\frac{mN}{n\sqrt{(a-b)}\sqrt{(m^2-n^2)}}$. Setzt man überdem $\sqrt{(1-z)} = q$, alſo $1-z = qq$ und $z = 1-qq$, folglich $dz = -2qdq$, ſo wird $dt = -\frac{2kdq}{1-qq}$. Hievon iſt das Integral $t = C - k\, l\, \frac{1+q}{1-q}$ (319 §. Mech.), oder $t = C + k\, l\, \frac{1-q}{1+q}$. Für $x = 0$ wird $z = 1$, und $q = 0$; da nun zugleich $t = 0$ ſeyn muß, ſo wird $C = 0$, und $t = k\, l\, \frac{1-q}{1+q}$. Stellt man nun die angenommenen Werthe wieder her, ſo erhält man

$t = k\, l\, \frac{1-\sqrt{(1-z)}}{1+\sqrt{(1-z)}} = -k\, l\, \frac{1+\sqrt{(1-z)}}{1-\sqrt{(1-z)}}$, d. i.

$t =$

$$t = \frac{mN}{n\sqrt{(m^2-n^2)}\sqrt{(a-b)}}\, l\, \frac{1+\sqrt{(1-z)}}{1-\sqrt{(1-z)}},$$

da dann $z = e^{\frac{n^3 - m^2 n}{m^2 N} x}$ geſetzt werden muß.

Flieſt das Waſſer in die obere Oefnung ſeitwärts zu, ſo hat man die Auflöſung eben dieſer Aufgabe dieſer Vorausſetzung gemäß, wenn man $m = \infty$ ſetzt (183 §.). Dies giebt $z = e^{-\frac{n}{N}x}$, alſo

$$t = \frac{N}{n\sqrt{(a-b)}}\, l\, \frac{1+\sqrt{\left(1-e^{-\frac{nx}{N}}\right)}}{1-\sqrt{\left(1-e^{-\frac{nx}{N}}\right)}}.$$

188 §.

Die Menge Waſſer zu finden, welche aus einem gegebenen Gefäß, das beſtändig voll gehalten wird, in gegebener Zeit ausläuft.

Aufl. Es iſt dieſe Menge Waſſer $= nx$, wenn x die Länge des in der Zeit t ausgelaufenen Waſſer-Körpers bedeutet, und man kann vermittelſt der im vor. §. gefundenen Gleichung x durch t ausdrücken. Aus der Gleichung $t = -k\, l\, \frac{1+\sqrt{(1-z)}}{1-\sqrt{(1-z)}}$ folgt $e^{-\frac{t}{k}} = \frac{1+\sqrt{(1-z)}}{1-\sqrt{(1-z)}}$, alſo ferner $e^{-\frac{t}{k}} - e^{-\frac{t}{k}}\sqrt{(1-z)} = 1+\sqrt{(1-z)}$, und

$$e^{-\frac{t}{k}} - 1 = \left(1 + e^{-\frac{t}{k}}\right)\sqrt{(1-z)},$$ alſo

$$1 - z = \frac{\left(e^{-\frac{t}{k}} - 1\right)^2}{\left(1+e^{-\frac{t}{k}}\right)^2}.$$ Daraus folgt

$$z = \frac{\left(1+e^{-\frac{t}{k}}\right)^2 - \left(e^{-\frac{t}{k}} - 1\right)^2}{\left(1+e^{-\frac{t}{k}}\right)^2} =$$

$$\frac{4e^{-\frac{t}{k}}}{\left(1+e^{-\frac{t}{k}}\right)^2}.$$ Nun ſubſtituire man $z =$

$$e^{-\frac{n^3 - m^2 n}{m^2 N} x},$$ ſo wird $$-\frac{(n^3 - m^2 n)x}{m^2 N} =$$

$$l \frac{4e^{-\frac{t}{k}}}{\left(1+e^{-\frac{t}{k}}\right)^2},$$ alſo $$\frac{n^3 - m^2 n}{2m^2 N} x =$$

$$l\frac{2e^{-\frac{t}{2k}}}{1+e^{-\frac{t}{k}}}=l2-\frac{t}{2k}-l\left(1+e^{-\frac{t}{k}}\right),$$

folglich

$$x=\frac{2m^2N}{n(m^2-n^2)}\left(\frac{t}{2k}+l\left(1+e^{-\frac{t}{k}}\right)-l2\right).$$

In dem Fall, da das Waſſer ſeitwärts zufließt, ſetze man $m=\infty$, ſo wird in dieſem Fall $k=-\frac{N}{n\sqrt{(a-b)}}$, und $x=$

$$\frac{2N}{n}\left(l\left(1+e^{\frac{nt\sqrt{(a-b)}}{N}}\right)-\frac{nt\sqrt{(a-b)}}{2N}-l2\right).$$

Nun ſey die Menge des in der Zeit t ausgelaufenen Waſſers $=Q$, ſo hat man

$$Q=\frac{2m^2N}{m^2-n^2}\left(\frac{t}{2k}+l\left(1+e^{-\frac{t}{k}}\right)-l2\right).$$

Da nun k negativ iſt, ſo wird beynahe $1+e^{-\frac{t}{k}}=e^{-\frac{t}{k}}$, ſobald t eine etwas beträchtliche Größe hat, und man kann $Q=\frac{2m^2N}{m^2-n^2}.\left(-\frac{t}{k}-l2\right)$ ſchätzen, oder $Q=\frac{mnt\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(m^2-n^2)}}-\frac{2m^2N}{m^2-n^2}l2.$

Wenn das Waſſer gleich von Anfang mit der größten Geſchwindigkeit $\sqrt{v}=\frac{m\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$ beſtän-

dig

dig gleichförmig ausliefe, ſo hätte man $x = \frac{mt\sqrt{(a-b}}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$ (6 §. Mach.) und $Q = \frac{mnt\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$. Daher läuft in der Zeit t würklich ſo viel Waſſer weniger aus, als der Ausdruck $\frac{2m^2N}{m^2-n^2}l2$ angiebt.

Man nehme für t eine gewiſſe beſtändige Zeit, z. E. von einer Minute, oder 60 Secunden an, und ſetze die zugehörige Waſſer-Verſchwendung $= Q$; ſo hat man $\frac{mnt\sqrt{(b-b)}}{\sqrt{(m^2-n^2)}} = Q + \frac{2m^2N}{m^2-n^2}l2$.
Für die Zeit $2t$ ſey die zugehörige Waſſer-Verſchwendung $= Q'$, ſo iſt

$$Q' = \frac{2mnt\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(m^2-n^2)}} - \frac{2m^2N}{m^2-n^2}l2,$$

oder $Q' = 2Q + \frac{2m^2N}{m^2-n^2}l2$.

In dem Fall, wenn $m = \infty$ iſt, hat man

$$Q = nt\sqrt{(a-b)} - 2Nl2$$

$$\text{und } Q' = 2Q + 2Nl2,$$

da dann $nt\sqrt{(a-b)}$ die Menge Waſſer iſt, die in der Zeit t auslaufen würde, wenn es gleich von Anfang die gröſte Geſchwindigkeit $= \sqrt{(a-b)}$ gehabt hätte.

189. §.

Man wird dieſe letztere allgemeine Aufgabe, ſo wie die übrigen drey, wovon die Auflöſungen im 183. 185. 187 §. vorgetragen ſind, nunmehro leicht auf die beſondern hieher gehörigen Fälle anwenden. Es kommt nemlich blos darauf an, daß man aus der jedesmaligen Geſtalt des Gefäßes, oder der Röh-

re, das Integral N gehörig berechne, und hierauf ſtatt N den jedesmaligen beſondern Werth in die gefundenen Gleichungen ſetze, wie davon im 184. und 186 §. bereits einige Proben gegeben ſind. Für ſolche Gefäße, die nach und nach auslaufen, ließen ſich im vorigen Abſchnitt ſo allgemeine Integrationen nicht anſtellen, weil nicht allein das Integral N, ſondern auch die Höhe des Waſſers im Gefäß veränderlich war, welche letztere hier ebenfalls beſtändig einerley bleibt. Es mag indeſſen der eine, oder der andere Fall ſtatt haben, das Gefäß mag nach und nach auslaufen, oder beſtändig auf einerley Höhe angefüllt bleiben, ſo beruhet der ganze bisherige Vortrag auf die im 159 §. gefundene Haupt-Gleichung

$$p = k + b - x + \frac{m^2 v}{n^2} + \frac{dv}{ydr} \int \frac{m^2 ds}{z} - \frac{m^2 v}{z^2},$$

und dieſe findet nur ſo lange ihre Anwendung, als die Vorausſetzung des 7 §. beſtehen kann. Vermöge dieſer Vorausſetzung ſollen alle in einerley auf der centriſchen Linie ſenkrechtem Querſchnitt befindliche Waſſertheilchen mit gleichen Geſchwindigkeiten nach Richtungen fortlaufen, die mit der Lage der centriſchen Linie überein kommen. Wegen der Friction aber werden die zunächſt an den Seiten des Gefäßes oder der Röhre fortlaufenden Theilchen in ihrer Bewegung ſchon etwas aufgehalten, und aus dieſer Urſache werden ſchon die Reſultate, welche die Theorie giebt, mit dem würklichen Erfolg nicht völlig überein kommen. Hiemit muß überdem der im 180 §. bemerkte Umſtand verbunden werden. Man muß nemlich in den bisherigen Formuln durch n den klein-

ſten

ſten Querſchnitt des durch die untere Oefnung auslaufenden Waſſers verſtehen, alſo nach der Newtonſchen Hypotheſe $\frac{n}{\sqrt{2}}$ ſtatt n ſetzen, wenn n die Fläche der untern Oefnung bedeutet.

Der XIII. Abſchnitt.

Vergleichung der bisherigen Theorie mit des Herrn Joh. Bernoulli Hydraulik.

190 §.

Dafern die Röhre ACHMP eine beträchtliche Weite hat, und das Waſſer blos wegen ſeiner Schwere aus der Oefnung PQ ausläuft, ſo wird die Oberfläche AB, während der Bewegung des Waſſers horizontal bleiben, der Waſſer-Verluſt mag erſetzt werden oder nicht. In eben dieſem Fall werden alle in einem und eben demſelben horizontalen Querſchnitt befindliche Waſſertheilchen mit gleicher Geſchwindigkeit ſinken. Wenn demnach die centriſche Linie nicht vertical iſt, ſo finden die obigen Formuln weiter keine Anwendung. Man kann inzwiſchen ohne Schwierigkeit für alle hieher gehörige Fälle eine ähnliche Hauptgleichung finden, wenn man nur die Schlüſſe des 159 §. ſo verändert, wie es der gegenwärtigen Vorausſetzung gemäß iſt. Bey der bisherigen Vorausſetzung hatten alle Querſchnitte MN 36 Fig.

gegen die centriſche Linie einerley Lage, und änderten alſo ihre Lage gegen die Horizontallinie und Verticallinie zugleich mit der centriſchen Linie. Bey der jetzigen neuen Vorausſetzung werden dieſe Querſchnitte alle horizontal angenommen. Sie behalten alſo gegen die Horizontallinie und Verticallinie alle einerley Lage: ſie ändern aber dagegen ihre Lage in Anſehung der centriſchen Linie. Wegen dieſer Urſache muß der Winkel, unter welchem die centriſche Linie gegen die horizontalen Schnitte MN geneigt iſt, mit in Rechnung gebracht werden, und die Geſchwindigkeit des Waſſers in jedem horizontalen Schnitt hängt zugleich von dieſem Winkel ab, wie die folgende Aufgabe ergeben wird.

191 §.

36 Fig. In der Röhre *ACMP* ſtehet die obere horizontale Fläche des Waſſers anfangs in *AB*, und das Waſſer läuft durch die untere Oefnung *PQ*. In der Zeit *t* iſt *AB* in *CD* gerückt, und während der Bewegung beſtändig horizontal geblieben: man ſucht für den gegenwärtigen Augenblick die Geſchwindigkeit, womit das Waſſer durch einen gegebenen horizontalen Schnitt *HI* der Röhre läuft, nebſt dem Druck des Waſſers gegen die Röhre.

Aufl. Es ſey $g\gamma\gamma'$SKG die Linie, worin die Schwerpuncte aller horizontalen Schnitte des Waſſers liegen, oder die ſogenannte centriſche Linie, und man ſetze nun die horizontalen Schnitte AB $= h$, CD $= y$, HI $= m$, MN $= z$, PQ $= n$. Ueberdem ſey EF eine durch den unterſten Punct K der centriſchen Linie gezogene Horizontallinie, ſo daß gF, γW, $\gamma' r$,

$\gamma' r$, SR, GE vertical ſind. Wenn nun MN ein unbeſtimmter Querſchnitt des Waſſers iſt; ſo ſey SR $= x$, gF $= a$, GE $= b$, das Stück der centriſchen Linie GKS $= s$, das Stück $g\gamma = r$. Durch S ziehe man eine Tangente ST der centriſchen Linie, und ſetze den Winkel NST $= \varphi$. Wenn alſo $\gamma' t$ die centriſche Linie in γ' berührt, ſo ſey I$\gamma' t = \eta$. Endlich ſtelle man ſich auch durch G und g ein paar Tangenten der centriſchen Linie vor, nemlich GO und gL, und ſetze die Winkel QGO $= \alpha$, BgL $= \beta$. Nun laufe das Waſſer durch den Querſchnitt HI nach der Richtung der Tangente $\gamma' t$ mit der Geſchwindigkeit $\sqrt{v}$, ſo iſt die Geſchwindigkeit nach der verticalen Richtung $\gamma' r = \sin\eta \sqrt{v}$, und die zugehörige Höhe $= v \sin\eta^2$. Demnach iſt die Geſchwindigkeit des durch den Querſchnitt MN laufenden Waſſers $=$

$\frac{m \sin\eta}{z} \sqrt{v}$ nach der verticalen Richtung SR,

und nach der Richtung ST iſt ſie $= \frac{m \sin\eta}{z \sin\varphi} \sqrt{v}$

die zugehörige Höhe $= \frac{m^2 \sin\eta^2}{z^2 \sin\varphi^2} v$. Man ſchreibe Z ſtatt $z \sin\varphi$, und ſetze die Beſchleunigung des Elements MNnm nach der Richtung ST $=$ V; ſo iſt das Differential der Höhe, welche der Geſchwindigkeit des Elements MNnm zugehört, nemlich

$d . \frac{m^2 \sin\eta^2}{Z^2} v = -V ds$ (117 §. Mech.). Daher

erhält man die Gleichung

$$\frac{m^2 dv \sin\eta^2}{Z^2} - \frac{2m^2 v dZ \sin\eta^2}{Z^3} = -V ds.$$

Indem nun MN in mn ſinkt, wird CD in cd ſinken, ſo daß das Element $CDdc = MNnm$ iſt. Es ſey $\gamma\tau$ eine Tangente der centriſchen Linie durch γ, und der Winkel $D\gamma\tau = \psi$; ſo iſt $ydr \sin\psi = - zds \sin\phi = - Zds$. Wenn alſo die gefundene Gleichung mit ds dividirt, und alsdenn im erſten Gliede $- ydr \sin\psi$ ſtatt Zds geſetzt wird, ſo erhält man

$$\frac{m^2 dv \sin\eta^2}{Zydr \sin\psi} + \frac{2m^2 v dZ \sin\eta^2}{Z^3 ds} = V.$$

Nun muß V durch diejenigen Kräfte ausgedrückt werden, welche die Bewegung des Elements $MNnm$ beſchleunigen. Hieher gehört nun einmahl das eigene Gewicht deſſelben, welches vertical unterwärts drückt. Die Ebene MN ſchneide die Verticallinie gF in X, und es ſey $gX = w$, $gF = a$, alſo $w = a - x$; ſo iſt das Gewicht des Elements $MmnN = zdw = - zdx$. Zu den Kräften, welche dies Element beſchleunigen, gehört ferner der von der gegenſeitigen Würkung der Waſſertheilchen in einander abhängende Druck. Dieſer Druck ſey dem Gewicht einer Waſſer-Säule auf der Grundfläche MN in der Höhe p gleich, ſo iſt derſelbe $= z \times p$, und man findet, wie im 10 §., die Beſchleunigung des Elements $MmnN$ nach verticaler Richtung unterwärts =

$$\frac{zdw - zdp}{zdw} = \frac{zdx + zdp}{zdx} = \frac{dx + dp}{dx}.$$

Dieſe nach den Richtungen Ss und sY auf Ss ſenkrecht zerlegt, giebt die Beſchleunigung nach Ss =

$$\frac{dx + dp}{dx} \sin\phi = -\frac{dx + dp}{ds},$$ und wenn man

die-

dieſen Werth von V dem vorigen gleich ſetzt, ſo erhält man die Gleichung

$$\frac{m^2 d\upsilon \sin\eta^2}{Zydr\sin\psi} + \frac{2m^2 \upsilon dZ \sin\eta^2}{Z^3 ds} = \frac{dx+dp}{ds}.$$

Daraus folgt $dp = -dx$

$$+ \frac{m^2 d\upsilon \sin\eta^2}{ydr\sin\psi} \cdot \frac{ds}{Z} + \frac{2m^2 \upsilon dZ \sin\eta^2}{Z^3}.$$

Wird dieſe Gleichung ſo integrirt, daß man allein x und s nebſt dem davon abhängenden Druck p veränderlich ſetzt, ſo findet man p für jede Geſchwindigkeit des Waſſers. Mit x und s ändert ſich denn zugleich Z, aber y, r und υ bleiben ungeändert. Das Integral muß übrigens ſo genommen werden, daß $p = k$ wird, wenn $s = 0$, alſo $x = EG = b$ iſt. Nun giebt die Integration $p = C - x$

$$+ \frac{m^2 d\upsilon \sin\eta^2}{ydr\sin\psi} \int \frac{ds}{Z} - \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{Z^2}.$$

Man nehme auch das Integral $\int \frac{ds}{Z} = \int \frac{ds}{z\sin\varphi}$ ſo, daß es verſchwindet, wenn $s = 0$ iſt, ſo wird die beſtändige Größe C auf folgende Art beſtimmt. Wenn $s = 0$, alſo $x = b$ iſt, ſo wird $z = n$, $\varphi = \alpha$, und $p = k$, alſo $Z = n\sin\alpha$; folglich $C = k + b$

$$+ \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{n^2 \sin\alpha^2}, \text{ und } p = k + b - x + \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{n^2 \sin\alpha^2}$$

$$+ \frac{m^2 d\upsilon \sin\eta^2}{ydr\sin\psi} \int \frac{ds}{z\sin\varphi} - \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{z^2 \sin\varphi^2}.$$

Nun ward angenommen, daß in der Zeit t die Oberfläche AB in CD geſunken ſey, und es war $g\gamma = r$. Wenn nun CD und gF einander in V ſchneiden, ſo ſey $gV = \varrho$, und die Länge der ganzen Röhre GKS$\gamma'\gamma g = \beta$. Dafern nun keine andere fremde Kraft das Waſſer forttreibt, und die geſammte Bewegung allein von der Schwere herrührt, ſo leidet die Oberfläche CD weiter keinen Druck, als den Druck der Atmoſphäre, wozu die Höhe K gehört. Wäre aber auch eine äußere Kraft vorhanden, die gegen CD drückte, ſo könnte man hier durch Π eben das verſtehen, was es im 159 §. bedeutete. Dies vorausgeſetzt, muß $p = \Pi$ ſeyn, wenn $x = a - \varrho$, $s = \beta - r$, $z = y$, und $\varphi = \psi$ iſt. Dies giebt

$$\Pi = k + h - (a - \varrho) + \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{n^2 \sin\alpha^2}$$

$$+ \frac{m^2 d\upsilon \sin\eta^2}{y\, dr \sin\psi} \int \frac{ds}{z \sin\varphi} - \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{y^2 \sin\psi^2}.$$

Hieraus wird durch die Integration eine Gleichung zwiſchen υ und r gefunden, weil auch ϱ, y und $\sin\psi$ Functionen von r ſind.

192 §.

Aus dieſer Gleichung läßt ſich diejenige leicht herleiten, die Hr. Joh. Bernoulli, vermittelſt ſeiner Methode, findet. (M. ſ. *Joh. Bernoulli* Hydraul. P. II. §. LI. Oper. T. IV. p. 476.) In ſolcher Abſicht muß man zuerſt bemerken, daß bey ihm $\Pi = k$ und $h = 0$ ſey, weil er keine andere bewegende Kraft als die Schwere in Betrachtung zieht, und ſeine Rechnung auf den Fall anwendet, wo die Röhre ſich nicht

nicht wieder auſwärts biegt, ſo daß die Oefnung PQ zugleich der niedrigſte Querſchnitt der Röhre iſt. Läſt man nun b aus der Gleichung weg, und behält x ſtatt $a-\varrho$, ſo daß FV durch x verſtanden wird, ſo hat man $o = -x + \frac{m^2 v \sin\eta^2}{n^2 \sin\alpha^2}$

$$+ \frac{m^2 dv \sin\eta^2}{ydr \sin\psi} \int \frac{ds}{z \sin\varphi} - \frac{m^2 v \sin\eta^2}{y^2 \sin\psi^2}.$$

Nun ſey die Länge des ausgelaufenen Waſſer-Cylinders $= w$, ſo iſt $ndw \sin\alpha = ydr \sin\psi$. Man ſetze ferner die Geſchwindigkeit des durch PQ nach der Richtung der letzten Tangente OG auslaufenden Waſſers $= \sqrt{q}$, ſo iſt $m^2 v \sin\eta^2 = n^2 q \sin\alpha^2$. Endlich ſetze man auch $\frac{dx}{ds}$ ſtatt $\sin\varphi$, ſo erhält man

$$q - \frac{n^2 q \sin\alpha^2}{y^2 \sin\psi^2} + \frac{ndq \sin\alpha}{dw} \int \frac{ds^2}{zdx} = x.$$

Nach der Bernoulliſchen Bezeichnung aber muß man $\frac{1}{\alpha}$ ſtatt $\sin\alpha$, und $\frac{1}{\beta}$ ſtatt $\sin\beta$ ſchreiben, ſo wird

$$q - \frac{n^2 q}{\alpha^2 y^2 \sin\psi^2} + \frac{ndq}{\alpha dw} \int \frac{ds^2}{zdx} = x.$$

Noch ſetze man $\sin\psi = \frac{dx}{ds}$, ſo hat man

$$\left(\alpha^2 y^2 - \frac{n^2 ds^2}{dx^2}\right) qdw + \alpha y^2 ndq \int \frac{ds^2}{zdx}$$

$= \alpha^2 y^2 x dw$. Dies iſt völlig die Bernoulliſche Gleichung, nur iſt zu bemerken, daß bey ihm ω, v, t, x, das ſey, was hier n, q, x, w heiſt.

Weil

Weil auch $ndw \sin\alpha = -ydx$, oder $\frac{ndw}{\alpha} = -ydx$, alſo $dw = -\frac{\alpha ydx}{n}$, wenn $\frac{1}{\alpha}$ ſtatt $\sin\alpha$ geſetzt wird; ſo verwandelt ſich die letzte Gleichung in folgende:

$$\left(\alpha^2y^2 - \frac{n^2ds^2}{dx^2}\right) q \times -\frac{\alpha ydx}{n} + \alpha y^2 ndq \int \frac{ds^2}{zdx} = -\alpha^2y^2x \cdot \frac{\alpha ydx}{n}.$$

Man multiplicire mit $-\frac{n}{\alpha y}$, ſo wird $\left(\alpha^2y^2 - \frac{n^2ds^2}{dx^2}\right)$

$$qdx - n^2ydq \int \frac{ds^2}{zdx} = \alpha^2y^2xdx.$$

193 §.

36 Fig. Es bleiben alle gegebene Stücke, wie im 191 §., nur werde das auslaufende Waſſer durch neu zufließendes erſetzt, ſo daß die Röhre beſtändig voll bleibt: man ſucht die Geſchwindigkeit des Waſſers, nachdem eine gegebene Menge deſſelben ausgelaufen iſt.

Aufl. Es ſey ſo viel Waſſer ausgelaufen, als den Raum ACDB füllte, ſo kann man ſich vorſtellen, die Fläche AB ſey binnen der Zeit in CD geſunken, nur daß wegen des beſtändig zufließenden Waſſers der Raum ACDB beſtändig voll geblieben iſt. Man ſiehet alſo leicht, daß die im 191 §. gefundene Gleichung

chung $p = k + b - x + \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{n^2 \sin\alpha^2}$

$+ \frac{m^2 d\upsilon \sin\eta^2}{ydr\sin\psi} \int \frac{ds^2}{zdx} - \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{z^2 \sin\varphi^2}$,

auch in dem gegenwärtigen Fall gebraucht werden müſſe. Nur iſt hier $p = \Pi$, wenn $x = a$, $s = \beta$, $z = AB = h$, und $\varphi = \beta$ wird. Dieſe Vorausſetzungen geben $\Pi = k + b - a + \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{n^2 \sin\alpha^2}$

$+ \frac{m^2 d\upsilon \sin\eta^2}{ydr\sin\psi} \int \frac{ds^2}{zdx} - \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{h^2 \sin\beta^2}$.

Es iſt hier $\frac{m \sin\eta \sqrt{\upsilon}}{h \sin\beta}$ die Geſchwindigkeit, womit die obere Fläche AB ſinken würde, wenn der Zufluß plötzlich aufhörte. Soll demnach die eben gefundene Gleichung ungeändert beybehalten werden, ſo muß man annehmen, daß das zuflieſſende Waſſer mit eben dieſer Geſchwindigkeit beſtändig eintrete. Dafern aber das Waſſer ſeitwärts mit horizontaler Bewegung zuflieſt, und im erſten Augenblick noch gar keine Geſchwindigkeit nach verticaler Richtung hat, ſo muß man $\frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{h^2 \sin\beta^2} = 0$ ſetzen, und man erhält $\Pi = k + b - a + \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{n^2 \sin\alpha^2} + \frac{m^2 d\upsilon \sin\eta^2}{ydr\sin\psi}$ $\int \frac{ds^2}{zdx}$.

Die

Die erſte Gleichung iſt wiederum mit derjenigen einerley, die Joh. Bernoulli für eben die Aufgabe nach ſeiner Methode und ſeinen Vorausſetzungen gemäß findet. Man ſetze wie im vor. §. $\Pi = k$, $b = 0$, $ndw \sin\alpha = ydr \sin\psi$, und $m^2 v \sin\eta^2 = n^2 q \sin\alpha^2$, ſo wird

$$q - \frac{n^2 q \sin\alpha^2}{h^2 \sin\beta^2} + \frac{ndq \sin\alpha}{dw} \int \frac{ds^2}{zdx} = a.$$

Schreibt man ferner $\frac{1}{\alpha}$ ſtatt $\sin\alpha$, und $\frac{1}{\beta}$ ſtatt $\sin\beta$, ſo hat man die Bernoulliſche Formul

$$q - \frac{\beta^2 n^2 q}{\alpha^2 h^2} + \frac{ndq}{\alpha dw} \int \frac{ds^2}{zdx} = a,$$

oder $$\frac{\alpha^2 h^2 - \beta^2 n^2}{\alpha^2 h} q + \frac{nhdq}{\alpha dw} \int \frac{ds^2}{zdx} = ah.$$

M. ſ. *Joh. Bernoulli* Hydraul. P. II. §. VII. Op. T. IV. pag. 437.

194 §.

37 Fig. Wenn ſich das Gefäß in eine horizontale Röhre FP′Q′K endiget; ſo kann man durch z nur horizontale Querſchnitte des Gefäßes, nicht aber der Röhre verſtehen: man muß die Rechnung für die Röhre auf folgende Betrachtungen gründen. Es ſey $g\gamma$SOS′G′ die centriſche Linie, und das Stück OG′, was zur Röhre KFP′Q′ gehört, ſey grade und horizontal. Dieſe grade Linie wird den übrigen krummen Theil gSO der centriſchen Linie in O berühren. Man ſtelle ſich durch O die horizontale Ebene OL vor, welche die Röhre ABOL unten als ein Boden ſchlieſ-

ſchlieſſet, und es ſey GSg die centriſche Linie desjenigen Waſſers, welches durch die Röhre ABOL laufen würde, wenn im Boden die Oefnung PQ befindlich, KF aber verſchloſſen wäre. Man ſetze, das Waſſer würde nach der Richtung GT durch PQ laufen, und es ſey die Ebene KF auf der Ebene der centriſchen Linie ſenkrecht, und mit GT parallel. Wenn nun PQ=KF iſt, und $Pp = Ff$; ſo ſind die Elemente $PQqp$ und $FKkf$ einander gleich und ähnlich. Man ſetze, daß CD in cd ſinke, indem KF in kf rückt; ſo erhellet, daß eben dies erfolgen würde, wenn KF verſchloſſen, PQ offen wäre, PQ aber in pq ſänke. Wenn demnach für den Augenblick, da die Menge Waſſer ACDB ausgelaufen iſt, des durch HI laufenden Waſſers Geſchwindigkeit $=\sqrt{v}$ iſt, und es bleiben alle Benennungen des 191 §., ſo hat man ſowohl in dem einen, als in dem andern Fall die Gleichung

$$dp = -dx + \frac{m^2 dv \sin\eta^2}{ydr\sin\psi} \cdot \frac{ds}{Z} + \frac{2m^2 v dZ}{Z^3}\sin\eta^2.$$

Die Geſchwindigkeit des durch die eine, oder die andere Oefnung laufenden Waſſers ſey $=\sqrt{q}$, ſo iſt für beyde Fälle $m^2 v \sin\eta^2 = n^2 q \sin\alpha^2$, alſo

$$dp = -dx + \frac{n^2 dq \sin\alpha^2}{ydr\sin\psi} \cdot \frac{ds}{Z} + \frac{2n^2 q \sin\alpha^2 . dZ}{Z^3},$$

und

$$p = C - x + \frac{n^2 dq \sin\alpha^2}{ydr\sin\psi} \int \frac{ds}{Z} - \frac{n^2 q \sin\alpha^2}{Z^2}.$$

Wenn man nun durch s für beyde Fälle die Linie GS verſteht, ſo muß $p = k$ ſeyn, wenn $s = 0$ iſt, ſowohl in dem einen, als in dem andern Fall, und die be-

ſtändige Größe C muß für beyde Fälle auf einerley Art beſtimmt werden. Wird alſo für beyde Fälle das Integral $\int\frac{ds}{Z}$ ſo genommen, daß es mit s zugleich verſchwindet, ſo wird für beyde Fälle zugleich $x=0$, und $Z=n\sin\alpha$, alſo

$$p=k+q-x+\frac{n^2dq\sin\alpha^2}{ydr\sin\psi}\int\frac{ds}{Z}-\frac{n^2q\sin\alpha^2}{Z^2}.$$

Dieſe Schlüſſe würden ihre Anwendung finden, wenn die Röhre KFP′Q′ nicht da wäre, und das Waſſer durch die Oefnung KF ausliefe. Sie laſſen ſich aber auch leicht auf den Fall anwenden, wenn das Waſſer durch KF in die Röhre KFP′Q′ tritt, und bey P′Q′ allererſt ausläuft. Statt der horizontalen Schnitte MN $=z$ muß man in der Röhre die mit KF parallelen Schnitte M′N′ verſtehen, und überdem annehmen, daß s dasjenige Stück der centriſchen Linie bezeichne, was zwiſchen P′Q′ und M′N′ oder MN fällt, welches alſo in G′ anfängt. Man kommt alsdenn vermittelſt der vorigen Schlüſſe, wie leicht vorauszuſehen iſt, auf eben die Differential-Gleichung, wie vorhin, und der Unterſcheid beſtehet nur darin, daß die beſtändige Größe C dieſem Fall gemäß beſtimmt werden muß. Es muß nemlich G′O + GS durch s verſtanden werden, wenn man die Querſchnitte MN des Gefäßes durch z verſteht: und wenn bey dieſer Vorausſetzung das Integral $\int\frac{ds}{Z}$ ſo genommen wird, daß es mit s zugleich verſchwindet, ſo bleibt wie vorhin

$p=$

$$p = k + q - x + \frac{n^2 dq \sin\alpha^2}{y dr \sin\psi} \int \frac{ds}{Z} - \frac{n^2 q \sin\alpha^2}{Z^2}.$$

Hiernächſt wird entweder $p = \Pi$, wenn $s = \beta - r$ iſt, oder wenn $s = \beta$, nachdem entweder alles Waſſer nach und nach ausläuft, oder der Abgang durch beſtändigen Zufluß erſetzt wird, da dann $\beta = GO + Gg$ iſt.

195 §.

Es ſey AEFB ein Gefäß von willkührlicher Geſtalt, (die daran gezeichnete horizontale Röhre ſetze ich jetzt beyſeite), daſſelbe ſey bis an HI mit einer flüßigen Maſſe, deren eigene Schwere $= g$ iſt, von HI aber bis an AB mit einer andern flüßigen Maſſe, deren eigene Schwere $= \gamma$ iſt, angefüllt; ſo leidet der Boden EF den Druck EF $(g \,.\, HX + \gamma \,.\, AZ)$ (70 §. Hydroſt.) Man muß hier durch g und γ das Gewicht eines Cubic-Fußes der flüßigen Maſſen verſtehen, wenn die Linien in Füßen ausgedrückt werden. Dies Gewicht iſt nun bey den uns bekannten ungleichartigen flüßigen Maſſen deswegen verſchieden, weil ihre Dichtigkeit verſchieden iſt. Es könnte aber auch wohl folgende Bewandniß damit haben. Wenn beyde Maſſen zwar gleich dichte wären, die Theilchen der einen aber von einer Schwere unterwärts getrieben würden, die ſtärker oder ſchwächer beſchleunigte, als die Schwere, welche die Theilchen der andern unterwärts drückt; ſo würden die Gewichte gleich großer Theile dieſer Maſſen ebenfalls verſchieden ſeyn. Sie würden ſich wie die Beſchleunigungen dieſer Schweren verhalten (53 §. Mech.). Iſt das Gewicht eines Cubic-Fußes einer Maſſe

37 Fig.

von natürlicher Schwere $= P$, und verhält ſich die Beſchleunigung der natürlichen zur Beſchleunigung einer andern Schwere, wie $1 : g$, ſo iſt das Gewicht eines Cubic-Fußes einer eben ſo dichten Maſſe, worauf die zuletzt erwähnte Schwere würkt, $= g . P$.

Dies vorausgeſetzt, ſtelle man ſich vor, es ſey zwar das ganze Gefäß AEFB mit einer flüßigen Maſſe von gleichförmiger Dichtigkeit angefüllt: aber auf denjenigen Theil, welcher ſich unter HI befindet, würke eine Schwere, deren Beſchleunigung $= g$, und auf den andern über HI befindlichen Theil eine andere Schwere, deren Beſchleunigung $= \gamma$ iſt (in dem Verſtande des 54 §. Mech.) ſo leidet wiederum EF den Druck EF $(g . HX + \gamma . AZ)$. Der Theil EF $. g .$ HX entſteht von der zwiſchen EF und HI befindlichen flüßigen Maſſe: der übrige Theil EF $. \gamma .$ AZ aber von derjenigen Maſſe, die über HI ſteht. Der Querſchnitt HI leidet den Druck HI $. \gamma .$ AZ. Wenn alſo der Druck auf HI $= \pi$, und derjenige, welcher daher auf EF entſteht, $= p$ geſetzt wird, ſo iſt $\pi : p$

$= HI : EF$, und $p = \frac{EF . \pi}{HI}$. Demnach leidet

EF den Druck $EF . g . HX + \frac{EF . \pi}{HI}$.

Man ſchlieſt hieraus leicht folgenden Satz: Wenn die Räume EMNF, MHIN, HCDI, CABD, mit flüßigen Maſſen angefüllt ſind, die jede für ſich allein gegen EF, MN, HI, CD, mit einer Gewalt drücken, welche die Buchſtaben p, q, r, s, nach der Ordnung bezeichnen; ſo leidet dieſerwegen EF den Druck

$p +$

$p + \frac{EF}{MN} q + \frac{EF}{HI} r + \frac{EF}{CD} s$. Wenn man ſtatt einer dieſer Preſſungen q gegen MN den Druck $\frac{EF}{MN} q$ ſucht, den EF dieſerwegen leidet; ſo heiſt dies nach dem Sprach-Gebrauch des Hrn. Joh. Bernoulli, den Druck q gegen den Querſchnitt MN auf die Fläche EF übertragen. So iſt $\frac{EF.q}{MN}$ der von MN auf EF übergetragene, oder reducirte Druck (gravitatio translata). Man ſieht leicht, daß ein Druck $= p + \frac{EF.q}{MN} + \frac{EF.r}{HI} + \frac{EF.s}{CD}$ gegen EF vertical aufwärts angebracht, mit p, q, r, s im Gleichgewicht ſeyn würde.

196 §.

Wenn alſo die Preſſungen p, q, r, s, alle aufwärts gegen MN, HI, CD, AB gerichtet wären, ſo würde ein Druck gegen AB $= s + \frac{AB}{CD} r + \frac{AB}{HI} q + \frac{AB}{MN} p$ mit jenen Preſſungen im Gleichgewicht ſeyn. Dies hieße nun nach dem eben erwähnten Bernoulliſchen Sprachgebrauch, alle einzelne Preſſungen auf den oberſten Querſchnitt *AB* reduciren. Dieſe Reduction läſt ſich allemahl anſtellen, die ganze flüßige Maſſe in AEFB mag in ſo viele horizontale Schichten, als man will, getheilt ſeyn.

Nimmt man an, daß die Höhe dieſer horizontalen Schichte unendlich klein werde, wie M*mn*N,

CcdD, ſo werden ihre horizontalen Grenzen MN, mn, gleich. Nimmt man ferner an, daß alle Theilchen einer ſolchen unendlich kleinen Schichte von einer Schwere getrieben werden, deren Beſchleunigung $= \gamma$ iſt, und ſetzt die Entfernung zwiſchen MN und $mn = dx$, ſo iſt ihr Druck gegen $mn = \gamma . \mathrm{MN} . dx = \gamma . mn . dx$: und dieſer Druck auf EF reducirt, iſt $= \gamma \mathrm{EF} dx$, auf AB reducirt aber $= \gamma \mathrm{AB} dx$. Wenn man nun durch x unbeſtimmt die Entfernung einer jeden Schichte MmnN von EF, oder auch von AB verſteht, und dabey annimmt, daß ſich γ durch eine Function von x ausdrücken laſſe; ſo läſt ſich die Summe aller auf EF oder AB reducirten Preſſungen, wovon jede unbeſtimmt durch $\mathrm{EF}\gamma dx$, oder $\mathrm{AB}\gamma dx$ ausgedrückt werden muß, durch die Integralrechnung finden. Es iſt alsdenn $\int \mathrm{EF}\gamma dx$ der Druck, welchen EF leidet, oder ein Druck, der gegen EF vertical aufwärts angebracht, mit allen einzelnen Preſſungen $\gamma \mathrm{MN} dx$ im Gleichgewicht wäre. Eben ſo iſt $\int \mathrm{AB}\gamma dx$ ein Druck, der gegen AB vertical unterwärts angebracht mit allen Preſſungen $\gamma \mathrm{MN} dx$ im Gleichgewicht wäre, wenn dieſe letztern vertical aufwärts drückten.

Wenn ich nun Kürze halber die unterwärts gerichteten Preſſungen mit +, die aufwärts gerichteten mit − bezeichne, ſo wird man leicht folgende Sätze überſehen. Der Druck $-\int \mathrm{EF}\gamma dx$ iſt mit der Summe aller $+\gamma \mathrm{MN} dx$, und der Druck $+\int \mathrm{AB}\gamma dx$ mit der Summe aller $-\gamma \mathrm{MN} dx$ im Gleichgewicht. Wenn man ſich demnach vorſtellt, daß alle dieſe erwähnten Kräfte zuſammen auf das Waſſer, ſo wie es dem bisherigen Vortrag gemäß iſt, würken; ſo iſt alles im Gleichgewicht. Es ſind aber alle Preſ-

ſungen

ſungen $+ \gamma MNdx$ mit allem $- \gamma MNdx$ für ſich im Gleichgewicht; folglich iſt auch der Druck $+ \int AB \,.\, \gamma dx$ mit $- \int EF \gamma dx$ im Gleichgewicht. Wenn alſo die ganze Maſſe Waſſer AEFB blos träge und nicht ſchwer wäre, auf AB aber ein Gewicht $\int AB \gamma dx = P$ drückte, ſo würde daher auf EF ein Druck $=$

$$\int EF \,.\, \gamma dx = \frac{EF \,.\, P}{AB}$$ entſtehen.

Obgleich dieſe Schlüſſe nur auf ein Gefäß AEFB angewandt ſind, das einen horizontalen Boden, wie EF hat, und ſich nicht wieder aufwärts biegt; ſo läſt ſich doch auch auf ſolche Gefäſſe, wie ACHMP, 36
die ſich wieder aufwärts biegen, die Anwendung leicht Fig.
machen. Man lege durch k eine horizontale Ebene ikl, und ſtelle ſich vor, daß jedes Element in dem Schenkel AikB von einer Kraft vertical unterwärts gedruckt werde, deren Beſchleunigung unbeſtimmt $= \gamma$ und eine Function von gX oder gS iſt: überdem werde jedes Element in dem Schenkel klPQ von einer ſolchen Kraft aufwärts gedruckt; ſo entſteht gegen ik der Druck $\int ik \,.\, \gamma dx$. Daher entſteht ferner gegen kl der Druck $\int kl \,.\, \gamma dx$ aufwärts, und von dem weiter der Druck $\int PQ \,.\, \gamma dx$ gegen PQ aufwärts. Von den Kräften, welche die Elemente des in dem Schenkel klPQ befindlichen Waſſers aufwärts drücken, entſteht gegen PQ noch der Druck $\int PQ \,.\, \gamma dx$, wenn durch γ die Beſchleunigungen der in dieſem Schenkel befindlichen Elemente verſtanden werden, wobey ich annehme, daß γ noch die vorige Function von x iſt. Wenn man dieſes Integral alſo zum vorigen $\int PQ \,.\, \gamma dx$, wo γ die Beſchleunigungen der im Schenkel AikB befindlichen Elemente

bedeutete, addirt, ſo giebt ſich der geſammte Druck gegen PQ. Es kann demnach dieſer geſammte gegen PQ gerichtete Druck $= \int PQ \, . \, \gamma dx$ geſetzt werden, wenn man ſo integrirt, daß dies Integral von AB bis *ik*, und ferner von *kl* bis PQ genommen wird. Jede dieſer einzelnen Kräfte läſt ſich alsdenn für jedes Element beſonders durch $\gamma \, . \, zdx$ ausdrücken, wenn z einen unbeſtimmten horizontalen Querſchnitt bedeutet. Hätten dieſe Kräfte die entgegen geſetzte Richtung, ſo entſtünde daher gegen AB der Druck $\int AB \, . \, \gamma dx$. Hieraus folgt eben ſo, wie vorhin, daß ein Druck P gegen AB, und ein Druck $\frac{PQ \, . \, P}{AB}$ gegen PQ, die nun beyde nach unten gerichtet ſeyn müſſen, einander im Gleichgewicht erhalten würden, wenn alles Waſſer blos träge und nicht ſchwer wäre.

197 §.

Wenn alles Waſſer in der Röhre ACHMP ſchwer iſt, und durch die Oefnung PQ durchfließt; ſo müſſen alle im Schenkel A*ik*B befindliche Elemente ſinken, die übrigen in dem andern Schenkel *kl*PQ befindlichen aber ſteigen. Jedes Element muß alſo von einer bewegenden Kraft nach einer verticalen Richtung beſchleuniget werden, ſo lange die Geſchwindigkeit deſſelben Aenderungen leidet. Dieſe Kraft iſt das Reſultat aller derjenigen Preſſungen, welchen das Element, indem es fortrückt, ausgeſetzt iſt. Dahin gehört einmahl das eigene Gewicht des Elements, welches daſſelbe vertical unterwärts treibt. Wenn man $gX = w$, $FX = x$ ſetzt, ſo iſt das Gewicht des Elements MN*nm* $= zdw = - zdx$. Weil

fürs

fürs zweite die nachfolgende Maſſe AMNB dies Element vorwärts, die voranlaufende Maſſe aber es rückwärts drückt, ſo entſtehet daher ein Druck gegen $mn = zdp$ (11 §.), und die eigentliche Bewegungskraft, welche dies Element vorwärts treibt, iſt $= zdw - zdp$. In dieſem Ausdruck hängt p von der Geſchwindigkeit des Elements ab, und ändert ſich, ſo lange die erwähnte Geſchwindigkeit Aenderungen leidet. Eben dieſe Gröſſe p hängt von w ab, weil bey jeder beſtimmten Geſchwindigkeit dennoch der Druck nicht für alle Stellen der Röhre einerley iſt. Wenn man nun den Druck der Atmoſphäre beyſeit ſetzt, auch den Fall nicht betrachtet, daß eine äußere Kraft z. E. ein Kolben auf AB drücken könnte; ſo muß p für jede beſtimmte Geſchwindigkeit zweymahl $= 0$ ſeyn: einmahl, wenn $w = 0$ iſt, und fürs zweyte, wenn $w = a - b$ iſt. Weil nemlich das durch PQ laufende Waſſer durch das voranlaufende gar nicht aufgehalten wird, wie man hier annehmen muß, ſo iſt für dieſen Querſchnitt $p = 0$. Uebrigens kann man ſich die Vorſtellung machen, das ſchwere Waſſer fließe in dem Gefäß ACHMP eben ſo fort, als wenn es blos träge und nicht ſchwer wäre, jedes Element deſſelben aber von einer Kraft $= zdw - zdp$ nach verticaler Richtung beſchleuniget würde.

198 §.

Es laufe nun das Waſſer durch die untere Oefnung PQ mit der Geſchwindigkeit c, und man nehme an, in einem gewiſſen Augenblick werde allen Elementen die ſchon erlangte Geſchwindigkeit $\frac{nc}{z}$

 plötz-

plötzlich genommen, und zugleich die Oefnung PQ verſchloſſen: ſo muß ſich alles ins Gleichgewicht ſetzen. Es wird nun $zdw - zdp = 0$ für alle Elemente des Waſſers, und es iſt ſo viel, als wenn das Waſſer blos träge und nicht ſchwer wäre, auch gar keine bewegende Kräfte vorhanden wären, welche die Elemente deſſelben zu beſchleunigen ſtrebten. Indeſſen würde doch jeder Querſchnitt einem Druck ausgeſetzt ſeyn, der ſich nach den bekannten hydroſtatiſchen Geſetzen finden ließe. Eben dieſen Druck giebt die Gleichung $zdw - zdp = 0$, denn es wird $p = w$, wie bekannt iſt, und für PQ wäre $p = a - b$, ſo daß PQ den Druck $n(a-b)$ leidet. Eben dieſen Druck würde man finden, wenn man das Gewicht eines jeden Elements zdw auf die untere Oefnung reducirte, und alsdenn die Summe aller dieſer reducirten Gewichte ndw ſuchte, da dann das Integral $\int ndw$ gehörig genommen $= n(a-b)$ wird. Geſetzt aber, das Waſſer wäre blos träge und nicht ſchwer, ſo könnte man fragen: wie groß der Druck gegen die untere Oefnung PQ ſeyn würde, wenn dieſe, nachdem dem Waſſer ſeine erlangte Geſchwindigkeit genommen worden, verſchloſſen würde, auf jedes Element aber dieſelbe bewegende Kraft $zdw - zdp$ zu würken fortführe, welche es im letzten Augenblick der Bewegung beſchleunigte. Dieſer Druck wäre $= \int(ndw - ndp)$ (196 §.), $= n(w-p) + C$. Dies Integral muß $= 0$ ſeyn, wenn $w = 0$ iſt, und zugleich wird $p = 0$, (197 §.) alſo iſt $C = 0$. Um es ferner für die ganze Röhre zu haben, muß man nach der Integration $w = a - b$ ſetzen, da dann abermahl zugleich $p = 0$ iſt. Alſo erhält man $\int n(dw - dp) = n(a-b)$. **Wenn demnach alles Waſſer**

ſer im Gefäß $ACHMP$, deſſen Boden PQ ich jetzt verſchloſſen annehme, blos träge und nicht ſchwer wäre, jedes Element deſſelben aber den Druck $z(dw - dp)$ litte; ſo würde daher ein eben ſo großer Druck gegen PQ entſtehen, als PQ von dem ſchweren in eben dem Gefäß ſtillſtehenden Waſſer leidet.

Auf dieſe im 195 u. f. §. §. vorgetragenen Lehren beruhet die Methode zu ſchließen, der ſich Hr. Joh. Bernoulli in ſeiner Hydraulik bedient, und welche ihn auf die im 192 und 193 §. vermittelſt der Euleriſchen Methode herausgebrachten Gleichungen leitet. Hr. d'Alembert trägt im Traité de l'equilibre & du mouvement des fluides p. 155 ſqq. einen Auszug aus der Bernoulliſchen Theorie vor, der aber, wie es mir vorkommt, das Syſtem dieſes berühmten Schriftſtellers nicht in ſein gehöriges Licht ſetzt. Ich werde ſuchen, es ſo vorſtellig zu machen, wie es dem eigentlichen Sinn des Hrn. Bernoulli am gemäßeſten ſeyn dürfte. Vorläufig bemerke ich nur, daß Bernoulli mit der Betrachtung ſolcher Gefäße den Anfang mache, die beſtändig voll bleiben. Die Anwendung läſt ſich hiernächſt leicht auf ſolche Gefäße machen, die nach und nach auslaufen.

199 §.

Es bleibe alſo die Röhre ACHMP beſtändig voll: 36 Fig.
man ſetze die Geſchwindigkeit des durch den Querſchnitt MN nach der Richtung Ss laufenden Waſſers $= u$, und behalte übrigens alle Bezeichnungen des 191 §. bey. Man bemerke zuförderſt, daß ſich die Geſchwindigkeit u aus einer gedoppelten Urſache ändere, indem das in MN befindliche Waſſer in den

nächſtfolgenden Querſchnitt rückt: einmahl deswegen, weil *mn* größer oder kleiner als MN iſt (7 §.), und zweytens deswegen, weil ſich die Geſchwindigkeit *c* des durch die Oefnung PQ laufenden Waſſers ändert. Es iſt nemlich $u = \frac{nc \sin\alpha}{z \sin\phi}$ (191 §.) $= \frac{nc \sin\alpha}{Z}$. Bliebe alſo *c* unveränderlich, ſo würde *u* in der Zeit *dt* nur deswegen um das Differential *du* wachſen, weil Z um *dZ* wächſt. Wenn nun γ die Beſchleunigung des Elements MN*nm* nach der Richtung S*s* iſt; ſo hat man $-\gamma ds = 2udu$ (117 §. Mechan.) $= -\frac{2n^2c^2 dZ \sin\alpha^2}{Z^3}$, alſo $\gamma Z ds = \frac{2n^2c^2 dZ \sin\alpha^2}{Z^2}$. Die Maſſe dieſes Elements iſt $= -zdx = -zds \sin\phi = -Zds$, alſo die Bewegungskraft oder der Druck dieſes Elements nach der Richtung S*s* $= -\gamma Z ds = -\frac{2n^2c^2 dZ \sin\alpha^2}{Z^2}$. Es ſey dieſe Kraft $= d\Pi$, und man ſetze *s*Y auf S*s* ſenkrecht, ſo kann man $d\Pi$ als eine Kraft betrachten, die aus einer Kraft nach der verticalen Richtung SY entſtanden iſt, und es wird die verticale Kraft SY $= \frac{d\Pi}{\sin\phi}$. Dieſe ſey $= dV$, ſo iſt $dV = -\frac{2n^2c^2 dZ \sin\alpha^2}{Z^2 \sin\phi}$. Wenn nun dieſer Druck auf die Fläche der untern Oefnung PQ reducirt wird, ſo giebt das Integral $\int \frac{n . dV}{z}$

den

den Druck, welchen PQ wegen aller dieſer auf die Elemente des Waſſers würkenden Kräfte dV leidet (196 §.); und ſo groß müſte ein nach unten gerichteter Druck gegen PQ ſeyn, wenn derſelbe mit allen Kräften dV das Gleichgewicht halten ſollte. Nun iſt aus dem 197 §. ſchon bekannt, daß die bewegende Kraft, welche jedes Element des Waſſers nach der verticalen Richtung würklich beſchleuniget, $= z(dw - dp)$ ſey. Folglich iſt $dV = z(dw - dp)$, daraus folgt $\int \frac{ndV}{z} = \int n(dw - dp) = n(a - b)$ (198 §.) Es wird aber $\frac{ndV}{z} = - \frac{2n^3c^2dZ\sin\alpha^2}{Z^3}$, alſo $\int \frac{ndV}{z} = C + \frac{n^3c^2\sin\alpha^2}{Z^2}$. Dies Integral muß $= 0$ ſeyn, wenn $w = 0$, alſo $x = a$, $z = h$, und $\varphi = \beta$, alſo $Z = h\sin\beta$ iſt. Demnach wird $C = - \frac{n^3c^2\sin\alpha^2}{h^2\sin\beta^2}$, und $\int \frac{ndV}{z} = \frac{n^3c^2\sin\alpha^2}{z^2\sin\varphi^2} - \frac{n^3c^2\sin\alpha^2}{h^2\sin\beta^2}$. Um dieſe Summe für alle Elemente zu haben, muß nach der Integration $w = a - b$, alſo $z = n$ und $\sin\varphi = \sin\alpha$ geſetzt werden. Dies giebt $\int \frac{ndV}{z} = n\left(c^2 - \frac{n^2c^2\sin\alpha^2}{h^2\sin\beta^2}\right)$ oder nach der Bernoulliſchen Bezeichnung $\int \frac{ndV}{z}$

$$= n\left(c^2 - \frac{n^2c^2\beta^2}{h^2\alpha^2}\right) = \frac{n(h^2\alpha^2 - n^2\beta^2)}{h^2\alpha^2}c^2.$$

Wird

Wird nun dieſer Ausdruck in die Gleichung $\int \frac{ndV}{z} = n(a-b)$ geſetzt, ſo erhält man $\frac{\alpha^2 h^2 - \beta^2 n^2}{h^2 \alpha^2} = a - b$.

Ich habe hier alle Kräfte dV auf die Fläche der untern Oefnung reduciret, weil es mir vorkommt, daß dasjenige, worauf es bey der Bernoulliſchen Art zu ſchlieſſen eigentlich ankommt, auf dieſe Art am beſten ins Licht geſetzt werde. Bernoulli ſelbſt reducirt alle Kräfte dV auf die Fläche der obern Oefnung, und ſucht das Integral $\int \frac{hdV}{z}$. Dies wäre nun $= \frac{h}{n} \int \frac{ndV}{z} = \frac{h^2\alpha^2 - n^2\beta^2}{\alpha^2 h} c^2$. M. ſ. Joh. Bernoulli Hydraul. P. II. §. IV. woſelbſt eben der Ausdruck herauskommt, nur daß im Nenner noch der Coefficient 2 ſteht. Dies rührt daher, weil Bernoulli $-\gamma ds = udu$ ſetzt, da hier ſtatt deſſen $-\gamma ds = 2udu$ nach dem 112. und 117 §. Mech. geſetzt, alſo $g = \frac{1}{4}$ angenommen iſt. Beyde Rechnungen geben einerley, wenn man hiernächſt nur die der Geſchwindigkeit c zugehörige Höhe gehörig in Rechnung bringt. Iſt dieſe $= v$, ſo muß hier $c^2 = 4gv$, nach dem Bernoulli aber $c^2 = 4gv$ geſetzt werden, ſo daß man bey ihm durch g die doppelte Höhe des freyen Falles in einer Secunde, oder diejenige Geſchwindigkeit verſtehen muß, die ein frey herabfallender Körper in der erſten Secunde erlangt. Es iſt einerley, ob der Druck $\int \frac{hdV}{z}$ allein gegen die obere Flä-

che AB preſt, oder ob jedes Element $MmnN$ den Druck dV leidet 196 §.; alſo muß dieſem Druck $\int \frac{hdV}{z}$ gegen AB ein Druck $n(a-b)$ gegen PQ auf entgegengeſetzte Art angebracht das Gleichgewicht halten; folglich muß eben dieſer Druck $n(a-b)$ auf die Fläche AB reducirt $= \int \frac{hdV}{z}$ ſeyn. Dies giebt $\frac{h^2\alpha^2 - n^2\beta^2}{\alpha^2 h} c^2 = h(a-b)$ wie vorhin.

200 §.

Dieſe Gleichung würde dienen, die Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers zu finden, nachdem die Bewegung deſſelben ſchon gleichförmig geworden iſt. So lange aber die Geſchwindigkeit c ſelbſt veränderlich iſt, ſo lange iſt auch u aus einem gedoppelten Grunde veränderlich, weil nicht allein Z, ſondern auch c um ihre Differentiale wachſen, wenn u um du wächſt. Es wird alſo $du = \frac{n \sin\alpha (Zdc - cdZ)}{Z^2}$ $= \frac{ndc \sin\alpha}{Z} - \frac{ncdZ \sin\alpha}{Z^2}$. Ferner wird $-\gamma ds = 2udu = \frac{2n^2 cdc \sin\alpha^2}{Z^2} - \frac{2n^2c^2 dZ \sin\alpha^2}{Z^3}$, folglich die Bewegungskraft $-\gamma Z ds =$ $-\frac{2n^2c^2 dZ \sin\alpha^2}{Z^2} + \frac{2n^2 cdc \sin\alpha^2}{Z}$, welche nun $= d\Pi$ iſt. Daraus entſteht die verticale

Kraft

Kraft $\frac{d\Pi}{\sin\varphi} = - \frac{2n^2c^2dZ\sin\alpha^2}{Z^2\sin\varphi} + \frac{2n^2cdc\sin\alpha^2}{Z\sin\varphi} = dV$. Dieſe Kraft müſte nun auf die Fläche der untern Oefnung reducirt, und das Integral $\int \frac{ndV}{z} = n\,(a-b)$ geſetzt werden. Man kann aber wegen der im vor. §. angeführten Gründe auch mit Bernoulli alle Kräfte dV auf die Fläche der obern Oefnung reduciren, und das Integral $\int \frac{hdV}{z} = h\,(a-b)$ ſetzen. Auf ſolche Art erhält man

$$\frac{hdV}{z} = - \frac{2hn^2c^2dZ\sin\alpha^2}{Z^3} + \frac{2hn^2cdc\sin\alpha^2}{Z^2}.$$

Man verſtehe nun durch w die Länge des während der Zeit t ausgelaufenen Waſſer-Körpers, ſo iſt $ndw\sin\alpha = -zdx$ (192 §.) oder $ndw\sin\alpha = -Zds$, alſo $n\sin\alpha = -\frac{Zds}{dw}$. Dies in das letzte Glied der gefundenen Gleichung geſetzt giebt

$$\frac{hdV}{z} = - \frac{2hn^2c^2dZ\sin\alpha}{Z^3} - \frac{2hncdc\sin\alpha}{dw} \cdot \frac{ds}{Z} \text{ und } \int \frac{hdV}{z} = C + \frac{hn^2c^2\sin\alpha^2}{Z^2} - \frac{2hncdc\sin\alpha}{dw} \int \frac{ds}{Z}.$$

Man

Man nehme das Integral $\int \frac{ds}{Z}$ ſo, daß es für $s = 0$ verſchwindet, und ſetze nach der Integration $s = \lambda = GKSg$, ſo wird zugleich $z = h$, $\varphi = \beta$, und $\int \frac{hdV}{z} = 0$. Wenn nun bey eben der Vorausſetzung $\int \frac{ds}{Z} = K$ wird, ſo erhält man

$$C = -\frac{n^2 c^2 \sin\alpha^2}{h \sin\beta^2} + \frac{2hncdc}{dw} \cdot K.$$

Weil aber $Z = z \sin\varphi$, und $\sin\varphi = \frac{dx}{ds}$, ſo wird

$$\int \frac{hdV}{z} = \frac{hn^2 c^2 \sin\alpha^2}{z^2 \sin\varphi^2} - \frac{n^2 c^2 \sin\alpha^2}{h \sin\beta^2}$$

$$+ \frac{2hncdc \sin\alpha}{dw} \left(K - \int \frac{ds^2}{zdx}\right).$$

Um dieſe Summe für die ganze Röhre zu haben, muß man $s = 0$, alſo $z = n$, $\varphi = \alpha$ und $Z = n \sin\alpha$ ſetzen. Weil nun in dieſer Vorausſetzung $\int \frac{ds^2}{zdx} = 0$ wird, ſo hat man $\int \frac{hdV}{z} =$

$$h\left(c^2 - \frac{n^2 c^2 \sin\alpha^2}{h^2 \sin\beta^2}\right) + \frac{2hncdc \sin\alpha}{dw} K,$$

oder nach der Bernoulliſchen Bezeichnung $\int \frac{hdV}{z}$

=

$$= \frac{(\alpha^2 h^2 - n^2 \beta^2) c^2}{\alpha^2 h} + \frac{2hncdc}{\alpha dw} \int \frac{ds^2}{zdx}.$$

Man kann nemlich $\int \frac{ds^2}{zdx}$ ſtatt K ſchreiben, vorausgeſetzt, daß nach der Integration die Länge der ganzen Röhre ſtatt s geſetzt werde. Verfährt man übrigens, wie im vor. §, und ſetzt dieſen Ausdruck $= h(a-b)$, ſo hat man die im 193 § ſchon gefundene Bernoulliſche Gleichung, wenn man noch v ſtatt cc, alſo dv ſtatt $2cdc$ ſchreibt.

Wenn das Gefäß nach und nach ausläuft; ſo muß man erwegen, daß nun in dem Integral

$\int \frac{ds^2}{zdx}$ nicht $s = \lambda$, ſondern $s =$ GKSγ, und CD $= y$

ſtatt h geſetzt werden müſſe, ſo daß nunmehro das erwehnte Integral ſowohl, als auch y veränderlich ſind. Ueberdem muß man $\sin\psi$ ſtatt $\sin\beta$ ſchreiben, und ſtatt der beſtändigen Höhe a die veränderliche FV $= x$ brauchen, da dann $\sin\psi = \frac{dx}{ds}$ iſt. Dies giebt alsdann die am Ende des 192 § herausgebrachte Bernoulliſche Gleichung.

201 §.

Wenn das Waſſer nicht ſchwer, ſondern blos träge wäre, und auf *AB* eine Kraft $= h(a-b)$ drückte, ſo würde es eben ſo ausflieſſen, wie es flieſt, wenn alle Elemente ſchwer ſind, und auf *AB* keine fremde Kraft drückt.

Beweis. Wenn auf die obere Fläche AB des blos trägen Waſſers eine Kraft $= h(a-b)$ drückt,

ſo

ſo entſtehet daher zwiſchen zweyen einander unmittelbar folgenden Elementen eben ſowohl, wie im ſchweren Waſſer, ein Druck, wenn das fordere nicht ſo ſchnell weicht, als das hintere zu folgen ſtrebt. Es iſt verſtattet, dieſen Druck, wie im 10 §., $= z \cdot p$ zu ſetzen, wenn MN $= z$ iſt. Alſo würkt auf jedes Element nach der verticalen Richtung die Bewegungskraft $- z dp$ (10. 159 §.), und die Summe aller auf die obere Fläche AB reducirten Bewegungskräfte iſt $= C - hp$, folglich, vermöge des 200 und 201 §., $\int \frac{hdV}{z} = C - hp$. Weil man nun dieſe Summe als eine Function von gX oder FX betrachtet, die mit gX wächſt, ſo muß das Integral $C - hp = 0$ ſeyn, wenn FX $= x = a$ iſt, und alsdenn iſt zugleich $p = a - b$. Dies giebt $C = h(a - b)$ alſo $\int \frac{hdV}{z} = h(a - b) - h \cdot p$. Um dies Integral für das ganze Gefäß zu haben, muß man $x = b$ ſetzen, da dann zugleich $p = 0$ ſeyn muß, weil das durch PQ flieſſende Waſſer von dem voranlaufenden nicht mehr aufgehalten wird. Demnach wird die Bewegung des Waſſers durch die Gleichung $\int \frac{hdV}{z} = h(a - b)$ beſtimmt: und dieſe iſt völlig einerley mit derjenigen, welche die Bewegung des ſchweren Waſſers beſtimmt, wenn es durch keinen äuſſern Druck gegen AB fortgetrieben wird.

202 §.

Wer den Zuſammenhang dieſer Schlüſſe überſiehet, der wird ſehr leicht einſehen, was Bernoulli

damit ſagen wolle, wenn er behauptet: dazu, daß das auslaufende Waſſer binnen einer gewiſſen Zeit t die Geſchwindigkeit c erlange, werde eine gedoppelte Kraft erfordert. Er ſucht, wie groß eine Kraft, dies zu bewürken, ſeyn müſte, wenn alle Waſſertheilchen blos träge und nicht ſchwer wären, dieſe Kraft ſelbſt aber allein gegen die obere Fläche drücken ſollte. Eine ſolche Kraft müſte die Summe zwoer Kräfte ſeyn, wovon die eine $= \frac{\alpha^2 h^2 - \beta^2 n^2}{\alpha^2 h} c^2$ die Beſchleunigung aller Elemente des Waſſers nur in ſo weit bewürkte, als es nöthig wäre, die Bewegung des durch jeden Querſchnitt laufenden Waſſers gleichförmig zu erhalten: die andere $= \frac{2hncdc}{\alpha dw} \int \frac{as^2}{zdx}$ würde erfordert werden, um die Geſchwindigkeit des durch jeden Querſchnitt laufenden Waſſers zu verändern. Er hat beyde durch Namen unterſcheiden wollen, und nennt jene potentiam hydroſtaticam, dieſe potentiam hydraulicam. Wenn die centriſche Linie grade, und alle Querſchnitte des Gefäſſes gleich groß wären, ſo würde jene Kraft gar nicht erfordert werden: das Waſſer, wenn es einmahl ſchon mit der Geſchwindigkeit c fortgienge, würde blos vermöge ſeiner Trägheit in demſelben Zuſtande der Bewegung bleiben; aber zur Veränderung dieſer Geſchwindigkeit würde die ſo genannte hydrauliſche Kraft erfordert. Deswegen ſind dieſe Namen der Sache eben nicht ſo ſehr unangemeſſen, wie Hr. d'Alembert glaubt im Traité du mouvement des fluides §. 191. p. 163. ſqq. und die bisherige Ausführung ergiebt, daß Hr. d'Alemberts

berts Erinnerungen gegen die Bernoulliſche Methode zu ſchlieſſen, die er a. a. O. p. 159. ſqq. vorträgt, ſehr leicht beantwortet werden können. So viel iſt gewiß, daß Hr. Bernoullis Vortrag wohl hie und da einer Aufklärung bedürfe: aber ſo dunkel iſt er auch nicht, wie man glauben müſte, wenn man d'Alemberts Erinnerungen geleſen, und ſie nicht mit dem Bernoulli ſelbſt verglichen hätte.

203 §.

Dasjenige, was Hr. d'Alembert mit Recht gegen Hrn. Bernoulli erinnert, findet man bey ihm a. a. O. im 190 §. Herr d'Alembert frägt daſelbſt: Wenn die Bewegungskraft eines jeden Elements nicht ſeinem Gewicht gleich iſt, warum iſt denn die Summe aller auf die oberſte Fläche reducirten Bewegungskräfte ſo groß, als die Summe der Gewichte auf die oberſte Fläche reducirt? Es iſt gewiß, daß Hr. Bernoulli dieſes nicht deutlich ins Licht geſetzt hat: ja es iſt eben ſo gewiß, daß Herr Bernoulli im II. III. und IV §. Part. II. Hydraul. einen Umſtand verſchweigt, der nothwendig hätte in Betrachtung gezogen werden müſſen. Er ſetzt nämlich im II §. die Bewegungskraft einer jeden horizontalen Schichte nach ſeiner Bezeichnung $= gydt$ oder $grdt$ u. ſ. f. und bey ihm iſt g die Beſchleunigung der Schwere, y oder r ein unbeſtimmter Querſchnitt MN, t die Tiefe deſſelben unter dem höchſten Querſchnitt AB, oder $t = gX$. Dieſe Kräfte reducirt Bernoulli auf die oberſte Fläche, ſo daß er $ghdt$ erhält, und im VI §. ſetzt er das Integral $\int ghdt =$ dem Druck $\int \frac{hdV}{z}$ (198 §.). Dieſer Schluß hat

 die

die Erinnerungen veranlaſſet, welche Hr. d'Alembert a. a. O. 190 §. beſonders n. 4. und n. 5. vorträgt, und dieſe ſind nicht ganz ungegründet. Hr. Bernoulli hätte erwegen müſſen, daß das Gewicht $gydt$ es nicht allein ſey, was das Element MmnN nach verticaler Richtung drückt, daß vielmehr der Druck hinzukomme, deſſen er im IX. §. P. II. erwähnt. Man ſetze dieſen Druck für den Querſchnitt MN mit Bernoulli $= \pi$, ſo leidet das Element MmnN noch den Druck $- d\pi$, und die eigentliche Bewegungskraft für dies Element iſt $= gydt - d\pi$. Nimmt man an, daß π ſo groß ſey, als das Gewicht einer Waſſerſäule auf der Grundfläche MN $= y$ in der Höhe p; ſo iſt $\pi = gyp$, und $d\pi = gydp$ (10 §.), alſo die erwehnte Bewegungskraft $= g(ydt - ydp)$. Eben dieſe Kraft auf die oberſte Fläche reducirt, iſt $= g(hdt - hdp)$, und man muß eigentlich das Integral $\int g(hdt - hdp)$ gehörig genommen $= \int \frac{hdV}{x}$ ſetzen. Aber die Schlüſſe des 197 und 198 §. ergeben, daß jenes Integral gehörig genommen, $= gh(a-b)$ ſey, oder $= gha$, wenn $b = 0$ iſt. So hätte Hr. Bernoulli eigentlich ſchlieſſen müſſen: und wenn ſein Vortrag ſo ergänzt wird, ſo fallen des Hrn. d'Alemberts Erinnerungen weg.

204 §.

Im erſten Theil der Hydraulik macht Hr. Joh. Bernoulli mit der Betrachtung vertical ſtehender prismatiſcher oder cylindriſcher Gefäſſe den Anfang, und bedient ſich dabey derſelben Methode zu ſchlieſ-

ſen.

ſen. Ich kann nicht umhin, eine Probe davon zu geben, weil Hr. d'Alembert dagegen ebenfalls Erinnerungen macht. Wenn das Waſſer aus einem Gefäß von der erwehnten Art durch ein Loch im Boden, oder durch eine am Boden angebrachte verticale Röhre, oder auch durch eine ſeitwärts angebrachte Röhre ausläuft; ſo muß man nahe bey der Oefnung, durch welche das Waſſer aus dem Gefäß im erſten Fall in die freye Luft, und in den beyden letzten Fällen in die Röhre läuft, wegen der im 18 §. angeführten Gründe ſich den Strudel vorſtellen. Man nehme an, die Bewegung des auslaufenden Waſſers ſey ſchon gleichförmig, und ſuche nun die Kräfte, welche erfordert würden, das Waſſer in dieſem Zuſtande zu erhalten, wenn es blos träge und nicht ſchwer wäre. Weil alles Waſſer im Gefäß ſowohl, als auch in der Röhre, den Strudel ausgenommen, den ich hier von Gefäß und Röhre unterſcheide, mit unveränderlicher Geſchwindigkeit fortgeht, ſo iſt keine Kraft nöthig, die Bewegung deſſelben zu verändern: jedes Element erhält ſich in dieſem Zuſtande vermöge ſeiner Trägheit. Aber durch jeden Querſchnitt MN = z 1
des Strudels läuft das Waſſer mit der Geſchwin- Fig.
digkeit $u = \frac{nc}{z}$, wenn es mit der Geſchwindigkeit c durch die untere Oefnung läuft: alſo iſt $2udu = -\frac{2n^2c^2dz}{z^3} = -\gamma ds$, und $\gamma z ds = \frac{2n^2c^2dz}{z^2}$. Dies iſt die Bewegungskraft, welche jedes Element MmnN des Strudels beſchleunigen muß. Setzt man ſie = dV, und reducirt ſie auf

die oberſte Fläche EH $= h$ des Strudels, ſo hat man $\frac{hdV}{z} = \frac{2hn^2c^2dz}{z^3}$, und nun iſt es gleich viel, ob man ſich den Druck $\int\frac{hdV}{z} = \frac{(h^2-n^2)c^2}{h}$ gegen EH oder gegen AB angebracht vorſtellt, weil aus dem Druck gegen AB ein eben ſo groſſer Druck gegen EH entſteht. Aber ein Druck $= na$ gegen FG 1 Fig. aufwärts oder auch in der 4 Fig. gegen HI nach HG zu angebracht, muß jenen aufhalten, folglich muß der Druck, $= na$ auf AB reducirt, dem vorigen gleich ſeyn, und dies giebt $\frac{(h^2-n^2)c^2}{h}$ $= ha$. Hier iſt $\frac{(h^2-n^2)c^2}{h}$ die Kraft, welche gegen AB oder EH angebracht erfordert würde, das Waſſer durch den Strudel zu treiben, wenn es blos träge und nicht ſchwer wäre, und mit der Geſchwindigkeit $\frac{n}{h}c$ durch das Gefäß flöſſe (201 §.). Daß dieſe Kraft in den beyden betrachteten Fällen dem Gewicht der im Gefäß befindlichen Maſſe Waſſer gleich ſeyn müſſe, wird durch die bisherigen Erläuterungen hoffentlich zulänglich ins Licht geſetzt ſeyn. Eigentlich wird die Kraft durch den Strudel nicht deswegen $= ha$ geſetzt, weil ha das Gewicht des Waſſers iſt; ſondern weil ha der auf die obere Fläche reducirte Druck iſt, womit das Waſſer gegen die untere Oefnung preſſen würde. Dieſer Druck iſt hier in dieſem beſondern Fall nur mit dem Gewicht

wicht des Waſſers einerley. Dies wird diejenigen Erinnerungen des Hrn. d'Alemberts heben, welche man im Traité des fluides §. 188. p. 159. ſqq. lieſet. Der von den Bewegungskräften der Elemente des Strudels abhängende Druck gegen die untere Oeffnung wäre $= \int \frac{n dV}{z} = \frac{n(h^2 - n^2)c^2}{h^2}$. Der Druck des natürlich ſchweren Waſſers gegen dieſe Fläche iſt $= na$: beyde Preſſungen müſſen gleich ſeyn (198 §.), und der Druck na, auf entgegengeſetzte Art angebracht, erhält alles Waſſer im Gleichgewicht.

205 §.

Hätte Bernoulli ſeine Schlüſſe ſo vorgetragen, ſo wäre Hr. d'Alembert auf die angeführten Zweifel wohl nicht verfallen. Am allerwenigſten aber auf dasjenige, was er a. a. O. im 189 §. 160. 161 S. dem Hrn. Bernoulli zur Laſt legt. Dies betrift den Fall, wenn die Röhre unten am Gefäß verticel iſt, wie EPQF an ABCD in der 35 Fig. Iſt $AD = a$, 35 Fig.
$EP = b$, ſo drückt nun das ſchwere Waſſer gegen PQ mit der Gewalt $= n(a + b)$. Wäre das Waſſer blos träge und nicht ſchwer und lieſe mit der unveränderlichen Geſchwindigkeit c durch die Röhre, alſo mit der Geſchwindigkeit $\frac{nc}{h}$ im Gefäß; ſo wäre keine Kraft nöthig, es in dieſem Zuſtande der Bewegung zu erhalten. Nur zur Beſchleunigung des Waſſers im Strudel, der nahe über EF entſteht, werden bewegende Kräfte erfordert, welche PQ ſo ſtark drücken, als eine Kraft $= \frac{(h^2 - n^2)c^2}{h}$ thun

würde, die gegen AB drückte. Wegen der natürlichen Schwere des Waſſers leidet PQ den Druck $n(a+b)$, und eben den Druck würde PQ leiden, wenn gegen AB der Druck $h(a+b)$ preſte: alſo muß $\frac{(h^2-n^2)c^2}{h} = h(a+b)$ ſeyn. Dies iſt des Hrn. Bernoulli Meynung Hydraul. P. I. §. XXIII. Wenn man dagegen das lieſt, was Hr. d'Alembert a. a. O. im 189 §. 160. 161 S. ſagt; ſo ſollte man denken, Bernoulli glaube, das Gewicht des Waſſers in der Röhre EPQF trage etwas zum Druck bey, womit das Waſſer im Gefäß ABCD gegen den Strudel preſt, der bey EF entſteht, oder wohl gar, das Gewicht des Waſſers in der Röhre EPQF drücke auf das drüber ſtehende Waſſer, was den Strudel ausmacht. Im Ernſt wird Hr. d'Alembert wohl ſelbſt nicht glauben, daß Bernoulli ſo etwas behaupte.

206 §.

Man kann die Gleichung

$$p = C - x + \frac{m^2 d\upsilon \sin\eta^2}{y dr \sin\psi} \int \frac{ds}{Z} - \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{Z^2}$$

des 191 §. als die allgemeine Fundamentalgleichung in der Theorie von der Bewegung des Waſſers in Gefäſſen und Röhren betrachten. Wenn nämlich alle Querſchnitte MN auf der centriſchen Linie ſenkrecht ſind, ſo hat man $\alpha = \beta = \varphi = \psi = 90°$; alsdenn iſt in den Gleichungen des 191 u. f. §. $\int \frac{ds}{z \sin\psi} = \int \frac{ds}{z}$, weil $\sin\varphi = 1$ iſt, und es

kann

kann nicht $\sin\varphi = \frac{dx}{ds}$ geſetzt werden. Dieſe Vorausſetzungen verwandeln alsdenn die Gleichungen des 191 §. in eben diejenigen, welche im 159 §. gefunden ſind, wie erfordert wird. Nach der Bernoulliſchen Bezeichnung iſt nun $\alpha = \beta = 1$, und ſtatt $\int \frac{ds^2}{zdx}$ muß man $\int \frac{ds}{z}$ ſchreiben, weil eigentlich

$$\int \frac{ds^2}{zdx} = \int \frac{ds}{z \sin\varphi},$$ und $\sin\varphi$ nun $= 1$ wird.

Bey verticalſtehenden Gefäſſen, woraus das Waſſer durch ein Loch im Boden läuft, iſt alsdenn s mit x einerley.

Bey Anwendung der allgemeinen Gleichung, wenn die Querſchnitte horizontal ſind, und die Röhre eine ſolche Geſtalt hat, wie ſie im 191 §. iſt betrachtet worden, würde indeſſen noch eine Schwierigkeit obwalten, die auch Hr. d'Alembert im Traité des fluides § 127. pag. 111. 112. bemerkt hat. Man betrachtet die Sache ſo, als wenn alle horizontale Schichten in dem einen Schenkel ACHM*ikβ* 36 Fig.
mit paralleler Bewegung herab ſinken, die horizontalen Schichten in dem andern Schenkel von *kl* bis PQ aber eben ſo hinauf ſteigen. Wie wird aber das unter der Horizontalfläche *ikl* befindliche Waſſer ſich bewegen? Hr. d'Alembert ſagt, man könne ſich vorſtellen, daß *ki* ſich durch eine Art von Umdrehungsbewegung um *k* in die Lage *kl* begebe. Geſetzt dies wäre würklich ſo; ſo würde doch dieſe Art der Bewegung in den obigen Gleichungen nicht mit begriffen ſeyn. Die Lage der Querſchnitte MN wä-

re alsdenn für dieſen untern Theil der Röhre nicht blos gegen die centriſche Linie, ſondern auch gegen den Horizont veränderlich. Und wenn man auch dieſe letzte veränderliche Lage mit in Rechnung bringen wollte, ſo wäre doch das Geſetz, nach welchem ſie ſich ändert, unbekannt. Iſt dieſer Theil der Röhre unter *ikl* in Vergleichung des übrigen nicht beträchtlich, ſo kann man ihn bey der Rechnung ſelbſt aus der Acht laſſen. Man nimmt alsdenn das Integral $\int \frac{ds}{z \sin \phi}$ von PQ bis *kl*, und ſodann ferner von *ik* bis AB. Hiengen aber beyde Schenkel vermittelſt einer horizontalen Röhre von beträchtlicher Länge zuſammen, ſo müſte man auch für dieſe Röhre das Integral $\int \frac{ds}{z \sin \phi}$ beſonders ſuchen, und dieſen Theil deſſelben zu den übrigen beyden addiren. Man müſte ſich alsdenn die Querſchnitte der Röhre etwa ſo vorſtellen, wie im 192 §. die Querſchnitte der dortigen horizontalen Röhre, oder man müſte ſie auch auf der centriſchen Linie ſenkrecht annehmen. Mit der letzten Vorausſetzung kann man in den meiſten Fällen der Ausübung auskommen.

Der

Der XIV. Abſchnitt.

Vom Druck des bewegten Waſſers gegen die Gefäſſe und Röhren.

207 §.

Die oben im 159. 181. und 191 §. gebrauchte Euleriſche Methode, die Geſchwindigkeit des Waſſers zu finden, indem es aus Oefnungen der Gefäſſe oder Röhren läuft, giebt zugleich eine Gleichung für den Druck, womit das fortlaufende Waſſer gegen jede Stelle des Gefäſſes, oder der Röhre preſt. Im 159 §. ward die Gleichung gefunden

$$p = k + b - x + \frac{m^2 v}{n^2} + \frac{dv}{ydr} \int \frac{m^2 ds}{z} - \frac{m^2 v}{z^2},$$

Setzt man ndw ſtatt ydr, und $n^2 q$ ſtatt $m^2 v$, ſo wird

$$p = k + b - x + q + \frac{ndq}{dw} \int \frac{ds}{z} - \frac{n^2 q}{z^2}, \text{ oder}$$

$$p = k + b - x + \frac{(z^2 - n^2) q}{z^2} + \frac{ndq}{dw} \int \frac{ds}{z}$$

Will man dieſe Gleichung auf einen beſondern Fall anwenden, ſo muß man zuförderſt v ſuchen, und hiernächſt die Werthe von v und $\frac{dv}{dr}$ oder q und $\frac{dq}{dw}$ in dieſe Gleichung ſetzen, ſo iſt der Sache ein

Genüge

Genüge geſchehen. Joh. Bernoulli bedient ſich im I Theil ſeiner Hydraulik einer etwas weitläuftigen und mühſamen Methode dieſen Druck zu finden: im zweyten Theil aber, wo er die ganze Unterſuchung nochmahl vornimmt, findet er eben dieſen Druck auf einem weit kürzern und leichtern Wege. Seine Schlüſſe hängen mit denjenigen zuſammen, wodurch er die Gleichung für die Geſchwindigkeit findet, die oben im 199 u. f. §§. vorgetragen ſind, und es wird nicht undienlich ſeyn, ſeine Methode, den Druck zu finden, hier gleichfalls auseinander zu ſetzen, um auch in dieſem Stück die Uebereinſtimmung beyder Methoden zu zeigen.

208 §.

36 Fig. Man ſtelle ſich alſo nochmahl die mit Waſſer angefüllte Röhre ACHMP vor, woraus das Waſſer durch die Oefnung PQ mit der Geſchwindigkeit c nach der Richtung Gh läuft, und behalte alle Benennungen des 199 und 200 §. bey: ſo iſt die Frage, wie ſtark jeder Querſchnitt CD des Waſſers von beyden Seiten gepreſt werde. Es ſey dieſer Druck $= \pi$, und man ſtelle ſich vor, der obere Theil ACDB des Canals werde auf einmahl weggenommen, jedoch ſo, daß CD noch eben den Druck leide, wie vorhin; ſo wird wenigſtens im erſten Augenblick das Waſſer in dem übrigen Theil des Canals noch eben ſo beſchleuniget werden, wie vorhin. Nun ſuche man eine Gleichung für die Geſchwindigkeit c eben ſo, wie im 199 und 200 §., und erwege, daß nunmehro CD $= y$ das ſey, was dort AB $= h$ war, alſo ψ das, was dort β war. Demnach erhält man im

im gegenwärtigen Fall die hydroſtatiſche Kraft $y\left(c^2 - \frac{n^2 c^2 \sin\alpha^2}{y^2 \sin\psi^2}\right)$ ſtatt der dortigen $h\left(c^2 - \frac{n^2 c^2 \sin\alpha^2}{h^2 \sin\beta^2}\right)$, und die hydrauliſche Kraft $\frac{2yncdc \sin\alpha}{dw} \int \frac{ds^2}{zdx}$ ſtatt der dortigen $\frac{2hncdc \sin\alpha}{dw} \int \frac{ds^2}{zdx}$, wo in dem Integral $\int \frac{ds^2}{zdx}$ nach geſchehener Integration die Länge der Röhre GKS$s\gamma$ geſetzt werden muß. Verſteht man alſo nun dieſe durch s, ſo iſt $\sin\psi = \frac{dx}{ds}$, und wenn man mit Bernoulli $\frac{1}{\alpha}$ ſtatt $\sin\alpha$ ſchreibt, ſo wird jene Kraft $= \frac{(\alpha\alpha yy - nnds^2 : dx^2)cc}{\alpha\alpha y}$, und die letztere $= \frac{2yncdc}{\alpha dw} \int \frac{ds^2}{zdx}$. Von den Bewegungskräften, welche alle Elemente des Waſſers in der übrigen Röhre CHMP würklich beſchleunigen, entſteht gegen die untere Oefnung ein Druck $= n(x-b)$, und ihm iſt ein Druck $= y(x-b)$ gegen die obere Fläche CD äquipollent. Dieſer letzte Druck muß mit π zuſammen genommen ſo groß, als die Summe jener beyden Kräfte ſeyn. Dies

giebt

giebt

$$\frac{(\alpha\alpha yy - nnds^2 : dx^2)cc}{\alpha\alpha y} + \frac{2yncdc}{\alpha dw}\int\frac{ds^2}{zdx}$$

$$= y(x-b) + \pi, \text{ alſo}$$

$$\pi = \frac{(\alpha^2 y^2 - n^2 ds^2 : dx^2)c^2}{\alpha\alpha y} + \frac{2yncdc}{\alpha dw}\int\frac{ds^2}{zdx}$$

$$- y(x-b).$$

Nun ſey p die Höhe einer Waſſer-Säule, die y zur Grundfläche hat, und deren Gewicht $= \pi$ iſt, ferner ſey $cc = q$, ſo erhält man $\pi = py$, folglich

$$p = \frac{(\alpha^2 y^2 - n^2 ds^2 : dx^2)q^2}{\alpha\alpha yy} + \frac{ndq}{\alpha dw}\int\frac{ds^2}{zdx}$$

$$- (x-b).$$

209 §.

Im 191 §. ward vermittelſt der Euleriſchen Methode für dieſe Höhe die Gleichung gefunden

$$p = k + b - x + \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{n^2 \sin\alpha^2} + \frac{m^2 d\upsilon \sin\eta^2}{ydr \sin\psi}\int\frac{ds}{z\sin\phi}$$

$$- \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{z^2 \sin\phi^2}.$$

Man ſchreibe, wie im 192 §., $ndw \sin\alpha$ ſtatt $ydr \sin\psi$, und $n^2 q \sin\alpha^2$ ſtatt $m^2 \upsilon \sin\eta^2$, und ſetze $\frac{dx}{ds}$ ſtatt $\sin\phi$, ſo erhält man

$$p = k + b - x + q + \frac{ndq \sin\alpha}{dw}\int\frac{ds^2}{zdx}$$

—

$$-\frac{n^2 q \sin\alpha^2 ds^2 : dx^2}{z^2},$$

oder nach der Bernoulliſchen Bezeichnung $\frac{1}{\alpha}$ ſtatt $\sin\alpha$ geſetzt,

$$p = k + b - x + \frac{(\alpha^2 z^2 - n^2 ds^2 : dx^2) q}{\alpha^2 z^2}$$

$$+ \frac{ndq}{\alpha dw} \int \frac{ds^2}{z dx},$$

und dieſer Ausdruck kommt mit dem eben gefundenen völlig überein. Aus dieſer Gleichung würde nämlich k weggefallen, oder man müſte $k = 0$ ſetzen, wenn das Waſſer im leeren Raum ausliefe. Bernoulli zieht den Druck der Atmoſphäre nicht in Betrachtung, daher fehlt bey ihm dies k.

Setzt man $\sin\varphi = 1$, und $\alpha = 1$, ſo wird

$$p = k + b - x + \frac{(z^2 - n^2) q}{z^2} + \frac{ndq}{dw} \int \frac{ds}{z};$$

wie im 159 und 207 §.

210 §.

Das Waſſer, welches durch PQ aus der Röhre $ACHMP$ abläuft, wird beſtändig durch neues oben in AB eintretendes erſetzt: man ſucht den Druck des Waſſers auf jede Stelle der Röhre für jede gegebene Geſchwindigkeit deſſelben. 36 Fig.

Aufl. Am Ende des 193 §. ward folgende Gleichung für die Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers gefunden,

$\alpha^2 h^2$

$$\frac{\alpha^2 h^2 - \beta^2 n^2}{\alpha^2 h} q + \frac{nhdq}{\alpha dw} \int \frac{ds^2}{zdx} = (a-b) h.$$

Man multiplicire mit $\alpha^2 hdw$, und ſetze $\int \frac{ds^2}{zdx} = \mathrm{M}$, ſo iſt hier M eine beſtändige Gröſſe, und es wird

$$(\alpha^2 h^2 - \beta^2 n^2) qdw + \alpha \mathrm{M} h^2 ndq = \alpha^2 h^2 (a-b) dw.$$

Daraus folgt

$$\frac{dq}{dw} = \frac{\alpha^2 h^2 (a-b) - (\alpha^2 h^2 - \beta^2 n^2) q}{\alpha \mathrm{M} h^2 n}.$$

Dies ſetze man in die für p gefundene Gleichung im vor. §, und ſchreibe dort N ſtatt $\int \frac{ds^2}{zdx}$, welches Integral hier veränderlich iſt, und von s abhängt; ſo erhält man

$$p = k + \frac{(\alpha^2 z^2 - n^2 ds : dx^2) q}{\alpha^2 z^2}$$

$$+ \frac{\alpha^2 h^2 (a-b) - (\alpha^2 h^2 - \beta^2 n^2) q}{\alpha^2 \mathrm{M} h^2} \mathrm{N} - (x-b).$$

Wenn alſo in M, oder in N, eine aufwärts gerichtete Röhre angebracht würde, worin das Waſſer hineintreten könnte, ſo würde es in derſelben auf dieſe Höhe ſteigen.

Verlangt man dieſe Höhe für den erſten Anfang der Bewegung, ſo muß man $q = 0$ ſetzen, und dieſe Vorausſetzung giebt $p = k + \frac{(a-b)\mathrm{N}}{\mathrm{M}} - (x-b)$, oder $p = \frac{(a-b)\mathrm{N}}{\mathrm{M}} - (x-b)$, wenn das Waſſer

im

im leeren Raum ausließe, alſo $k = 0$ wäre. So lange das Waſſer in völliger Ruhe ſteht, wäre dieſe Höhe nach den Grundſätzen der Hydroſtatik $= (a - b) - (x - b) = a - x =$ der Höhe der obern Fläche AB über MN, den Druck der Atmoſphäre beyſeit geſetzt. Demnach iſt der Druck des Waſſers im erſten Augenblick, da es anfängt, ſich zu bewegen, kleiner, als vorher, da es noch gänzlich in Ruhe war.

Wenn alle Querſchnitte MN auf der centriſchen Linie ſenkrecht ſind, ſo hat man $\alpha = \beta = \sin\varphi = 1$, alſo

$$p = k + \frac{(z^2 - n^2)q}{z^2} + \frac{h^2(a-b) - (h^2 - n^2)q}{Mh^2} N - (x - b).$$

211 §.

Sucht man dieſen Druck für den Fall, wenn die Bewegung des Waſſers nicht merklich mehr beſchleuniget wird, ſo muß man $\frac{dq}{dw} = 0$ ſetzen, und man erhält

$$p = k + \frac{(\alpha^2 z^2 - n^2 ds^2 : dx^2)q}{\alpha^2 z^2} - (x - b).$$

Sind aber alle Querſchnitte MN auf der centriſchen Linie ſenkrecht, ſo iſt

$$p = k + \frac{(z^2 - n^2)q}{z^2} - (x - b).$$

Da nun in eben dieſem Fall $q = \frac{\alpha^2 h^2 (a - b)}{\alpha^2 h^2 - \beta^2 n^2}$ wird, ſo iſt

 $p =$

$$p = k + \frac{h^2(a-b)(\alpha^2 z^2 - n^2 ds^2 : dx^2)}{z^2(\alpha^2 h^2 - \beta^2 n^2)} - (x-b),$$

oder $p = k + \frac{h^2(a-b)(z^2-n^2)}{z^2(h^2-n^2)} - (x-b)$,

wenn $\alpha = \beta = \sin\phi = 1$ iſt. In der Folge werde ich vor der Hand annehmen, daß das Waſſer im leeren Raum auslaufe, und alſo $k = 0$ ſetzen. Ich werde ferner die Anwendung nur auf ſolche Fälle machen, wo die Querſchnitte MN auf der centriſchen Linie ſenkrecht ſind, wo alſo die allgemeine Gleichung

$$p = \frac{z^2-n^2}{z^2} q + \frac{h^2(a-b)-(h^2-n^2)q}{Mh^2} N - (x-b,$$

und im Fall der bereits gleichförmig gewordenen Bewegung die Gleichung $p = \frac{h^2(a-b)(z^2-n^2)}{z^2(h^2-n^2)}$ $-(x-b)$, ihre Anwendung findet.

212 §.

2 Fig. Aus dem Gefäß $ABCD$ läuft das Waſſer durch die Oefnung FG, deren Ebene ich jetzt horizontal annehme, und das Gefäß wird bis an AD beſtändig voll gehalten: man ſucht den geſammten Druck, womit das Waſſer während ſeiner Bewegung das Gefäß vertical unterwärts preſt.

Aufl. Jedes Element Rr der innern Fläche des Gefäſſes leidet den Druck R$r \cdot p$, deſſen Richtung auf dies Element ſenkrecht iſt. Wenn man dieſen Druck, wie im 10 §. Hydroſt. nach verticaler und horizontaler Richtung zerlegt, und den verticalen

len Druck $= d\pi$ ſetzt, ſo iſt $Rr : dz = Rr . p : d\pi$, (weil jeder unbeſtimmte Querſchnitt $RS = z$ iſt,) und man erhält $d\pi = pdz$. Die horizontalen Preſſungen heben einander auf, und die Summe aller verticalen Preſſungen, nämlich $\pi = \int pdz$, iſt der geſuchte Druck, womit das Waſſer während ſeiner Bewegung das Gefäß vertical unterwärts preſt: da dann der Werth von p aus dem vor. §. gebraucht werden muß. Wenn das Gefäß mit dem darin befindlichen Waſſer an dem einen Arm eines Waagebalkens hienge, ſo würde für das Gleichgewicht ein Gegengewicht $= \pi$ erfordert werden, auſſer demjenigen, was das Gewicht des Gefäſſes ſelbſt erforderte. Weil nun vermöge der angenommenen Vorausſetzung hier $b = 0$ iſt, ſo erhält man $d\pi = qdz$

$$- \frac{n^2 qdz}{z^2} + \frac{ah^2 - (h^2 - n^2)q}{Mh^2} Ndz - xdz.$$

Hier iſt nun $N = \int \frac{ds}{z} = \int \frac{dx}{z}$, weil s mit x einerley iſt: und da die Geſtalt des Gefäſſes als bekannt angenommen wird, ſo kann man x durch z ausdrücken. Bey der Integration wird q als eine beſtändige Gröſſe betrachtet, weil man den Druck für eine gegebene Geſchwindigkeit ſucht, und die Integration giebt

$$\pi = qz + \frac{n^2 q}{z} + \frac{ah^2 - (h^2 - n^2)q}{Mh^2} \int Ndz$$

$$- \int xdz + C.$$

Man nehme die Integrale $\int Ndz$ und $\int xdz$ ſo, daß ſie für $x = 0$, alſo für $z = n$ verſchwinden, ſo wird

zugleich $\pi = 0$, und man erhält $C = -2qn$. Um den Druck für das ganze Gefäß zu haben, ſetzt man nach der Integration $x = a$, alſo $z = h$, ſo wird

$$\pi = \frac{q(h-n)^2}{h} + \frac{ah^2 - (h^2 - n^2) q}{Mh^2} \int N dz - \int x dz.$$

Dieſe Rechnung ſetzt voraus, daß ſich die Querſchnitte des Gefäſſes mit x nach dem Geſetz der Stetigkeit ändern. Wenn alſo das Gefäß einen ebenen horizontalen Boden BC hätte, und in demſelben die Oefnung FG befindlich wäre, ſo würde bey Anwendung dieſer Formuln Behutſamkeit nöthig ſeyn, um kein falſches Reſultat heraus zu bringen. Wenn man für $x = 0$, den Werth $z = BC$, und für $x = a$ den Werth $z = AD$ annimmt; ſo erhält man nur die Summe aller verticalen Preſſungen auf die Seiten des Gefäſſes allein, dafern für die Werthe $x = 0$ und $z = BC$ zugleich $\pi = 0$ angenommen wird. Hiezu müſte alsdenn der Druck des Waſſers gegen den Boden des Gefäſſes geſetzt werden, um den ganzen verticalen Druck zu haben, dem das Gefäß ausgeſetzt iſt. Aber auch ſelbſt bey dieſem Verfahren bleibt noch verſchiedenes zu erwegen übrig, welches die Auflöſung der folgenden Aufgabe näher erläutern wird.

213 §.

1 und Das Gefäß *ABCD* hat einen ebenen und
2 Fig. horizontalen Boden *BC*, und in demſelben iſt die Oefnung *FG* befindlich, wodurch das Waſſer abläuft, deſſen Abgang aber beſtändig erſetzt wird: man ſucht den Druck des durchflieſſenden Waſſers gegen den Boden.

Aufl.

Aufl. In Rückſicht auf dasjenige, was wegen des von Bernoulli angenommenen Strudels ſchon mehrmahl vorgekommen iſt, ſtelle ich mir ſtatt ABCD das Gefäß AEFGHD vor, und betrachte die Grenze des Strudels EFGH als einen Theil der Grenze des Gefäſſes, worin eigentlich alles Waſſer in Bewegung iſt. Wäre nun die Geſtalt des Strudels bekannt, und QO ſeine ganze Höhe; ſo würde man die Auflöſung der Aufgabe des vor. §. auf den Strudel, als einen Theil des Gefäſſes betrachtet, anwenden können. Für diejenigen Werthe von x, die kleiner als QO ſind, müſte man durch die zugehörigen z, Querſchnitte des Strudels, nicht des Gefäſſes verſtehen, und wenn man nach der Integration $x = QO$, $z = EH$ ſetzte, ſo würde man den geſammten verticalen Druck erhalten, dem die Grenze des Strudels EFGH ausgeſetzt iſt. Dieſer Druck muß, wie ich meyne, mit dem geſuchten Druck gegen den Boden einerley ſeyn. Eigentlich käme noch das Gewicht des in den Ecken EBF und GCH ſtillſtehenden Waſſers dazu; es kann daſſelbe aber deswegen als ganz unbeträchtlich beyſeit geſetzt werden, weil die ganze Höhe des Strudels in Vergleichung mit der ganzen Höhe des Gefäſſes ſehr klein angenommen werden muß. Der geſuchte Druck wäre alſo

$$\pi = qz + \frac{n^2 q}{z} + \frac{ah^2 - (h^2 - n^2)q}{Mh^2} \int N dz$$
$$- \int x dz + C.$$

Um die beſtändige Gröſſe C zu beſtimmen, muß man für $x = 0$ die Werthe $z = n$ und $\pi = 0$ annehmen. Werden alsdenn, wie im vor. §, die Integrale $\int N dz$

und $\int x dz$ ſo genommen, daß ſie für $x = 0$ verſchwinden; ſo wird $C = -2qn$. Nach der Integration muß $x = QO$ und $z = EH$ geſetzt werden, und man erhält

$$\pi = \frac{q(EH-n)^2}{EH} + \frac{ah^2-(h^2-n^2)q}{Mh^2}\int N dz$$

$$-\int x dz.$$

Weil nun die Geſtalt des Strudels gänzlich unbekannt iſt, ſo laſſen ſich die Integrale $\int N dz$ und $\int x dz$ ſo wenig genau berechnen, als man im Stande iſt zu ſagen, wie groß EH eigentlich ſey, wenn das Gefäß ſelbſt auch veränderliche Querſchnitte hat, wie in der 2 Fig. Indeſſen kann man ohne beträchtlichen Fehler $EH = BC$ annehmen, weil QO ſehr klein iſt. Und eben um deswillen werden die Integrale $\int N dz$ und $\int x dz$ ebenfalls ſehr klein ſeyn, ſo daß man wenigſtens beynahe $\pi = \frac{q(BC-n)^2}{BC}$ ſetzen kann.

1 Fig. Dafern das Gefäß in die Claſſe grader Priſmen oder Cylinder gehört (1 Fig.), ſo iſt würklich $EH = BC = h$, und man hat $\pi = \frac{q(h-n)^2}{h}$. Dieſer Druck iſt nun zugleich mit dem geſammten Druck einerley, der das Gefäß vertical unterwärts preſt, weil die ſenkrechten Preſſungen gegen die verticalen Seitenwände des Priſma und Cylinders zugleich horizontal ſind, und einander alle aufheben, ſo daß daher kein verticaler Druck entſteht. Man ſetze ſtatt q den im 184 §. für priſmatiſche Gefäſſe gefundenen Werth

$$q = \frac{h^2 a}{h^2 - n^2}\left(1 - e^{\frac{(n^2 - h^2) w}{hna}}\right);$$

(wobey ich nur bemerke, daß hier q, h, a, w das ſey, was dort v, m, β, x war, und daß das dortige b hier $= 0$ ſey) ſo wird

$$\pi = \frac{h(h-n)a}{h+n}\left(1 - e^{\frac{(n^2 - h^2) w}{hna}}\right),$$

und der Boden des Gefäſſes, der hier $= h - n$ iſt, leidet einen eben ſo groſſen Druck, als wenn eine Waſſerſäule in der Höhe

$$\frac{ha}{h+n}\left(1 - e^{\frac{(n^2 - h^2) w}{hna}}\right)$$ darauf ru-hig ſtünde.

Herr Joh. Bernoulli trägt dieſe Aufgabe im P. I. Hydraul. §. XXVII. bis §. XXX. in der Anwendung auf priſmatiſche Gefäſſe vor: er bringt aber den Druck ganz anders heraus, als er hier gefunden iſt. Wenn Hr. d'Alembert im Traité des fluides 188 §. 160 S. des Hrn. Bernoulli Verfahren bey Auflöſung dieſer Aufgabe für ſehr verwickelt hält, ſo gebe ich ihm darin völlig Beyfall, und geſtehe gern, daß ich ihm in ſeinen Schlüſſen ebenfalls nicht folgen kann.

Herr Hofr. Käſtner bemerkt im 546 §. ſeiner Hydrodynamik auf der 480 S. eben daſſelbe. Bernoulli bringt heraus, der Druck des Waſſers gegen den Boden, in ſo fern er aus der Bewegung deſſel-

ben entſtehe, ſey $= \frac{h^2 - n^2}{h} q$, und dazu ſetzt er noch das ganze Gewicht des Waſſers $= ah$. Das letztere verwirft Hr. H. Käſtner zwar, kömmt aber nach ſeiner Art zu ſchlieſſen auf eben den Ausdruck $\frac{(h^2 - n^2)q}{h}$, und bemerkt, welches Bernoulli, wie es ſcheint, überſehen hatte, daß dieſe Formul eben diejenige ſey, welche im 204 §. die Kraft ausdrückte, die das Waſſer, wenn es blos träge wäre, durch den Strudel treiben müſte. Ich muß aber geſtehen, daß Herrn Käſtners Schlüſſe für mich nicht überzeugend ſind. Wenn das Waſſer blos träge wäre, und gegen AD oder EH die Kraft $\int - \frac{hdV}{z}$ $= \frac{(h^2 - n^2)q}{h}$ (204 §.) drückte; ſo würden die Elemente des blos trägen Waſſers eben ſo gegen die innere Grenze des Gefäſſes und gegen die Grenze des Strudels drücken, wie das durchflieſſende ſchwere Waſſer dagegen drückt; und ſo dünkt mich, müſte doch alsdenn auch der Druck ſo berechnet werden, wie ich es hier gewieſen habe. Irre ich, ſo wird dieſer Irrthum um ſo eher Entſchuldigung verdienen, weil dieſe Art Unterſuchungen mit zu den ſchwerſten in der angewandten Mathematik gehören.

214 §.

38 Fig. Das Gefäß *ABCD* hängt unten mit der horizontalen Röhre *DF* zuſammen, durch welche das Waſſer ab- und aus der Oefnung *GH*

GH ausſtrömt. Man ſucht den Druck des Waſſers gegen eine gegebene Stelle M der Röhre, vorausgeſetzt, daß das Gefäß beſtändig voll bleibe.

Aufl. Man muß einmal in den obigen Formuln $b = 0$ ſetzen, weil die Röhre ſich nicht wieder aufwärts biegt. Weil ferner x die Höhe eines jeden Querſchnitts MN über den unterſten Punct der centriſchen Linie bedeutet, ſo iſt für alle Querſchnitte der horizontalen Röhre $x = 0$. Dieſe Vorausſetzungen geben

$$p = \frac{(z^2 - n^2)q}{z^2} + \frac{ah^2 - (h^2 - n^2)q}{Mh^2}\,\mathrm{N},$$

und für den Beharrungsſtand wird

$$p = \frac{ah^2(z^2 - n^2)}{z^2(h^2 - n^2)}.$$

Wenn h ſehr viel gröſſer als n iſt, alſo $h^2 - n^2 = h^2$ geſetzt werden kann, ſo iſt im Beharrungsſtande $p = \frac{a(z^2 - n^2)}{z^2}$. Dafern alſo die Röhre cylindriſch und ihre Weite $= m$ iſt, ſo hat man $p = \frac{m^2 - n^2}{m^2}a$, und dieſer Druck iſt für alle Stellen der Röhre einerley, weil $z = m = h$ für die ganze Röhre einerley iſt. Setzt man $\frac{m}{n} = v$, alſo $\frac{n^2}{m^2} = \frac{1}{v^2}$, und $1 - \frac{n^2}{m^2} = 1 - \frac{1}{v^2} = \frac{v^2 - 1}{v^2}$,

ſo wird $p = \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} a$, und in einer in M auf- wärts angebrachten Röhre würde das Waſſer auf die Höhe $\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} a$ ſteigen. (M. ſ. *Dan. Bernoulli* Hydrodyn. Sect. XII. §. 5. woſelbſt n ſtatt des hieſigen ν gebraucht iſt.) Die Geſchwindigkeit, womit das Waſſer durch den Querſchnitt MN der Röhre läuft, iſt $= \frac{n}{m}\sqrt{q}$, und $q = a$ (12 §.) alſo $\frac{n^2}{m^2} a$ die der Geſchwindigkeit des durch MN laufenden Waſſers zugehörige Höhe. Setzt man alſo dieſe Höhe $= f$, ſo iſt $p = a - f$.

Wenn $n = m$, alſo die Oefnung GH ſo groß iſt, als die Weite der Röhre, ſo iſt $p = 0$, und die Röhre leidet gar keinen Druck.

Weil überhaupt $p = a - \frac{n^2}{z^2} a$ iſt, die Röhre ſey wie ſie wolle geſtaltet, dafern die centriſche Linie nur horizontal iſt, ſo erhellet, daß in jedem Querſchnitt MN der Röhre der Druck deſto gröſſer ſey, je gröſſer z in Vergleichung mit n iſt. Wäre die Röhre coniſch, ſo daß die kleinere Grundfläche mit dem Gefäß zuſammen hienge, ſo wäre allemahl $z < n$, alſo p negativ. Was dies ſagen wolle, ſoll bald genauer unterſucht werden.

215 §.

29 Fig. Die Röhre *ACHMP* ſey wie ſie ſie wolle geſtaltet, und der Waſſerverluſt werde ſo erſetzt,

ſetzt, daß das Waſſer in die obere Oefnung ſeitwärts zuflieſſe: man frägt, wie ſtark der Druck des Waſſers auf jede Stelle der Röhre ſey, nachdem die Bewegung gleichförmig geworden iſt.

Aufl. Es iſt $p = \frac{(z^2 - n^2)q}{z^2} - (x - b)$, (211 §.) und vermöge der angenommenen Vorausſetzung $q = a - b$ (183 §.) Alſo wird $p = a - b - \frac{n^2}{z^2}(a-b) - (x-b)$, d. i. $p = a - x - \frac{n^2}{z^2}(a-b)$. Man ſiehet leicht, daß $a - x$ die Höhe der obern Waſſerfläche über die gegebene Stelle der Röhre, und $\frac{n^2}{z^2}(a-b)$ die Höhe ſey, welche der Geſchwindigkeit des durch MN laufenden Waſſers zugehört. Wenn man demnach jene Höhe mit A, dieſe mit K bezeichnet, ſo hat man in allen Fällen $p = A - K$. Eben dieſen Ausdruck findet Dan. Bernoulli nach ſeiner Methode in der Hydrodynam. Sect. XII. §. 10.

216 §.

Wenn $a - x = \frac{n^2}{z^2}(a-b)$, alſo $z = \frac{n\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(a-x)}}$ iſt, ſo leidet die Röhre gar keinen Druck. Die Querſchnitte der Röhre müſſen ſich alſo in ſolcher Abſicht gegen einander umgekehrt verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den Höhen des darüber ſtehenden Waſſers. Wenn demnach das Waſſer durch eine im horizontalen Boden eines Gefäſſes befindliche

Oef-

Oefnuug ausläuft, ſo wird der hervorſtrömende Waſſerſtrahl von ſelbſt dieſe Geſtalt annehmen, welche eine mit der Oefnung im Boden zuſammenhängende verticale Röhre haben müſte, wenn ſie keinen Druck leiden ſollte. Daß der hervorſtrömende Strahl ſich nach unten verengert, iſt eine bekannte Erfahrung, und die eben angeführte Gleichung beſtimmt das Geſetz, nach welchem die Querſchnitte deſſelben abnehmen, ſo lange die Waſſertheilchen noch an einander hängen, und ſich nicht in Tropfen zertheilen.

Wäre $z = \frac{n\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(a-x-k)}}$, ſo erhielte man $p = k$ und der Druck wäre durchgängig für alle Querſchnitte von einerley Größe, wenn k eine beſtändige Größe iſt. Jedoch iſt eigentlich p die Höhe der drückenden Waſſerſäule, und wenn der Querſchnitt z ein Kreis, ſein Halbmeſſer $= r$ iſt, ſo iſt der Druck auf den Umfang dieſes Kreiſes $= 2\pi rp$. Dieſer Druck iſt demnach dem Product rp proportional, oder dem Product $p\sqrt{z}$, weil ſich r wie $\sqrt{z}$ verhält. Iſt alſo $\left(a - x - \frac{n^2}{z^2}(a-b)\right)\sqrt{z} = ff$, ſo daß ff eine beſtändige Größe iſt, ſo iſt die Gefahr, daß die Röhre zerſpringe, für die ganze Röhre einerley.

Die Röhre aber habe eine Geſtalt, welche ſie wolle, ſo iſt der Druck für jeden Querſchnitt dieſer Röhre $= a - x - \frac{n^2}{z^2} a$, wenn a die Höhe der obern Waſſerfläche über die untere Oefnung, und x die Höhe des gegebenen Querſchnitts der Röhre über

eben

eben die untere Oefnung bedeutet. Wenn alſo die Röhre cylindriſch und $z = n$ iſt, wie EPQF in der 35 F., ſo wird $p = -x$. Demnach wäre der Druck auf alle Stellen der Röhre negativ. Eben daſſelbe würde ſtatt finden, wenn die Röhre coniſch wäre, und ſich nach unten erweiterte, weil nun allemahl $z < n$, alſo

$\frac{n}{z}a > a - x$ wäre, nur daß allemahl in der untern

Oefnung, wo $x = 0$, und $z = n$ wird, der Druck verſchwindet, wie erfordert wird. Verengert ſich die coniſche Röhre nach unten, ſo iſt der Druck poſitiv,

ſo lange $a - x > \frac{n^2}{z^2}a$, folglich ſo lange $z > \frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}}$

iſt, er verſchwindet, wenn $z = \frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}}$, und

wird negativ, wenn $z < \frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}}$ wird.

217 §.

Um richtig zu beurtheilen, was es eigentlich ſagen wolle, wenn der Druck negativ wird, muß man folgendes erwegen. Jeder Querſchnitt MN leidet 35
eigentlich nur alsdenn einen Druck, wenn die unmit- Fig.
telbar vorhergehende Schichte mit geringerer Geſchwindigkeit fortgeht, als die zunächſt hinter ihr befindliche zu folgen ſtrebt, ſo daß jene von dieſer beſchleuniget wird. Wenn beyde gleich geſchwinde fortrücken, und nichts vorhanden iſt daß der hintern eine gröſſere Geſchwindigkeit mitzutheilen ſtrebt; ſo kann eine in die andere gar nicht würken, und eben deswegen kann gar kein Druck entſtehen. Dafern

endlich

endlich die vorhergehende ſchneller läuft, als die nachfolgende, ſo entſteht nicht allein gar kein Druck, ſondern es iſt zugleich offenbar, daß beyde Schichten, wenn ſie als feſte Körper zuſammenhiengen, mit einer gewiſſen Gewalt von einander getrieben würden. Die in der Röhre befindliche Columne Waſſer würde daher nicht aneinanderhängend bleiben, wenn nicht theils die geringe Kraft des Zuſammenhangs der Waſſertheilchen unter einander, theils eine andere gleich anzuführende Urſache ſie noch ſo lange zuſammenhielte, bis die Gewalt, ſo ſie auseinander treibt, dieſe Kraft des Zuſammenhanges überwindet, da dann die Trennung der Columne in mehrere Stücke würklich erfolgt. In der That ſetzen die bisherigen Rechnungen des 214 bis 217 §. voraus, daß ſich das Gefäß mit dem Waſſer im luftleeren Raum befinde (211 §.), denn der Druck der Atmoſphäre auf das Waſſer iſt dabey gar nicht in Betrachtung gezogen. Fiele dieſer Druck der Atmoſphäre weg, ſo würde in den Fällen, wo der Druck negativ wird, das durch die Röhre EPQF laufende Waſſer den ganzen innern Raum der Röhre nicht mehr ausfüllen, und die aus der bisherigen Theorie flieſſenden Formuln würden ſich nicht weiter anwenden laſſen.

218 §.

Will man aber dieſe Theorie auf ſolche Fälle anwenden, die in der Natur würklich ſtatt haben; ſo iſt das Waſſer allemahl zugleich dem Druck der Luft ausgeſetzt. Wenn demnach k die Höhe einer Waſſerſäule bedeutet, deren Gewicht dem Druck der Atmoſphäre gleich iſt; ſo muß man, um den Druck des Waſſers zu finden, eigentlich die Gleichung $p =$

$k + a - x - \frac{n^2}{z^2}(a - b)$ dem 211 §. gemäß brauchen, da dann in den zuletzt betrachteten Fällen $b = 0$ iſt. Setzt man Kürze halber $a - x - \frac{n^2}{z^2}(a - b) = \pi$, ſo hat man $p = k + \pi$, und π iſt der Druck des Waſſers im leeren Raum. Ob nun gleich in freyer Luft das Waſſer eigentlich mit der Gewalt $p = k + \pi$ gegen den Umfang der Röhre preſt; ſo drückt doch die umſtehende Luft zugleich eben dieſen Umfang der Röhre mit der Gewalt $= k$ einwärts gegen ihre Axe. Deswegen leidet der Umfang der Röhre auch in freyer Luft nur den Druck π, und wenn π negativ wird, ſo wird der Röhre Umfang mit der Gewalt $= \pi$ einwärts gepreſt. Denn die Atmoſphäre drückt gegen dieſen Umfang von auſſen mit der Gewalt k, und von innen drückt das Waſſer mit der Gewalt $k - \pi$ entgegen: alſo iſt der Druck von auſſen nach innen $= k - (k - \pi) = \pi$. Der innere Druck des Waſſers gegen die Röhre verſchwindet allererſt, wenn $\pi = k$ iſt.

219 §.

Im Umfang der Röhre EPQF ſey ſeitwärts eine kleine Oefnung bey C befindlich, und in derſelben ſtecke eine Röhre, die bey D wieder unterwärts gebogen iſt. Ihre untere Oefnung ſey G, und unter derſelben ſtelle man ein Gefäß HI ſo, daß ſich die Röhre bis nahe an den Boden dieſes Gefäſſes erſtrecke. Wenn man ſich nun durch C einen Querſchnitt der Röhre EPQF vorſtellt, und den zu dieſem Querſchnitt gehörigen Werth von $\pi = a - x - \frac{n^2}{z^2} a$ ſucht: 39 Fig.

ſucht; ſo richte man alles ſo ein, daß die Höhe DG $= \pi$ wird. Man verſchlieſſe die Oefnung PQ, und fülle das Gefäß AKEPQFLB mit Waſſer, ſo wird es durch die Röhre CDG in das Gefäß HI hineintreten. Wenn nun das Waſſer in HI ſo hoch geſtiegen iſt, daß G unter Waſſer ſteht, und man öfnet PQ, ſo läuft nicht allein das in dem obern Gefäß befindliche Waſſer aus PQ aus, ſondern es ſteigt zugleich das im Gefäß HI befindliche Waſſer in der Röhre GDC hinauf: und wenn der Waſſerverluſt in dem obern Gefäß durch neuen Zufluß beſtändig erſetzt wird, ſo läuft das durch die Röhre GDC hinaufſteigende Waſſer mit dem übrigen durch PQ aus, und dies dauret ſo lange fort, als G unter Waſſer ſteht. Daniel Bernoulli hat dieſen Verſuch angeſtellet, Hydrod. Sect. XII. Exper. 6. p. 276. Die Urſache dieſes Erfolgs iſt folgende. Das im Gefäß AKEPQFLB befindliche Waſſer drückt mit der Gewalt $k-\pi$ gegen die kleine Oefnung C. Wenn nun die Röhre CDG voll Waſſer, das Gefäß HI aber entweder gar nicht da, oder doch nicht mit Waſſer angefüllt iſt, ſo drückt die Atmoſphäre von auſſen gegen G mit der Gewalt $= k$; das Waſſer in der Röhre CDG aber drückt von innen gegen G einmahl mit der Gewalt $= \pi$, weil die Höhe DG $= \pi$ angenommen iſt, und überdem mit der Gewalt $= k-\pi$, weil das in der Röhre EPQF befindliche Waſſer ſo ſtark gegen C drückt. Folglich leidet die Oefnung G von innen einen Druck $= k-\pi+\pi = k$, der eben ſo groß iſt, als der Druck von auſſen; und deswegen wird das Waſſer in der Röhre CDG hängen bleiben. Dafern aber das Gefäß HI bis an M mit Waſſer angefüllt iſt, ſo leidet die Oefnung G von

auſſen

auſſen den Druck MG + k, von innnen aber den Druck k, und aus beyden entſteht ein Druck von auſſen nach innen = MG: deswegen muß es durch G in die Röhre hinein treten und in derſelben aufwärts ſteigen, und dies ſo lange als G unter Waſſer ſteht.

220 §.

Man kann demnach in dieſem Verſtande ſagen, daß der nach den bisherigen Regeln beſtimmte Druck des Waſſers gegen die Röhre ſich in ein Saugen verwandele, wenn der für dieſen Druck gefundene Ausdruck negativ wird. (M. ſ. *Dan. Bernoulli* Hydrodyn. Sect. XII. §. 11. p. 264. *Joh. Bernoulli* Hydraul. P. II. §. XIV. Op. T. IV. p. 445.) Mit dieſer Vorſtellung iſt Hr. d'Alembert nicht zufrieden. Er glaubt, wenn der Druck negativ werde, ſo zeige dies nur ſo viel an, daß die Schichte MN, welche ſonſt nach der Richtung der Bewe- 29
gung Ss gedruckt werde, nun einen Druck nach der Fig.
entgegengeſetzten Richtung sS leide, der Richtung der Bewegung entgegen. Er ſetzt hinzu, daß bey dem allen dennoch das in dieſer Schichte befindliche Waſſer gegen die Seiten der Röhre preſſe, weil es gleich viel, ob MN vorwärts oder rückwärts gepreſt werde. (Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides §. 149. p. 126.) Allein die bisherigen Lehren werden zur Genüge ergeben, daß dieſe Vorſtellung von der Sache unmöglich die richtige ſeyn könne. Man muß indeſſen bemerken, daß Hr. d'Alembert den Druck der Luft ganz beyſeit ſetze, und in ſofern hat er Recht, daß ſich alsdenn kein Saugen hier gedenken laſſe. Im luftleeren Raum würde der angeführte Bernoulliſche Verſuch nicht

von ſtatten gehen. Aber die Anmerkungen, welche Hr. d'Alembert ſelbſt a. a. O. im 99 §. 83 S. über die Fälle macht, wenn die flüßige Maſſe ſich zertheilen muß, hätten ihn leicht überzeugen können, daß dies eben grade die Fälle ſeyn, wo der Druck negativ wird und daß alsdenn im luftleereren Raum die Seiten der Röhre keineswegs nach auſſen gepreſt werden können. So viel iſt gewiß, daß die im Anfang dieſes §. angeführte Stelle in der Hydrodynamik des Hrn. Bernoulli deutlicher gefaßt wäre, wenn derſelbe zu den Worten: preſſio in ſuctionem mutatur, id eſt, latera canalis introrſum premuntur noch hinzugeſetzt hätte: *ab aëre ambiente.* Dies erinnert Hr. d'Alembert in ſeinen Opuſcules Mathematiques T. I. Memoire IV. §. XVIII. p. 161., woſelbſt er dasjenige zum Theil zurücknimmt, was er in der kurz vorhin angeführten Stelle des Traité des fluides gegen Hrn. Bernoulli erinnert hatte. Indeſſen ſcheint es, daß er nicht alles zurück nehme, und ſeine Vorſtellung der Sache in dem Fall, wenn der Druck negativ wird, alsdenn noch für die richtige halte, wenn der Druck der Atmoſphäre nicht in Betracht gezogen wird. Es hat ſeine Richtigkeit, daß das Waſſer in der Röhre GDC bey dem Bernoulliſchen Verſuch nicht ſteigen würde, wenn der Druck der Atmoſphäre wegfiele. Allein es iſt auch eben ſo gewiß, daß dennoch das Waſſer in der Röhre EFPQ nicht gegen den Umfang der Röhre drücken würde.

221 §.

29 Fig. Aus den bisherigen Lehren flieſſen demnach folgende Sätze. Das in der Röhre ACHMP fortflieſſende Waſſer wird ſo lange einen zuſammenhängenden

genden Waſſerkörper ausmachen, als die für p gefundene Gleichung einen poſitiven Werth giebt. Wenn aber in einer Stelle MN der Röhre dieſer Werth anfängt negativ zu werden, ſo wird das voranlaufende Waſſer ſich an dieſer Stelle von dem nachfolgenden trennen. Zwar wird der geringe Zuſammenhang der Waſſertheilchen unter einander verurſachen, daß der negative Werth von p allererſt einige Gröſſe haben muß, bevor die Trennung würklich erfolgt, wie denn auch hiezu noch der Umſtand kommt, daß ſich das Waſſer am Umfange der Röhre etwas anhängt. Allein dieſe Kraft des Zuſammenhanges iſt ſo geringe, daß ſie hier füglich beyſeit geſetzt werden kann. Wenn demnach die Röhre mit dem durchlaufenden Waſſer dem Druck der Luft ausgeſetzt iſt, ſo wird das Waſſer an derjenigen Stelle der Röhre anfangen ſich zu trennen, wo $\pi > k$ wird

Iſt alſo die mit dem Gefäß ABCD zuſammenhän- 35
gende verticale Röhre EPQF cylindriſch; ſo darf ſie Fig.
nicht über 32 Fuß lang ſeyn, dafern das Waſſer ein zuſammenhängender Körper bleiben ſoll. Uebertrift ihre Länge dieſes Maaß, ſo wird bey EF das voranlaufende Waſſer ſich von dem nachfolgenden abreiſſen, und in dieſer Gegend ein leerer Raum entſtehen. Es iſt nämlich der Druck bey EF $= k - x$, wo x die Länge der Röhre bedeutet. Im untern Theil der Röhre wird eine 32 Fuß hohe Waſſerſäule hängen bleiben, welche die Atmoſphäre trägt, und das Waſſer wird durch PQ nur in ſo ferne abflieſſen, in wie weit das durch EF nachlaufende Waſſer dieſe untere Säule immer wieder erhöhet, ſo daß man ſehr fehlen würde, wenn man nun die Geſchwindigkeit

des durch PQ laufenden Waſſers ſo berechnen wollte, als wenn ſie der Höhe der obern Fläche AB über der Oefnung PQ zugehörte. Eben dieſe Schlüſſe finden ihre Anwendung, wenn die cylindriſche Röhre gegen den Horizont ſchief, und die untere Oefnung mehr als 32 Fuß tief unter AB liegt.

39 Fig. Wäre EPQF eine coniſche Röhre die ſich nach unten erweiterte, ſo würde die Trennung des Waſſers bey EF ſchon erfolgen, wenn $\frac{n^2}{z^2} a - (a-x) >$ 32 Fuß wird. Iſt demnach PQ nochmahl ſo weit, als EF, ſo erfolgt dieſe Trennung ſchon, wenn $3a + x > 32$ Fuß wird. Deswegen darf x, welches hier die Länge der Röhre iſt, nicht über 8 Fuß ſeyn, weil $a > x$ iſt; und alſo $3a + x > 32$ Fuß ſeyn würde.

222 §.

29 Fig. Die bisherigen Lehren von der Stärke des Drucks, womit das durchlaufende Waſſer die Röhren preſt, ſind um ſo wichtiger, weil ſie zugleich ihre Anwendung finden, wenn man von der Feſtigkeit der Röhren urtheilen ſoll, die erforderlich iſt, damit ſie von der Gewalt des Waſſers nicht zerſprenget werden. Wenn man annimmt, daß die Röhren cylindriſch ſind, oder daß wenigſtens alle Querſchnitte MN, die auf der centriſchen Linie ſenkrecht ſtehen, Kreiſe ſind; ſo läſt ſich der geſammte Druck, den eine ſolche Röhre leidet, durch die Integralrechnung finden. Um hievon vorläufig einen Begriff zu geben, ſtelle man ſich
40 Fig. zuerſt einen ſolchen kreisförmigen Querſchnitt ABDE der Röhre allein vor, und ziehe in demſelben ein paar

Durch-

Durchmeſſer AD und BE, die ſich ſenkrecht ſchneiden. Es ſey ferner M ein beliebiger Punct im Umfang dieſes Kreiſes, ſo drückt das Waſſer nach der Richtung M*m* des verlängerten Halbmeſſers CM auf dieſen Punct, und eben ſo auf jeden andern mit gleicher Gewalt. Man zerlege die Kraft M*m* in zwo andre MR und MS mit AD und BE parallel; ſo ſtreben alle Kräfte MR im Umfange des Halbkreiſes BAE dieſen Halbkreis in B und E von dem andern BDE abzureiſſen. Wenn nun N ein Punct im Halbkreiſe BDE iſt, der gleichfalls nach der Richtung N*n* des verlängerten Halbmeſſers CN gedrückt wird; ſo kann man N*n* ebenfalls in zwo andre Kräfte nach N*r* und N*s* mit AD und BE parallel zerlegen, da dann alle Kräfte N*r* mit den Kräften MR im Gleichgewicht ſind. Eben ſo ſind alle Kräfte MS und N*s* mit den Kräften im Gleichgewicht, die den Halbkreis AED nach entgegengeſetzter Richtung drücken. Die mittlere Richtung aller Kräfte MR geht durch A, ſo wie die mittlere Richtung aller Kräfte N*r* durch D gehet. Wenn nun eine Kraft A*a* jenen zuſammen, D*d* aber dieſen zuſammen äquipollent iſt, ſo werden A*a* und D*d* im Gleichgewicht ſeyn, da dann jeder von den Puncten B oder E die Gewalt $\frac{1}{2}Aa = \frac{1}{2}Dd$ leidet. Die Kräfte MS, N*s*, und die ihnen entgegengeſetzten, am Halbkreiſe AED angebrachten Kräfte ſtreben dieſe Halbkreiſe bey A und D mit eben der Gewalt aus einander zu reiſſen.

223 §.

Am Gefäß *ABCD* befindet ſich unten die horizontale cylindriſche Röhre *DEFI*, die aber an ihrer Mündung *FE* verſchloſſen iſt. 28 Fig.

 Ge-

Gefäß und Röhre ſind mit Waſſer gefüllt bis an AB: man ſucht, wie ſtark das in dieſem Gefäß ſtillſtehende Waſſer die Röhre $DEFI$ auseinander drücke.

Aufl. Wenn KL $= a$ die Tiefe der Axe der Röhre unter der Oberfläche des Waſſers AB iſt, ſo iſt der Druck auf jedes Element der inwendigen Fläche der Röhre ſo groß, als das Gewicht einer Waſſerſäule, die das Element zur Grundfläche, und die Höhe $= a$ hat. Nun ſtelle man ſich zuerſt einen Querſchnitt MN der Röhre allein vor, der die Ge-
40 Fig. ſtalt des Kreiſes ABDE hat, und betrachte die Sache ſo, als wenn auf jedes Element $M\mu$ deſſelben eine Kraft Mm ſo ſtark drückte, als das Gewicht einer Waſſerſäule auf der Grundfläche $M\mu$ in der Höhe a. Man ſetze MP auf BE ſenkrecht, und zerlege wie im vor. §. die Kraft Mm in zwo andre MR und MS. Man ſetze CP $= x$, den Bogen EAM $= z$, den Halbmeſſer CM $= r$; ſo iſt $M\mu = dz$ und die Kraft $Mm = adz$. Es iſt aber $r : y = adz :$ MR, alſo MR $= \frac{aydz}{r}$. Die Summe aller Kräfte MR ſey $= P$, ſo hat man $dP = \frac{aydz}{r}$.

Es iſt ferner $z = EM = r(\pi - A\cos\frac{x}{r})$, alſo $dz =$

$$\frac{rdx}{\sqrt{(rr - xx)}} \text{ (332 §. Mechan.) } = \frac{rdx}{y},$$

folglich wird $dP = adx$.

Die Integration giebt $P = ax + C$. Da nun $P = 0$ ſeyn muß, wenn $x = -r$ iſt, ſo hat man $0 = C - ar$,

$= ar$, und $C = ar$, folglich $P = ar + ax$. Um nun dies Integral für den ganzen Bogen EAB zu haben, muß man $x = r$ ſetzen, ſo erhält man $P = 2ar = Aa$ (222 §.), und jeder von den Puncten B oder E leidet die Gewalt $\frac{1}{2}Aa = ar$. Nun ſey in der 3x Figur $MmnN$ ein Element von der Oberfläche der Röhre, und man ſetze $FM = s$, $Mm = ds$, ſo iſt der Druck auf die verſchwindende Zone $MNnm$, wie nun leicht erhellet, $= ards = d\Pi$, wenn Π den Druck auf den Theil FMNE der Röhre bedeutet. Demnach iſt $\Pi = ars$, und wenn die Länge der ganzen Röhre $= b$ geſetzt wird, ſo hat man die geſammte Gewalt, welche die Röhre auseinander zu reiſſen ſtrebet, $= abr$.

Ein Rechteck $DEed$, deſſen eine Seite DE der Länge der Röhre b, die andere Seite Ee dem Umfang der Grundfläche der Röhre gleich iſt, würde eben die Gewalt leiden, wenn de horizontal gehalten würde, übrigens aber das Rechteck vertical herab hienge, und DE ein Gewicht $\Pi = abr$ zöge. M. ſ. Dan. Bernoulli Hydrodyn. Sect. II. §. 18. p. 26. 41 Fig.

224 §.

Bey dieſer Auflöſung iſt noch der Umſtand zu bemerken, daß durch den Umfang der Grundfläche der Röhre, wenn man alles genau nehmen will, eigentlich ein Kreis verſtanden werden müſſe, deſſen Durchmeſſer die mittlere Arithmethiſche Proportionalgröſſe zwiſchen der inwendigen und auswendigen Weite der Röhre iſt, weil man ſich die geſammte Kraft des Zuſammenhangs in der Mitte der Dicke der Röhre vereiniget vorſtellen muß, etwa ſo, wie man ſie ſich im Mittelpunct der Feſtigkeit im 187 §. Stat. vereini-

get vorſtellet. Wenn eine ſonſt ziemlich weite Röhre nur eine Dicke von einigen wenigen Linien hat, wie gewöhnlich bey kupfernen Röhren, die wegen der ſtarken abſoluten Feſtigkeit dieſes Metalles dennoch hinlänglichen Widerſtand leiſten; ſo kann man die Dicke der Röhre aus der Acht laſſen, und den ganzen ſoliden Umfang der Röhre als eine geometriſche Cylinderfläche betrachten.

Wäre eine ſolche Cylinderfläche in eine ebene Fläche auseinander gelegt, wie das Rechteck DE*ed* iſt, ſo würde das Gewicht einer Waſſerſäule auf dieſer Grundfläche in der Höhe $= a$ ſo groß ſeyn, als der geſammte ſenkrechte Druck, womit das Waſſer die inwendige Fläche der Röhre preſt. Dieſer Druck wäre alſo $= 2\pi rab$ (467 §. Geom.) Weil nun $2\pi rab : abr = 2\pi : 1$; ſo verhält ſich dieſer geſammte ſenkrechte Druck zur Gewalt, welche die Röhre zu zerreiſſen ſtrebt, wie der Umfang eines Kreiſes zu ſeinen Halbmeſſer. Man ſehe Belidor Architect. Hydraul. III Buch 3 Cap. 946 §. Nach Belidors Bericht iſt Parent der erſte geweſen, der dieſe Gewalt, womit das Waſſer die Röhren zu zerſprengen ſtrebet, richtig zu berechnen gewieſen hat.

225 §.

Wenn die Mündung der Röhre zwar mit einem Deckel EF verſchloſſen iſt, in deſſen Mitte aber eine Oefnung GH befindlich, und dieſe kleiner, als die übrige Weite der Röhre iſt, wodurch das Waſſer ausſtrömt, da indeß der Waſſerverluſt oben beſtändig erſetzt wird; ſo läſt ſich die Gewalt des Waſſers, die Röhre zu zerreiſſen, eben ſo berechnen. Die Röhre leidet nämlich einen eben ſo groſſen Druck,

als wenn das Waſſer im Gefäß in der Höhe $= a - \frac{n^2}{m^2} a$ ruhig ſtünde (214 §.), wo $MN = m$, und $GH = n$ iſt: deswegen leidet die Röhre die Gewalt $= \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right) abr$. Wäre alſo z. E. $n = \frac{1}{2} m$, ſo wäre dieſe Gewalt $= \frac{3}{4} abr$. Demnach kömmt es nur darauf an, daß man die abſolute Feſtigkeit derjenigen Materie kenne, woraus eine Röhre verfertiget werden ſoll, wenn man in einem vorkommenden Fall unterſuchen will, wie dick die Röhre ſeyn müſſe, damit ſie der Gewalt des Waſſers ſattſam widerſtehen könne.

Will man in einem vorkommenden Fall die nöthige Rechnung darüber anſtellen, ſo muß man folgendes erwegen. Wird die Röhre mit einer Ebene durch ihre Axe geſchnitten, ſo iſt die Durchſchnittsfigur mit dem körperlichen Umfang der Röhre ein Rechteck, wovon die eine Seite die Länge der Röhre, die andre Seite aber ihre Dicke abgiebt. Eben dieſes Rechteck würde die Ebene des Bruchs ſeyn, wenn die Gewalt des Waſſers die Röhre zerſprengte. Demnach verhalten ſich die Feſtigkeiten ſolcher Röhren, die aus einerley Materie beſtehen, wie dieſe Rechtecke (180 §. St.)

226 §.

Die Feſtigkeit der Maſſe, woraus eine horizontal liegende Röhre verfertiget werden ſoll, iſt gegeben, nebſt ihrer Weite und der Höhe des Waſſers, deſſen Druck ſie auszuhalten hat; man ſucht wie dick ſie ſeyn müſ-

ſe, damit ſie dieſem Druck ſattſam widerſtehen könne.

Aufl. Die Materie der Röhre ſey ſo feſte, daß ein Priſma, deſſen Querſchnitt $= ff$ iſt, höchſtens das Gewicht P tragen könne. Die Höhe des auf die Röhre drückenden Waſſers ſey $= a$, die Länge der Röhre $= b$, ihre halbe Weite $= r$, die geſuchte Dicke $= c$, und ihre Feſtigkeit ſey dem Gewicht Π gleich, ſo findet man Π aus der Proportion $ff : bc = P : \Pi$, alſo $\Pi = \frac{bc}{ff} P$. Aber die Gewalt, womit das Waſſer die Röhre zu zerreiſſen ſtrebt, iſt $= \gamma abr$, wenn γ das Gewicht eines Cubic-Fuſſes Waſſer iſt. Alſo darf Π nicht kleiner, als γabr ſeyn. Setzt man beyde Ausdrücke einander gleich, ſo erhält man $\frac{bc}{ff} P = \gamma abr$, und daraus folgt $c = \frac{\gamma}{P} affr$. Kleiner darf alſo die Dicke der Röhre nicht ſeyn, dafern ſie nicht zerreiſſen ſoll.

Es ſoll z. E. die Röhre aus engliſchen Bley verfertiget werden, deſſen eigene Schwere $= 11{,}3333$ iſt, und deſſen Feſtigkeit Muſchenbroeck ſo groß befunden hat, daß ein Parallelepipedum von $\frac{17}{100}$ Rheinl. Zoll im Quadrat von 25 Pfund zerriſſen worden (184 §. St.) Sie ſoll 1 Fuß weit ſeyn, und 100 Fuß tief unter der Oberfläche des darauf drückenden Waſſers liegen: die Frage iſt, wie dick ſie ſeyn müſſe. Man ſetze $a = 100$ Fuß, $r = \frac{1}{2}$ Fuß, $f = \frac{17}{100} \cdot \frac{1}{12}$ Fuß, $P = 25$ Pfund, und nehme $\gamma = 64$ Pfund; ſo wird $affr = \frac{1445}{1440000}$ Fuß $= 1{,}445$ Linien, und $c = \frac{64}{25} \times 1{,}445 = 3{,}7$ Lin. Kleiner

darf

darf alſo die Dicke nicht genommen werden, und wenn man ſie 6 Linien dick macht, ſo wird ſie zulänglich widerſtehen, weil alsdenn ihre Feſtigkeit ſich zur Gewalt, welche ſie zu zerreiſſen ſtrebt, wie 60:37 verhält, alſo jene beynahe nochmahl ſo groß als dieſe iſt.

227 §.

Das Verhältniß der Dicke ungleich weiter Röhren, bey verſchiedener Höhe des auf ſie drückenden Waſſers, muß alſo aus den Verhältniſſen ihrer Weite und der Höhen des darauf drückenden Waſſers, zuſammengeſetzt ſeyn, dafern ſie aus einerley Materie beſtehen. Denn in dieſer Vorausſetzung iſt der Factor $\frac{\gamma}{p} ff$ für beyde einerley, und ihre Dicke muß dem Product ar proportional ſeyn. Bey einerley Druck des Waſſers alſo muß ſich ihre Dicke wie ihre Weite verhalten, und bey einerley Weite muß ihre Dicke der Höhe des darauf drückenden Waſſers proportional ſeyn. Wenn man alſo aus der Erfahrung weiß, wie dick eine Röhre von bekannter Weite geweſen iſt, die den Druck des Waſſers bey einer bekannten Höhe deſſelben, ohne zu zerreiſſen, ausgehalten hat, ſo kann man nach der Regel Detri die Dicke einer Röhre von eben der Materie finden, die bey einer andern Höhe des Waſſers, und einer andern Weite erfordert wird.

Weiß man z. E., eine bleyerne Röhre, die 1 Fuß weit, und 6 Linien dick iſt, hat Stärke genug, den Druck des Waſſers bey 100 Fuß Höhe auszuhalten, und man will wiſſen, wie dick ſie ſeyn müſſe, wenn

ſie

ſie nur $\frac{3}{4}$ Fuß weit ſeyn, und den Druck des Waſſers bey 80 Fuß Höhe aushalten ſoll; ſo ſchließt man 100 F. × 1 : 80 × $\frac{3}{4}$ = 6 Linien zur geſuchten Dicke, die alsdenn von 3,6 Linien befunden wird.

228 §.

42 Fig. Das Gefäß *ABCD* hängt am Boden mit der gegen den Horizont ſchief liegenden cylindriſchen Röhre *DEFG* zuſammen, und alles iſt bis an *AB* voll Waſſer. Die untere Mündung *EF* der Röhre iſt verſchloſſen, ſo daß das Waſſer ruhig ſteht: man ſucht die Gewalt, womit das Waſſer die Röhre zu zerreiſſen ſtrebt.

Aufl. Die Röhre ſey gegen den Horizont unter dem Winkel $DMH = DEK = \alpha$ geneigt, der Halbmeſſer ihrer innern Querſchnitte $= r$, ihre Länge $= b$, die Höhe des Waſſers über die untere Mündung der Röhre $BK = a$. Wenn nun MN ein unbeſtimmter Querſchnitt, und $DM = x$ iſt, ſo iſt $CH = x \sin\alpha$, $CK = b \sin\alpha$, alſo $KH = (b - x) \sin\alpha$, und $BH = BK - KH = a - (b - x) \sin\alpha$. Daher leidet die Röhre auf das Element M*mn*N die Gewalt $= (a - (b - x) \sin\alpha) rdx$ (223 §.). Wenn alſo die Gewalt, welche das Stück DMNG der Röhre leidet, $= \Pi$ geſetzt wird, ſo iſt $d\Pi = r(a - b \sin\alpha) dx + rxdx \sin\alpha$, folglich giebt die Integration $\Pi = r(a - b \sin\alpha) x + \frac{1}{2} r . xx \sin\alpha$, und es wird keine beſtändige Gröſſe zugeſetzt, weil Π und x zugleich verſchwinden müſſen. Setzt man nun $x = b$, ſo wird der Druck für die ganze Röhre $= rb(a - b \sin\alpha) + \frac{1}{2} rbb \sin\alpha = abr - \frac{1}{2} rbb \sin\alpha . = (a - \frac{1}{2} b \sin\alpha) br.$

Wenn

Wenn die Röhre horizontal liegt, alſo $\sin\alpha = 0$ iſt, ſo hat man $\Pi = abr$, wie im 223 §. Wenn aber die Röhre vertical ſteht, alſo $\sin\alpha = 1$ iſt, ſo wird $\Pi = (a - \frac{1}{2}b)\, br$.

Dafern die Röhre allein voll Waſſer iſt, ſo wird $a = b \sin\alpha$, und folglich $\Pi = \frac{1}{2}bbr \sin\alpha$, da dann $\Pi = \frac{1}{2}bbr$ wird, wenn die Röhre vertical ſteht. In dem letzten Fall iſt alſo die geſammte Gewalt eben ſo groß, als wenn die Röhre horizontal läge, und die Höhe des darauf drückenden Waſſers halb ſo groß, als ihre Länge wäre, da dann in dem Fall, wenn die Röhre ſchief liegt, das Product aus der halben Länge der Röhre in den Sinus des Neigungs-Winkels gegen den Horizont für die Höhe des darauf drückenden Waſſers angenommen werden muß.

Ueberhaupt aber iſt die geſammte Gewalt auf die Röhre eben ſo groß, als wenn ſie horizontal wäre, und das Waſſer in der Höhe $a - \frac{1}{2}b \sin\alpha$ darauf drückte.

229 §.

Dieſer Druck iſt aber nicht auf die ganze Röhre gleichförmig vertheilt, wie in dem Fall, wenn ſie horizontal liegt. Wäre dies, ſo dürfte die verticale Röhre nur halb ſo ſtark gemacht werden, als in dem Fall, wenn die Röhre horizontal liegt, und alles übrige einerley iſt. Allein der Druck nimmt gegen die untere Mündung der Röhre immer zu, und wird daſelbſt eben ſo ſtark, als er bey einer horizontalen Röhre ſeyn würde, die ſo tief unter Waſſer läge, als jene Röhre hoch iſt. Deswegen muß die verticale Röhre unten wenigſtens eben ſo ſtark gemacht werden, als die horizontale. Es ſey z. E. die verticale

43 Fig. Röhre DEFG 100 Fuß hoch, und man ſtelle ſich ganz unten ein Stück EMNF von der Höhe eines Fuſſes vor; ſo iſt die Gewalt, welche dieſes Stück leidet, $= r(100 - \frac{1}{2})$, weil hier $b = 1$ iſt. Und dieſe iſt eben ſo groß, als wenn das unterſte 1 Fuß lange Stück EMNF horizontal wäre, und $99\frac{1}{2}$ Fuß tief unter der höchſten Waſſerfläche läge. Dies iſt die Urſache, weswegen die nöthige Dicke der Röhren allemahl nach den Regeln des 226 und 227 §. berechnet werden kann. Wenn das Waſſer in einer Röhre ſehr hoch ſteigen ſoll, und man die Röhre ſelbſt aus mehrern über einander ſtehenden Theilen oder ſo genannten Aufſatz-Röhren zuſammen ſetzt, ſo muß man die erforderliche Dicke für jede dieſer verſchiedenen Aufſatz-Röhren beſonders ſuchen. Es würde ein unnöthiger Aufwand ſeyn, wenn man die höhern Aufſatz-Röhren eben ſo dick, als die untern, machen wollte.

230 §.

Weil das Holz nach der Länge ſeiner Fibern nur eine ſehr geringe Feſtigkeit hat; ſo ſind hölzerne Röhren in ſolchen Fällen am wenigſten brauchbar, wenn ſie einen ſtarken Druck des Waſſers auszuhalten haben. Deswegen werden in ſolchen Fällen bleyerne, auch wohl kupferne Röhren gebraucht. Die practiſchen Schriftſteller kommen in ihren Vorſchriften nicht überein, wie dick die Röhren ſeyn müſſen, damit ſie einmahl der Gewalt des Waſſers ſattſam widerſtehen, auf der andern Seite aber durch eine überflüßige Dicke auch kein unnöthiger Aufwand gemacht werde. Ihre Vorſchriften gründen ſich auf Verſuche, die in beſondern Fällen angeſtellt ſind,

woraus hiernächſt nach dem 227 §. auf andre Fälle geſchloſſen wird. Weil aber die Verſuche wegen der verſchiedenen Güte derjenigen Metalle, womit die Prüfung angeſtellt wird, nicht einerley Reſultat geben, wenn gleich die Metalle übrigens von einerley Art ſind; ſo kann es nicht anders ſeyn, als daß die Regeln, welche man darauf gründet, ebenfalls verſchiedene Reſultate geben. Nach dem Belidor in der Architectura Hydraulica im III B. III Cap. 947 §. muß eine bleyerne Röhre, die 1 Fuß weit und 60 Fuß hoch iſt, 6 Linien, eine kupferne eben ſo weite und hohe Röhre aber 2 Linien dick ſeyn, wenn ſie den Druck des Waſſers, womit ſie angefüllet iſt, ausſtehen ſoll. Vermöge der im 226 §. angeſtellten Rechnung aber würde die bleyerne Röhre bey 6 Linien Dicke, wenn ſie auch 100 Fuß hoch wäre, noch immer ſtark genug ſeyn, den Druck des Waſſers auszuhalten. Was die kupferne Röhre betrift, ſo iſt zu bemerken, daß Belidor kein reines Kupfer, ſondern ein vermiſchtes Metall, *Potain* genannt, verſtehe, welches ſchwächer als Kupfer, und vermöge der angegebenen Regel, nur dreymahl ſtärker als Bley iſt. Es iſt aber nach allen ſonſtigen Beobachtungen das Kupfer zum allerwenigſten zehnmahl feſter, als Bley, deswegen könnte eine Dicke von $\frac{3}{5}$ Linie ſtatt der angegebenen 2 Linien bey einer aus reinem Kupfer verfertigten Röhre gewiß genügen. Das Metall, welches die Franzoſen Potain nennen, wird aus Kupfer, Bley, Zinn und Gallmey durch die Vermiſchung gemacht.

231 §.

Nach den beſten Beobachtungen aber hat das Kupfer eine noch gröſſere Feſtigkeit. Ein kupfernes

Pa-

Parallelepipedum $\frac{17}{100}$ Zoll ins Gevierte trug 573 bis 638 Pfund bevor es zerriß, wie Muſchenbroeck beobachtet hat (184 §. Stat.) Alſo iſt das Kupfer 23 bis 25 mahl feſter als Bley, weil ein bleyernes Parallelepipedum, das eben die Abmeſſungen hatte, von 25 Pfund zerriſſen ward. Daniel Bernoulli ſtellte den Verſuch mit einem cylindriſchen kupfernen Drath an, der $\frac{2}{11}$ Pariſ. Linien dick war: er ward von 18 Nürnberger Pfunden zerriſſen. Ein runder Faden von einer ganzen Linie Dicke hätte alſo bis auf $\frac{121}{4} \times 18$ Pf., d. i. $544\frac{1}{2}$ Pf. getragen, bevor er zerriſſen wäre, und ein Parallelepipedum 1 Linie ins Gevierte hätte $\frac{1000}{785} \times 544\frac{1}{2}$ Pf., d. i. 693 Pf. getragen. Hieraus folgt, daß eine aus eben der Art Kupfer verfertigte, einen Fuß weite und $\frac{2}{11}$ Lin. dicke Röhre eine Höhe Waſſer bis auf 518 Fuß hätte ertragen können, bis ſie geborſten wäre. Man darf nämlich nur die Gleichung des 219 §. $c = \frac{\gamma}{P} affr$ umkehren, ſo giebt ſich $a = \frac{c \,.\, P}{ffr \,.\, \gamma}$, $= 518$ Fuß, wenn man $c = \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{144}$ Fuß, $f = \frac{1}{144}$ Fuß, $r = \frac{1}{2}$ Fuß, $P = 693$ Pfund, und $\gamma = 70$ Pfund ſetzt.

Ueber die Feſtigkeit des Bleyes machte Daniel Bernoulli folgenden Verſuch. Eine ſehr dünne rechteckigte bleyerne Platte $\frac{4}{5}$ Linien breit, und $\frac{1}{131}$ Lin. dick, ward von $3\frac{1}{2}$ Unzen zerriſſen. Die Ebene des Bruchs war alſo $\frac{5}{4} \times \frac{1}{131} = \frac{5}{524}$ Quadr. Lin. ſo daß ein Parallelepipedum von 1 Linie ins Gevierte durch $\frac{524}{5} \times \frac{7}{32} = 23$ Pfund zerriſſen wäre. Aus dieſen Verſuchen würde folgen, daß das Kupfer 30

mahl

mahl feſter als Bley ſeyn. Man ſ. Dan. Bernoulli Hydrod. Sect. II. pag. 28. Exp. ad §. 18. und nach eben dieſen Verſuchen wären beyde Metalle noch beträchtlich feſter, als nach den vorhin angeführten Muſſchenbröckſchen Verſuchen. Auf die letzteren kann man ſich indeſſen deswegen am ſicherſten verlaſſen, weil ein kleiner Fehler bey ſo geringer Dicke, als die von Bernoulli geprüften Stücke gehabt haben, zuviel Einfluß hat, wenn daraus die Dicke ſtärkerer Stücke berechnet wird.

232 §.

Dafern das Waſſer in der bisher betrachteten 42 Fig.
Röhre nicht ſtill ſtehet, ſondern durch die Oefnung PQ ausläuft, da indeſſen der Waſſer-Verluſt oberwärts beſtändig erſetzt wird; ſo läßt ſich die Stärke des Drucks gegen die Röhre aus eben den Gründen beurtheilen. Iſt jeder Querſchnitt der Röhre $= m$, die Oefnung PQ $= n$, ſo iſt der geſammte Druck auf die Röhre

$$= \left(a - \tfrac{1}{2}b \sin\alpha - \frac{n^2}{m^2}(a - \tfrac{1}{2}b \sin\alpha)\right) br.$$

Aber dieſer Druck iſt auf die Röhre nicht gleichförmig vertheilt, und wenn man ſich ein Stück der Röhre allein vorſtellet, ſo iſt der Druck auf daſſelbe deſto gröſſer, je tiefer es liegt, deswegen berechnet man die nöthige Dicke der Röhre eben ſo, als wenn ſie horizontal wäre, und den Druck des Waſſers in der Höhe $= \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right) a$ zu tragen hätte.

233 §.

29 Fig. Wenn alle Querſchnitte *MN* der Röhre *ACHMP* Kreiſe ſind, und das durch *PQ* auslaufende Waſſer oberwärts beſtändig erſetzt wird, die Gewalt zu finden, womit das Waſſer die Röhre zu zerſprengen ſtrebet: vorausgeſetzt, daß die Bewegung des auslaufenden Waſſers ſchon gleichförmig ſey.

Aufl. Es ſey MN*nm* eine verſchwindende Zone der innern Fläche der Röhre, und des Kreiſes MN Halbmeſſer $= r$, ſo iſt r veränderlich, wenn die Weite der Röhre veränderlich iſt. Wenn nun M*m* $= dy$ iſt, ſo wird die Oberfläche der verſchwindenden Zone $= 2\pi r dy$, alſo der Druck auf dieſer Zone

$$= 2\pi \left(a - x - \frac{n^2}{z^2}(a-b)\right) rdy,$$

und die Gewalt, welche die Röhre leidet,

$$= \left(a - x - \frac{n^2}{z^2}(a-b)\right) rdy.$$

Wenn nun r und y als Functionen von x gegeben ſind, ſo findet man die Gewalt, welche die ganze Röhre leidet, durch die Integralrechnung.

Wenn die Materie der Röhre ſo feſte iſt, daß ein Parallelepipedum, deſſen Querſchnitt $= ff$, das Gewicht P tragen kann, und man ſetzt die Dicke der Zone MN*nm* $= c$, ſo iſt ihre Feſtigkeit $= \frac{cdy}{ff}$ P.

Wenn alſo das Gewicht eines Cubicfuſſes Waſſer $= \gamma$ geſetzt wird, ſo erhält man die Gleichung

$(a - x$

$$\left(a - x - \frac{n^2}{z^2}(a-b)\right) r\gamma = \frac{c}{ff} P,$$ woraus

$$c = \frac{rff\gamma}{P}\left(a - x - \frac{n^2}{z^2}(a-b)\right)$$ folgt.

Verſteht man durch a die Höhe der obern Oeffnung über die untere, und durch x die Höhe des Waſſers über MN, ſo muß man a ſtatt $a - b$, und x ſtatt $a - x$ ſchreiben. Dies giebt

$$c = \frac{rff\gamma}{P}\left(x - \frac{n^2 a}{z^2}\right).$$ Schreibt

man y ſtatt $\frac{z}{n}$, (der vorige Werth von y wird nicht mehr gebraucht,) ſo hat man

$$c = \frac{rff\gamma}{P}\left(x - \frac{a}{yy}\right).$$ Nun iſt $z = \pi rr$, alſo $r = \sqrt{\frac{z}{\pi}} = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\, y$, folglich

$$c = \frac{ff\gamma\sqrt{n}}{P\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{a}{yy}\right)\sqrt{y}.$$

Demnach muß die Dicke c des Canals dem Product $\left(x - \frac{a}{yy}\right)\sqrt{y}$ proportional ſeyn, und wenn dies Product von beſtändiger Gröſſe iſt, ſo kann die Röhre durchaus einerley Dicke haben, und die Gefahr zu zerreiſſen iſt durchgängig einerley. Setzt man alſo $\left(x - \frac{a}{yy}\right)\sqrt{y} = b$, ſo zeigt

dieſe Gleichung, wie y von x abhången můſſe, damit die Gewalt, welche die Rőhre leidet, durchgångig einerley ſey. Es folgt aus dieſer Gleichung $(xyy - a)\sqrt{y} = byy$, alſo $(xyy - a)^2 = b^2 y^3$, und dieſe Gleichung ſteigt auf die vierte Ordnung.

Dafern aber die Rőhre durchgångig gleich weit, alſo $z = m$ eine beſtåndige Grőſſe iſt, ſo muß c dem Factor $\left(x - \frac{n^2}{m^2} a\right)$ proportional ſeyn, dafern die Rőhre der Gewalt des Waſſers allenthalben gleich ſtark widerſtehen ſoll.

Der XV. Abſchnitt.

Von der Bewegung des Waſſers in Rőhren von unbeſtimmter Långe, bevor es auslåuft.

234 §.

36 Fig. Es bleiben alle gegebene Stůcke wie im 191 §, nur iſt die Rőhre $ACHMP$ von unbeſtimmter Långe, ſo daß das Waſſer bey P noch nicht auslåuft: man ſucht die Geſchwindigkeit des Waſſers nebſt dem Druck auf die Rőhre, nachdem die obere Flåche AB einen gegebenen Weg $g\gamma = r$ zurůckgelegt hat.

Aufl. Im Anfange der Bewegung ſey die obere Flåche in AB, die untere in ab. Binnen der Zeit aber, da AB in CD kommt, růcke ab nach PQ, ſo wird fG von γg ſo abhången, daß der kőrperliche

Raum

Raum $PabQ = CABD$ iſt. Setzt man demnach $fG = w$, ſo iſt w eine Function von r. Es ſey überdem $PQ = \omega$, der Winkel $QGO = \zeta$, und $EG = u$, ſo ſind alle dieſe Gröſſen ebenfalls veränderlich, und hängen von w ab. Wenn nun in der Fundamental-Gleichung

$$p = C - x + \frac{m^2 d\upsilon \sin\eta^2}{ydr \sin\psi} \int \frac{ds}{z \sin\varphi} - \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{z^2 \sin\varphi^2}$$

(191 §.) das Integral $\int \frac{ds}{z \sin\varphi}$ ſo genommen wird, daß es für $x = u$ verſchwindet, ſo iſt zugleich $z = \omega$, $\varphi = \zeta$ und $p = k$, d. i. der Höhe einer Waſſerſäule auf der Grundfläche PQ, deren Gewicht ſo groß iſt, als der Druck gegen PQ; alſo dem Druck der Atmoſphäre, wenn PQ ſonſt keinem Druck ausgeſetzt iſt. Dies giebt

$$C = k + u + \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{\omega^2 \sin\zeta^2},$$

alſo

$$p = k - x + u - \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{z^2 \sin\varphi^2} + \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{\omega^2 \sin\zeta^2}$$

$$+ \frac{m^2 d\upsilon \sin\eta^2}{ydr \sin\psi} \int \frac{ds}{z \sin\varphi}.$$

Soll nun

I) Das Gefäß beſtändig voll bleiben, ſo iſt $p = \Pi$, wenn $x = a$, $z = h$, und $\varphi = \beta$ iſt. Dies giebt

 $\Pi =$

$$\Pi = k - a + u - \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{h^2 \sin\beta^2} + \frac{m^2 \upsilon \sin\eta^2}{\omega^2 \sin\zeta^2}$$

$$+ \frac{m^2 d\upsilon \sin\eta^2}{ydr \sin\psi} \int \frac{ds}{z \sin\varphi},$$

oder

$$m^2 \upsilon \sin\eta^2 \left(\frac{1}{\omega^2 \sin\zeta^2} - \frac{1}{h^2 \sin\beta^2} \right)$$

$$+ \frac{m^2 d\upsilon \sin\eta^2}{ydr \sin\psi} \int \frac{ds}{z \sin\varphi} = a - u + \Pi - k.$$

Weil ferner $\omega d\omega \sin\zeta = ydr \sin\psi$, und $m^2 \upsilon \sin\eta^2 = \omega^2 q \sin\zeta^2$, wenn $\sqrt{q}$ die Geſchwindigkeit der untern Fläche PQ bezeichnet, ſo erhält man

$$q - \frac{\omega^2 q \sin\zeta^2}{h^2 \sin\beta^2} + \frac{d.(\omega^2 q \sin\zeta^2)}{\omega d\omega \sin\zeta} \int \frac{ds}{z \sin\varphi}$$

$$= a - u + \Pi - k.$$

Soll aber

II) kein neues Waſſer oben zufließen, ſo iſt $p = \Pi$, wenn $x = a - gV$, $z = y$, und $\varphi = \psi$ iſt. Man kann aber auch x ſtatt $a - gV$ behalten, nur muß man alsdenn die Höhe FV der Oberfläche CD über den unterſten Punct K der centriſchen Linie durch x verſtehen: ſo iſt nur erforderlich, daß man in der letzten Gleichung x ſtatt a, y ſtatt h, und $\sin\psi$ ſtatt $\sin\beta$ ſetze. Auf ſolche Art erhält man

$$q - \frac{\omega^2 q \sin\zeta^2}{y^2 \sin\psi^2} + \frac{d.(\omega^2 q \sin\zeta^2)}{\omega d\omega \sin\zeta} \int \frac{ds}{z \sin\varphi}$$

$$= x - u + \Pi - k.$$

Durch

Durch s wird das unbeſtimmte Stück der centriſchen Linie fKS verſtanden, und es iſt $\int \frac{ds}{z \sin \phi} = 0$, wenn $s = -f$G iſt.

235 §.

Wenn man vorausſetzen kann, daß alle Querſchnitte MN auf der centriſchen Linie ſenkrecht ſind, ſo ſind alle die Winkel ϕ, ψ, ζ, u. ſ. f. $= 90°$, und ihre Sinus $= 1$. Alſo erhält man im erſten Fall des beſtändig zuflieſſenden Waſſers

$$q - \frac{\omega^2 q}{h^2} + \frac{\omega dq + 2q d\omega}{dw} \int \frac{ds}{z} = a - u + \Pi - k;$$

im zweyten Fall aber

$$q - \frac{\omega^2 q}{y^2} + \frac{\omega dq + 2q d\omega}{dw} \int \frac{ds}{z} = x - u + \Pi - k.$$

Dafern endlich derjenige Theil der Röhre, der ſich über ab hinaus nach PQ erſtreckt, cylindriſch, alſo ω conſtant iſt, ſo wird $d\omega = 0$, und man erhält für den Fall des beſtändig zuflieſſenden Waſſers

$$q - \frac{\omega^2 q}{h^2} + \frac{\omega dq}{dw} \int \frac{ds}{z} = a - u + \Pi - k;$$

für den zweyten Fall aber wird

$$q - \frac{\omega^2 q}{y^2} + \frac{\omega dq}{dw} \int \frac{ds}{z} = x - u + \Pi - k.$$

In Fällen, wo kein äuſſerer Druck auf AB oder CD und PQ vorhanden iſt, und der Druck der Atmoſphäre beyſeit geſetzt werden kann, wie im 12 §., hat man $\Pi - k = 0$. Dieſe Vorausſetzung werde ich bey den folgenden Aufgaben annehmen.

236 §.

33 Fig. Das cylindriſche oder priſmatiſche Gefäß *ABEO* iſt mit einer graden cylindriſchen Röhre *OPQR* verbunden, ſo daß das Waſſer durch die Oefnung *OR* aus dem Gefäß in die Röhre treten kann. Man nehme an, das Waſſer habe anfangs bis an *ab* geſtanden, ehe es in Bewegung kam, es habe aber nun den Weg $cG = w$ durchlaufen. Die Frage iſt, wie groß jetzt die Geſchwindigkeit der vordern Fläche *PQ* ſey, dafern oben in *AB* beſtändig neues Waſſer zuflieſſet.

Aufl. Man muß die Gleichung

$$q - \frac{\omega^2 q}{h^2} + \frac{\omega dq}{dw} \int \frac{ds}{z} = a - u \text{ (235 §.)}$$

brauchen, da dann a die Höhe des Gefäſſes, oder eigentlich die Höhe AK, bedeutet, und ω beſtändig $= m$ iſt. Setzt man nun $Kc = b$, $cG = w$, den Winkel $LKG = \eta$, ſo iſt $u = KL = (b + w) \cos\eta$. Um das Integral $\int \frac{ds}{z}$ zu finden, ſuche man es zuerſt für die Röhre PQRO, da dann die unbeſtimmte Linie s von c angerechnet werden muß. Weil nun $z = m$ iſt, ſo wird $\int \frac{ds}{z} = C + \frac{s}{m}$. Dies

Inte-

Integral muß $= 0$ ſeyn, wenn $s = -w$ iſt, alſo wird $C = \frac{w}{m}$, und $\int \frac{ds}{z} = \frac{s+w}{m}$, da dann $s = b$ geſetzt werden muß, um es für die ganze Röhre zu haben. Für ſolche s, die gröſſer als b ſind, wird $\int \frac{ds}{z} = \frac{s}{h} + C$, und es muß dies Integral $= \frac{b+w}{m}$ ſeyn, wenn $s = b$ iſt. Dies giebt $C = \frac{b+w}{m} - \frac{b}{h}$, alſo $\int \frac{ds}{z} = \frac{b+w}{m} + \frac{s-b}{h}$, da dann $s = b + a$ geſetzt werden muß, um dies Integral für das ganze Gefäß zu haben, und man erhält $\int \frac{ds}{z} = \frac{a}{h} + \frac{b+w}{m}$. Man ſetze nun die Werthe von $\int \frac{ds}{z}$, und u in die obige Gleichung, ſo wird

$$\frac{h^2 - m^2}{h^2} q + \frac{mdq}{dw} \cdot \left(\frac{b+w}{m} + \frac{a}{h} \right) = a - (b+w) \cos\eta;$$

oder

$$\frac{h^2 - m^2}{h^2} q + \frac{bdq}{dw} + \frac{wdq}{dw} + \frac{madq}{hdw} = a - (b+w) \cos\eta;$$

oder

$$(h^2 - m^2) qdw + (hhb + hhw + hma) dq = (a - (b+w) \cos\eta) hhdw.$$

Wenn die Röhre horizontal, alſo $\cos\eta = 0$ iſt, ſo giebt ſich hieraus eben die Gleichung, welche Joh. Bernoulli vermittelſt ſeiner Methode findet. M. ſ. Joh. Bernoulli Hydraul. P. I. §. XIII. Oper. T. IV. pag. 407.

Man drücke nun die gefundene Gleichung ſo aus

$$\left(1 - \frac{m^2}{h^2}\right) q\,dw + \left(b + w + \frac{ma}{h}\right) dq = (a - (b+w)\cos\eta)\,dw,$$

und ſetze $b + w + \frac{ma}{h} = z$, alſo $w = z - b - \frac{ma}{h}$, ſo iſt $dw = dz$, und man erhält

$$z\,dq + \left(1 - \frac{m^2}{h^2}\right) q\,dz = a\,dz - \left(z - \frac{ma}{h}\right) dz \cos\eta.$$

Man ſetze ferner $1 - \frac{m^2}{h^2} = k$, und multiplicire die Gleichung mit z^{k-1}, ſo wird

$$z^k\,dq + k z^{k-1} q\,dz = a z^{k-1}\,dz + \frac{ma}{h} z^{k-1}\,dz \cos\eta$$

$- z^k\,dz\cos\eta$, und die Integration giebt

$$z^k q = \left(a + \frac{ma\cos\eta}{h}\right) \frac{z^k}{h} - \frac{z^{k+1}\cos\eta}{k+1} + C.$$

Weil nun $q = 0$ iſt, wenn $w = 0$, alſo $z = b + \frac{ma}{h}$ iſt; ſo ſetze man Kürze halber $b + \frac{ma}{h} = A$, und

und es wird

$$C = \frac{A^{k+1} \cos\eta}{k+1} - \frac{ah + ma\cos\eta}{hk} \cdot A^k,$$

folglich $z^k q = \frac{ah + ma\cos\eta}{hk}\left(z^k - A^k\right)$

$+ \frac{\cos\eta}{k+1}\left(A^{k+1} - z^{k+1}\right)$, und

$$q = \frac{ah + ma\cos\eta}{hk}\left(1 - \left(\frac{A}{z}\right)^k\right)$$

$$+ \frac{A\cos\eta}{k+1}\left(\left(\frac{A}{z}\right)^k - \frac{z}{A}\right).$$

Wenn die Röhre OPQR horizontal liegt, ſo iſt $\cos\eta = 0$, und man erhält

$q = \frac{a}{k}\left(1 - \left(\frac{A}{z}\right)^k\right)$. Weil nun $\frac{a}{k} = \frac{ah^2}{h^2 - m^2}$, und $\frac{A}{z} = \frac{hb + ma}{hb + ma + hw}$, ſo wird

$$q = \frac{ah^2}{h^2 - m^2}\left(1 - \left(\frac{hb + ma}{hb + ma + hw}\right)^{\frac{h^2 - m^2}{h^2}}\right).$$

M. ſ. Oper. Joh. Bernoulli T. IV. p. 409. Hydr. P. I. §. XV.

237 §.

33 Fig. Alle übrige gegebene Stücke bleiben, wie im vor. §., nur wird angenommen, daß in AB kein neues Waſſer zufließe: man ſucht die Geſchwindigkeit der untern Fläche PQ, nachdem ſie aus ab in PQ gerückt iſt.

Aufl. Die letzte Gleichung des 235 §., welche hier ihre Anwendung findet, war folgende:

$$\frac{y^2 - m^2}{y^2} q + \frac{mdq}{dw} - \int \frac{ds}{z} = x - u,$$

und es bleibt $u = (b+w)\cos\eta$, ſo wie

$$\int \frac{ds}{z} = \frac{b+w}{m} + \frac{s-b}{h};$$

aber in dieſem Integral muß man $s = b + a - r$ ſetzen, ſo daß $r = G\gamma$ iſt. Da nun $h \times r = m \times w$, alſo $r = \frac{mw}{h}$ iſt, ſo ſetze man dieſen Werth ſtatt r, und es wird

$$\int \frac{ds}{z} = \frac{b+w}{m} + \frac{a}{h} - \frac{mw}{h^2}.$$

Ueberdem iſt $x = a - r = a - \frac{mw}{h}$, und $y = h$. Dieſe Werthe in obige Gleichung geſetzt, geben

$$\frac{h^2 - m^2}{h^2} q + \frac{(b+w)dq}{dw} + \frac{(ahm - m^2 w)dq}{h^2 dw} = a - \frac{mw}{h} - (b+w)\cos\eta,$$

und

und daraus folgt

$$(h^2 - m^2) q\,dw + (h^2 b + ahm + (h^2 - m^2) w)\, dq = (ah^2 - mhw - (b+w) h^2 \,\text{coſ}\,\eta)\, dw.$$

Um hievon das Integral zu finden, drücke man dieſe Gleichung ſo aus:

$$\left(1 - \frac{m^2}{h^2}\right) q\,dw + \left(b + \frac{ma}{h} + \left(1 - \frac{m^2}{h^2}\right) w\right) dq$$

$$= \left(a - \frac{mw}{h} - (b + w)\,\text{coſ}\,\eta\right) dw,$$

ſetze $1 - \dfrac{m^2}{h^2} = k$, und $\dfrac{b}{k} + \dfrac{ma}{hk} + w = z$,

folglich $dw = dz$. Dies giebt

$$kq\,dz + kz\,dq = \left(a - \frac{mw}{h} - (b + w)\,\text{coſ}\,\eta\right) dw$$

oder

$$k(q\,dz + z\,dq) = (a - b\,\text{coſ}\,\eta)\, dw - \left(\frac{m}{h} + \text{coſ}\,\eta\right) w\,dw,$$

und man erhält durch die Integration

$$kqz = C + (a - b\,\text{coſ}\,\eta)\, w - \tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{h} + \text{coſ}\,\eta\right) w^2.$$

Nun wird vorausgeſetzt, daß $q = 0$ ſey, wenn $w = 0$ iſt; daher wird $C = 0$, und man erhält

$$q = \frac{(a - b\,\text{coſ}\,\eta) w}{kz} - \frac{m + h\,\text{coſ}\,\eta}{2hkz} w^2,$$ da

dann $kz = \dfrac{bh + ma + hkw}{h}$ iſt, alſo

$q =$

$$q = \frac{(ah - bh\cos\eta)w}{bh + ma + hkw} - \frac{(m + h\cos\eta)w^2}{2(bh + ma + hkw}.$$

In dem Fall, da die Röhre OPQR horizontal liegt, iſt $\cos\eta = 0$ alſo $q = \frac{ahw - \frac{1}{2}mw^2}{bh + ma + hkw}$.

Weil nun $k = \frac{h^2 - m^2}{h^2}$, ſo wird

$q = \frac{ahhw - \frac{1}{2}hmw^2}{bhh + hma + (hh - mm)w}$. Man ſehe Joh. Bernoulli Opera l. c.

238 §.

44 Fig. Die grade cylindriſche Röhre AFEB ſey gegen den Horizont unter einem gegebenen Winkel geneigt, und ſie hänge mit der Röhre EFRO, die eine willkührliche Geſtalt hat, zuſammen. Mit der letztern ſey wiederum die cylindriſche Röhre OPQR verbunden. Das Stück BEO*ab*RFA dieſer zuſammengeſetzten Röhre iſt anfangs voll Waſſer, und weil AB höher als *ab* ſteht, ſinkt AB in CD, da dann zugleich *ab* in PQ ſteigt. Im gegenwärtigen Augenblick, da *ab* in *PQ* kömmt, hat *ab* den Weg $aP = w$ zurück gelegt, und die Geſchwindigkeit dieſer Fläche iſt jetzt $= \sqrt{q}$: man ſucht eine Gleichung zwiſchen w und q.

Aufl. Bey dieſer Aufgabe findet wiederum die Gleichung

$$\frac{y^2 - m^2}{y^2} q + \frac{mdq}{dw} \int \frac{ds}{z} = x - u$$

ihre Anwendung. Nun ſey die Weite der Röhre ABEF

ABEF $= h$, ſo iſt $y = h$, und man muß durch m die Weite der Röhre OPQR verſtehen. Ferner ſey IL eine Horizontallinie durch den unterſten Punct K der centriſchen Linie, und man ziehe BI und PL vertical, aber DN, EH, OM, aK horizontal. Man ſetze EB $= a$, O$a = \alpha$, BD $= r$, aP $= w$, HI $= f$, LM $= g$, die Winkel BEH $= \eta$, POM $= \vartheta$; ſo iſt IN $= x = f + (a - r) \sin\eta$, und PL $= g + (\alpha + w) \sin\vartheta = u$. Uebrigens kommt es nur darauf an, das Integral $\int \frac{ds}{z}$ zu finden. Es iſt aber für die Röhre OPQR jeder Querſchnitt $z = m$, alſo $\int \frac{ds}{z} = \frac{\alpha + w}{m}$, und für die Röhre EFCD wird eben dies Integral $= \frac{a - r}{h}$. Man laſſe alſo K eben dies Integral für die unterſte Röhre OKE bedeuten, ſo wird das geſammte Integral von PQ bis CD genommen $= \frac{\alpha + w}{m} + \frac{a - r}{h} + K$, da dann K unveränderlich bleibt, ſo lange CD nicht unter EF ſinkt. Weil nun $hr = mw$, ſo iſt $w = \frac{hr}{m}$, und es wird

$$\int \frac{ds}{z} = \frac{\alpha}{m} + \frac{hr}{m^2} + \frac{a - r}{h} + K.$$

Nun bedeutet $\sqrt{q}$ die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Röhre OPQR; wenn demnach $\sqrt{v}$ die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Röhre AEFB iſt, ſo hat man $q = \frac{h^2}{m^2} v$. Schreibt man demnach in

der

der oben im Anfang dieſer Aufloͤſung angefuͤhrten Gleichung dieſen Werth ſtatt q, imgleichen h ſtatt y und hdr ſtatt mdw; ſo wird

$$\frac{h^2 - m^2}{m^2}\upsilon + \frac{d\upsilon}{hdr}\int\frac{h^2 ds}{z} = x - u,$$ alſo

$$\frac{h^2 - m^2}{m^2}h\upsilon + \frac{d\upsilon}{dr}\int\frac{h^2 ds}{z} = h(x - u).$$

Es wird aber

$$\int\frac{h^2 ds}{z} = \frac{\alpha h^2}{m} + \frac{h^3 r}{m^2} + (a - r)h + N,$$

wenn man N ſtatt $h^2 K$ ſchreibt, oder auch

$$\int\frac{h^2 ds}{z} = \frac{\alpha h^2}{m} + ah + N + \left(\frac{h^2}{m^2} - 1\right)hr,$$

und ſtatt deſſen ſchreibe man $A + Br$. Ferner wird

$$x - u = f - g + (a - r)\sin\eta - \left(\alpha + \frac{hr}{m}\right)\sin\vartheta,$$

alſo $h(x - u) = (f - g + a\sin\eta - \alpha\sin\vartheta)h$

$- \left(\sin\eta + \frac{h}{m}\sin\vartheta\right)hr$, und ſtatt deſſen ſetze man $E - Fr$. Dies giebt die Gleichung

$$B\upsilon + \frac{d\upsilon}{dr}\,.\,(A + Br) = E - Fr,$$ oder

$$Ad\upsilon + B(\upsilon dr + rd\upsilon) = Edr - Frdr.$$

Die Integration giebt

$$A\upsilon + B\upsilon r = Er - \tfrac{1}{2}Frr,$$

und dies Integral iſt ſchon vollſtaͤndig, weil υ und r

zu-

zugleich verſchwinden müſſen. Aus dieſer Gleichung folgt

$$v = \frac{Er - \frac{1}{2}Frr}{A + Br};$$

wenn man alſo die angenommenen Werthe ſtatt A, B, E und F wieder herſtellt, ſo erhält man $v =$

$$\frac{(f - g + a\sin\eta - \alpha\sin\vartheta)hr - \frac{1}{2}(\sin\eta + \frac{h}{m}\sin\vartheta)hrr}{\frac{\alpha h^2}{m} + ah + N + \left(\frac{h^2}{m^2} - 1\right)hr.}$$

239 §.

Dieſe Gleichung kommt mit derjenigen völlig überein, die Dan. Bernoulli vermittelſt ſeiner Methode findet, Hydrodyn. Sect. VI. §. 7. pag. 117. Nach ſeiner Bezeichnung iſt b, β, g, γ, φ, x, das, was hier $a\sin\eta$, $\alpha\sin\vartheta$, h, m, g, r, nach der Ordnung heiſt. Wenn man alſo jene Bezeichnung braucht, folglich auch $\frac{b}{a}$ ſtatt $\sin\eta$, und $\frac{\beta}{\alpha}$ ſtatt $\sin\vartheta$ ſetzt, ſo erhält man $v =$

$$\frac{(f - \varphi + b - \beta)gx - \left(\frac{bg}{2a} + \frac{\beta gg}{2\alpha\gamma}\right)xx}{\frac{\alpha gg}{\gamma} + ag + N + \frac{g^3}{\gamma^2}x - gx}$$

wobey noch zu bemerken iſt, daß beym Bernoulli M × N das ſey, was hier N heiſt, wie aus dem 19 §. p. 121 a. a. O. erhellet.

Wenn man Kürze halber $f - g + a\sin\eta - \alpha\sin\vartheta = C$ ſetzt, und ſodann Zähler und Nenner des für v gefundenen Ausdrucks mit $2m^2$ multipliciret, ſo wird

$$v = \frac{2Chm^2r - (m^2\sin\eta + hm\sin\vartheta)hrr}{2\alpha h^2m + 2ahm^2 + 2m^2N + (h^2 - m^2)hr}.$$

240 §.

Die Oberfläche PQ wird nur einen beſtimmten Weg in der Röhre OPQR zurück legen, eben ſo wie AB ebenfalls in der andern Röhre nur einen beſtimmten Weg zurück legen wird. Wie weit ſich dieſe Bewegung erſtrecken könne, findet man, wenn $v = 0$ geſetzt wird. Dies giebt

$$2Cm - (m\sin\eta + h\sin\vartheta)r = 0,$$

und $r = \frac{2Cm}{m\sin\eta + h\sin\vartheta}$. Alſo wird

$w = \frac{hr}{m} = \frac{2Ch}{m\sin\eta + h\sin\vartheta}$, und dies iſt der Weg, um welchen PQ von ab nur fortrücken kann. Es folgt hieraus, daß dieſe Wege, wenn alles übrige einerley iſt, dieſelben bleiben, das untere Stück der Röhre EKO mag eine Geſtalt haben, welche man will, weil r und w durch N nicht beſtimmt werden. Es wird nämlich auch C nur durch $f - g$ beſtimmt.

Wenn beyde Röhren gleiche Weite haben, alſo $h = m$ iſt, ſo wird

$v = \frac{2Chr - (\sin\eta + \sin\vartheta)hrr}{2(a + \alpha)h + 2N}$, und $r =$

$$\frac{2C}{\sin\eta + \sin\vartheta} = w.$$

241 §.

241 §.

Weil im Anfang der Bewegung ebenfalls $v = 0$ iſt, ſo muß einmahl v am gröſten ſeyn. Um dieſen gröſten Werth von v zu finden, ſetze man in der Differentialgleichung des 231 §. $dv = 0$, ſo wird $v = \frac{E - Fr}{B}$. Dieſen Ausdruck ſetze man dem im 231 §. gefundenen Werth von v gleich, ſo erhält man

$$\frac{E - Fr}{B} = \frac{Er - \frac{1}{2}Frr}{A + Br}$$

alſo $(E - Fr)(A + Br) = (Er - \frac{1}{2}Frr)B$.

Daraus folgt

$$A.E - A.F.r - \tfrac{1}{2}B.F.rr = 0,$$

und $rr + \frac{2A}{B}r = \frac{2A.E}{B.F}$. Beyde Wurzeln hievon ſind

$$r = -\frac{A}{B} \pm \frac{\sqrt{(2A.B.E + A^2.F)}}{B\sqrt{F}},$$

oder $r = \frac{\pm\sqrt{(2ABE + A^2F)} - A\sqrt{F}}{B\sqrt{F}}$.

Die Urſache, warum hier zwey Werthe von r gefunden werden, iſt dieſe, weil die Fläche AB rückwärts gehen würde, wenn ab höher als AB ſtünde, und alſo zwey Fälle möglich ſind, da v den gröſten Werth haben kann. Steht nämlich ab höher als AB, ſo iſt $g > f$, und $\alpha \sin\vartheta > a \sin\vartheta$; alſo iſt in dieſem Fall E negativ, und $v = \frac{Er - \frac{1}{2}Frr}{A + Br}$ wird

wird ebenfalls negativ. Wenn alſo E poſitiv iſt, ſo muß der poſitive Werth von r genommen werden.

242 §.

Wenn beyde Röhren gleich weit ſind, alſo $h = m$ iſt, ſo wird $B = \frac{h^2 - m^2}{m^2} . h = 0$, und r wird aus der zuletzt gefundenen Gleichung nicht beſtimmt, weil Zähler und Nenner des Bruchs, welcher r ausdrückt, $= 0$ werden. Aber die Gleichung $A.E - A.F.r - \frac{1}{2}B.F.rr = 0$, giebt nun $E - Fr = 0$, alſo $r = \frac{E}{F} = \frac{C}{\sin\eta + \sin\vartheta}$. Demnach iſt in dieſem Fall die Geſchwindigkeit des Waſſers in beyden Röhren am gröſten, wenn es die Hälfte des ganzen Weges, den es durchlaufen kann, zurück gelegt hat (240 §.) Eben dies iſt jetzt grade der Fall, wenn das Waſſer in beyden Röhren gleich hoch ſteht. Die Gleichung $E = Fr$ giebt nämlich, wenn $h = m$ iſt, dieſe $f - g + a \sin\eta - \alpha \sin\vartheta = (\sin\eta + \sin\vartheta)r$, alſo $f + (a - r)\sin\eta = g + (\alpha + r)\sin\vartheta$. Aber $f + (a - r)\sin\eta$ iſt die Höhe des Waſſers in der Röhre ABEF, und $g + (\alpha + r)\sin\vartheta$ die Höhe des Waſſers in der Röhre OPQR über der Horizontallinie IL. Wenn demnach PQ am höchſten geſtiegen, und AB am tiefſten gefallen iſt; ſo ſteht PQ grade ſo hoch über AB, als anfangs AB über PQ ſtand.

243 §.

Wenn die Röhren ungleich weit ſind, ſo finden dieſe Sätze nicht weiter ihre völlige Anwendung.

Die

Die Geſchwindigkeit iſt nun nicht alsdenn die gröſte, wenn das Waſſer in jeder Röhre die Hälfte ſeines Weges zurück gelegt hat. Indeſſen behält doch der letzte Satz des vor. §. auch für ungleich weite Röhren ſeine Richtigkeit: und wenn das Waſſer in jeder Röhre die Hälfte ſeines Weges zurück gelegt hat; ſo ſteht es in beyden gleich hoch. Bey der angenommenen Vorausſetzung iſt nämlich die Höhe des Waſſers in der Röhre ABEF $= f + a \sin \eta - \frac{Cm \sin \eta}{m \sin \eta + h \sin \vartheta}$, und in der andern Röhre OPQR $= g + \alpha \sin \vartheta + \frac{Ch \sin \vartheta}{m \sin \eta + h \sin \vartheta}$. Der erſte Ausdruck vom letzten abgezogen giebt den Reſt $g + \alpha \sin \vartheta - (f + a \sin \eta) + C$, d. i. $- C + C = 0$. Alſo ſind beyde Höhen gleich. Das Waſſer würde demnach in allen Fällen, wenn ſonſt keine Hinderniſſe die Beweguug nach und nach hemmeten, in den zuſammenhängenden Röhren beſtändig zu ſchwanken fortfahren, auf eine ähnliche Art, wie ein aufgehangenes Pendul, hin und her ſchwankt. Wenn man annimmt, daß PQ jetzt ihren höchſten Stand erreicht habe, und man will wiſſen, wie weit dieſe Fläche wieder zurückfallen würde, ſo läſt ſich aus den obigen Formuln leicht ſchlieſſen, daß dieſe Fläche eben ſo weit zurückgehen müſſe, als ſie vorher vorwärts gegangen war.

244 §.

Man erwäge nämlich, daß OP $= \alpha + \frac{2Ch}{m \sin \eta + h \sin \vartheta}$ nun das ſey, was vorhin a war,

und $ED = a - \frac{2Cm}{m\sin\eta + h\sin\vartheta}$ das, was vorhin α hieß. Ferner heißt das nun g, was vorhin f hieß, und umgekehrt, und eben ſo verwechſelt ſich die Bedeutung der Buchſtaben η und ϑ. Wenn man alſo nun C' ſtatt des vorigen C ſchreibt, ſo wird $C' =$

$$g - f + \alpha\sin\vartheta + \frac{2Ch\sin\vartheta}{m\sin\eta + h\sin\vartheta} - a\sin\eta$$

$$+ \frac{2Cm\sin\eta}{m\sin\eta + h\sin\vartheta} = g - f + \alpha\sin\vartheta - a\sin\eta + 2C,$$

$= -C + 2C$, alſo $C' = C$. Verſteht man nunmehro durch r' den Weg, welchen PQ rückwärts zurücklegen wird, ſo muß man in dem für r gefundenen Ausdruck (240 §.) auſſer η und ϑ, auch noch m und h verwechſeln, ſo wird $r' = \frac{2C'h}{h\sin\vartheta + m\sin\eta}$. Aber eben ſo groß war vorhin w, weil $C' = C$ iſt. Demnach rückt PQ wieder bis ab zurück, und eben deswegen auch CD wieder bis AB, und daraus folgt, daß dieſe Bewegung des Waſſers mit der ſchwankenden Bewegung eines Penduls die gröſte Aehnlichkeit habe.

245 §.

In der Vorausſetzung, daß beyde Röhren gleich weit ſind, die Zeit zu finden, während der die Fläche *AB* einen gegebenen Weg zurück legt.

Aufl. Es iſt $dt = \frac{dr}{\sqrt{v}}$ (117 §. Mech.), und wenn beyde Röhren gleich weit ſind, ſo hat man $B = 0$, alſo

alſo $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{(2Er - Frr)}}{\sqrt{2A}}$, folglich wird

$$dt = \frac{dr\sqrt{2A}}{\sqrt{(2Er-Frr)}} = \frac{\sqrt{2A}}{\sqrt{E}} \cdot \frac{dr}{\sqrt{\left(2r - \frac{F}{E}rr\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2A}}{\sqrt{E}} \cdot \frac{dr\sqrt{\frac{F}{E}}}{\sqrt{\left(\frac{2Fr}{E} - \frac{F^2rr}{E^2}\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2A}}{\sqrt{F}} \cdot \frac{Fdr:E}{\sqrt{\left(\frac{2Fr}{E} - \frac{F^2rr}{E^2}\right)}}.$$

Demnach giebt die Integration

$t = \frac{\sqrt{2A}}{\sqrt{F}} \cdot A\int v\frac{Fr}{E}$, wo keine beſtändige Gröſſe zugeſetzt iſt, weil $t = 0$ ſeyn muß, wenn $r = 0$ iſt.

Verlangt man die Zeit, welche während eines ganzen Schwunges verfließt, ſo muß man $r = \frac{2E}{F}$ ſetzen. Dies giebt

$$t = \frac{\sqrt{2A}}{\sqrt{F}} \cdot A\int v \cdot 2 = \frac{\pi\sqrt{2A}}{\sqrt{F}},$$

wenn π den halben Umfang eines Kreiſes bedeutet, deſſen Halbmeſſer = 1 iſt. Stellt man die Werthe von A und F aus dem 238 §. wieder her, ſo erhält man $t = \pi\sqrt{\frac{2(a+\alpha)h + 2N}{(\sin\eta + \sin\vartheta)h}}$. Dieſer Ausdruck

hängt gar nicht von der anfänglichen Höhe der Oberfläche AB über *ab* ab. Es war dieſe Höhe $= f + a\sin\eta - (g + \alpha\sin\vartheta) = C$, und $E = C \cdot h$, alſo überhaupt $t = \frac{\sqrt{2A}}{\sqrt{F}} \cdot A\int v \cdot \frac{F.r}{C.h}$. Weil nun $r = \frac{2C.h}{F}$ geſetzt werden muß, um die Zeit eines ganzen Schwunges zu haben, ſo fällt C aus dem Ausdruck weg, und t wird von einerley Gröſſe gefunden, es mag AB anfangs mehr oder weniger über *ab* erhaben ſeyn. Jedoch wird, wie bisher, allemahl vorausgeſetzt, daß keine von beyden Oberflächen tiefer falle, als ſich die cylindriſchen Röhren erſtrecken.

246 §.

Die Länge eines einfachen Penduls zu finden, deſſen kleinſte Schwingungen mit den Schwingungen des Waſſers in der bisher betrachteten Röhre in gleichen Zeiten erfolgen.

Aufl. Die gefundene Zeit für einen ganzen Schwung des Waſſers iſt eigentlich $= \frac{\pi\sqrt{A}}{\sqrt{2\gamma F}}$, wenn γ die Beſchleunigung der Schwere bedeutet, die bisher $= \frac{1}{4}$ geſetzt iſt (117 §. Mech.): und die Oſcillationszeit eines einfachen Penduls, deſſen Länge $= l$ iſt, ward im 133 §. Mechan. $= \pi\sqrt{\frac{l}{2\gamma}}$ gefunden. Setzt man beyde Zeiten gleich, ſo wird $l = \frac{A}{F}$, alſo $l = \frac{(a+\alpha)h + N}{(\sin\eta + \sin\vartheta)h}$.

Es

Es hängt demnach dieſe Oſcillations-Zeit von der Geſtalt der untern Röhre EKO mit ab; und wenn die übrigen Umſtände einerley ſind, ſo erfolgen die Schwingungen deſto langſamer, je gröſſer $N = \int \frac{h^2 ds}{z}$ gefunden wird. Dafern dieſe Röhre cylindriſch, und eben ſo weit iſt, als die übrigen beyden Röhren; ſo findet man $N = h\lambda$, wenn λ ihre ganze Länge bedeutet. Demnach wird in dieſem Fall die Oſcillations-Zeit $= \frac{a + \alpha + \lambda}{\sin\eta + \sin\vartheta}$, da dann $a + \alpha + \lambda$ die ganze Länge des mit Waſſer gefüllten Theils der aus allen dreyen zuſammen geſetzten Röhre giebt. Wenn alſo die geſammte Länge $a + \lambda + \alpha = L$ geſetzt wird, ſo iſt die Oſcillations-Zeit $= \frac{L}{\sin\eta + \sin\vartheta}$ M. ſ. Joh. Bernoulli Theoremata ſelecta pro conſervatione virium vivarum demonſtranda &c. Theor. III. Comment. Petrop. T. II. p. 200. Oper. Jo. Bernoulli T. III. N. 137. pag. 125. Dafern beyde Schenkel vertical ſtehen, alſo $\sin\eta = \sin\vartheta = 1$ iſt, ſo wird die Oſcillations-Zeit $= \frac{1}{2}L$. Man ſ. *Newtoni* Princip. Phil. Nat. Mathem. Lib. II. Prop. XLIV.

247 §.

Wenn beyde Schenkel der gebogenen Röhre ungleich weit, und die Schwingungen ſehr klein ſind, die Oſcillations-Zeit zu finden.

Aufl. Es iſt überhaupt $v = \frac{Er - \frac{1}{2}Frr}{A + Br}$,

(238 §.) und $A + Br =$

$$\int \frac{h^2 ds}{z} = \frac{\alpha h^2}{m} + ah + N + \left(\frac{h^2}{m^2} - 1\right) hr.$$

Wenn alſo a, α und r ſehr klein angenommen werden, ſo iſt beynahe $A + Br = N$, und dies giebt

$$v = \frac{Er - \frac{1}{2}Frr}{N}, \text{ alſo erhält man}$$

$$v = \frac{2Chmr - (m \sin\eta + h \sin\vartheta)\, hrr}{2mN}.$$

Wenn man nun $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{(2Er - Frr)}}{\sqrt{2N}}$ ſetzt,

ſo wird $dt = \frac{dr\sqrt{2N}}{\sqrt{(2Er - Frr)}}$, und daraus folgt,

wie im 246 §., die Oſcillations-Zeit $= \frac{\pi\sqrt{2N}}{\sqrt{F}}$.

Demnach iſt die Länge eines einfachen Penduls, deſſen kleinſte Schwingungen eben ſo viele Zeit erfordern, $= \frac{N}{F} = \frac{mN}{(m \sin\eta + h \sin\vartheta) h}$.

Der

Der XVI. Abſchnitt.

Von den Bewegungen des Waſſers, die der Druck der Luft verurſacht.

248 §.

Eine gebogene Röhre ACB ſey durch die Seitenwand eines Gefäſſes DEF ſo durchgeführt, daß der eine Schenkel innerhalb, der andere auſſerhalb des Gefäſſes gegen den Horizont herab hängt. Gießt man alsdenn Waſſer in das Gefäß DEF, ſo wird daſſelbe auch in den Schenkel AC der Röhre bey A hinein treten, und in der Röhre mit dem Waſſer im Gefäß auf einerley Höhe ſteigen. Wenn nun CI ein Querſchnitt der Röhre an ihrer höchſten Stelle, und HL eine waagrechte Fläche durch dieſe höchſte Stelle der Röhre iſt; ſo wird kein Waſſer aus dem Gefäß auslaufen, ſo lange die höchſte Oberfläche deſſelben noch unter HL ſteht. Wenn aber dieſe Oberfläche bis an DF, alſo über HL, hinauf geſtiegen iſt, ſo wird das Waſſer durch den Querſchnitt CI, und ſo ferner durch den Schenkel CB der Röhre durchlaufen. Hiebey wird es auf die Länge der Schenkel AC und BC nicht ankommen, beyde mögen gleich oder ungleich lang, und der auswendige BC mag länger oder kürzer ſeyn, als der inwendige AC iſt. Es ſtehe ferner ein andres Gefäß MON dem vorigen zur Seite, und der zweyte Schenkel CB der gebogenen Röhre ſey in das zweyte Gefäß durch eine Seitenwand deſſelben geleitet. Man fülle beyde Gefäſſe 45 Fig.

auf

auf gleiche Höhe über die bey A und B befindlichen Oefnungen mit Waſſer an, ſo daß AG = BK iſt, wenn das Waſſer bis an DF und MN in den Gefäſſen reicht. Wäre nun die Röhre ACB auch voll Waſſer, die Oefnung B aber mit einer feſten Ebene, als einem Deckel verſchloſſen, ſo würde ſelbige einen gedoppelten Druck leiden. Das Waſſer in MON würde ſie aufwärts, das Waſſer in DEF aber unterwärts drücken. Es ſey die Fläche des bey B befindlichen Deckels = bb, und BK treffe die waagrechte Fläche DFmn in Q; ſo leidet die Ebene bey B wegen des im Gefäß DEF befindlichen Waſſers den Druck γbb . BQ nach unten; wegen des in MON befindlichen Waſſers aber den Druck γbb . BK aufwärts. Datern nun A und B in einer waagrechten Ebene liegen, ſo iſt BK = BQ, beyde Preſſungen ſind gleich, und wenn die feſte Ebene bey B nicht da wäre, ſo würde dennoch alles im Gleichgewicht bleiben. Liegt aber B tiefer als A, alſo unterhalb einer durch A gelegten waagrechten Ebene; ſo werden die in der Fläche der Oefnung B liegenden Waſſertheilchen, die man ſich nun ſtatt der feſten Ebene vorſtellen kann, ſtärker unterwärts, als aufwärts gepreſt, ſo daß ſie eigentlich einen Druck nach unten = γbb (BQ — BK) leiden. Wenn alſo BQ die durch A gelegte waagrechte Ebene in R trift, ſo iſt QR = AG = BK, alſo BQ — BK = BR, und der Druck nach unten = γbb . BR. Demnach wird das Waſſer aus dem Gefäß DEF in das Gefäß MON durch die Röhre ACB hinüber laufen, bis BK = BQ iſt, und folglich die Oberflächen des Waſſers in beyden Gefäſſen in einerley waagrechten Ebene liegen.

249 §.

Die Röhre ACB ſey mit Waſſer gefüllt, und befinde ſich in eben der Lage, wie ſie zuletzt betrachtet worden, in freyer Luft: ſo iſt es eben ſo viel, als wenn die beyden Schenkel AC und BC in vergleichen Gefäſſen, wie DEF und MON ſteckten, und dieſe Gefäſſe 32 Fuß hoch über A und B mit Waſſer gefüllt wären (29 §. Aerom.). Wenn alſo B niedriger als A liegt, ſo wird das Waſſer durch die Oefnung B heraus laufen: und wenn der kürzere Schenkel AC dieſer Röhre ACB in ein Gefäß DEF mit Waſſer, der längere BC aber in freyer Luft hängt, ſo wird bey A beſtändig neues Waſſer in die Röhre hinein treten, wenn es bey B ausläuft, ſo lange A unter Waſſer ſteht. Denn die Atmoſphäre drückt allemahl auf DF ſo ſtark, als wenn über dieſe Fläche noch eine 32 Fuß hohe Waſſerſäule ſtünde. Eben ſo ſtark drückt die Atmoſphäre auch gegen B aufwärts. Genau zu reden, iſt zwar der Druck gegen B ſchon ein wenig ſtärker, als gegen DF, allein der Unterſcheid iſt unbeträchtlich. Wenn alſo bb der Querſchnitt bey B iſt, ſo leidet dieſe Fläche aufwärts den Druck $\gamma \,.\, bb \times 32$ Fuß, und unterwärts den Druck γbb (32 Fuß + BQ). Deswegen iſt der eigentliche Druck unterwärts $= \gamma bb \,.\,$ BQ. 46 Fig.

250 §.

Eine ſolche gebogene Röhre heißt ein Heber. Man kann demnach vermittelſt des Hebers, wenn er einmahl gefüllt iſt, das Waſſer zum Steigen bringen. Jedoch wird in ſolcher Abſicht erfordert, daß die verticale Höhe GL nicht über 32 Fuß ſey, ſo wie auch 46 47 Fig.

auch AL nicht über 32 Fuß ſeyn muß, dafern alles Waſſer aus dem Gefäß DEF bis an A auslaufen ſoll. In eben dieſer Abſicht wird erfordert, daß B nicht höher liege, als die durch A waagrecht gelegte Ebene AH, wie in der 47 Fig. angenommen iſt. Es wird zwar auch in dieſem Fall das Waſſer, wenn der Heber einmahl damit gefüllt iſt, bey B auslaufen, jedoch nur ſo lange B unter der Oberfläche DF des Waſſers im Gefäß liegt. So bald DF bis in die durch B waagrechte Ebene *df* geſunken iſt, ſobald wird der Ausfluß aufhören. Dafern B in der Ebene AH liegt, ſo wird der Ausfluß zwar fortdauern, ſo lange A unter Waſſer ſteht: jedoch wird die Bewegung deſto langſamer, je tiefer DF geſunken iſt, und der Aufluß hört nun, wenn DF durch A geht, deswegen auf, weil der Druck, welcher bisher das Waſſer durch B getrieben hat, = o wird, der nun noch nicht = o ſeyn würde, wenn B unter AH läge. Eben daher unterſcheiden ſich beyde Fälle auch darin. Wenn A und B in einer Horizontfläche liegen, ſo hört die Bewegung des Waſſers auf, wenn DF bis in AH gefallen iſt, ohne daß ſich der Heber ausleert. Er bleibt vielmehr voll Waſſer, und wenn man aufs neue Waſſer in das Gefäß DEF gießt, ſo fängt der Heber aufs neue an, zu flieſſen. Dafern aber B unter AH liegt, ſo dringt die Luft mit dem letzten Waſſer zugleich in den Heber, ſobald DF bis in AH gefallen iſt, und das Waſſer läuft auch aus dem Heber heraus. Gießt man von neuen Waſſer in das Gefäß DEF, ſo fängt der Heber nicht von neuen an, zu flieſſen, bevor er von neuen mit Waſſer angefüllt iſt.

251 §.

251 §.

Dies letztere geſchicht nun bey kleinen Hebern gewöhnlich durchs Saugen. Man hängt den ledigen Heber in das Gefäß mit Waſſer DEF, ſo ſteigt das Waſſer ſchon von ſelbſt in den eingetauchten Schenkel AC ſo hoch hinein, als es im Gefäß ſtehet. Saugt man nun bey B mit dem Munde die Luft aus dem übrigen Theil des Hebers heraus, ſo treibt die Atmoſphäre das Waſſer höher hinauf und in den andern Schenkel hinein, da es denn bey B nach den vorhin vorgetragenen Geſetzen herausläuft. Wegen des Gebrauchs, wozu der Heber gewöhnlich dienen ſoll, iſt es nützlich, daß der äuſſere Schenkel BC länger ſey, als der eingetauchte AC, damit B niedriger als A liege. Denn bey dieſer Einrichtung des Hebers läuft das Waſſer ſchneller aus, da es im Gegentheil zuletzt ſehr langſam laufen würde, wenn B und A gleich hoch lägen. Indeſſen kann auch ein gleichſchenklichter Heber zuweilen zu einem beſondern Gebrauch dienen, weil man bey demſelben die Bequemlichkeit hat, daß er nicht ausläuft, und man der Mühe, ihn von neuen zu füllen, überhoben ſeyn kann, wenn das Gefäß DEF von neuen gefüllt wird. 46 Fig.

252 §.

Wenn der Heber gleich lange Schenkel hat, ſo heißt er auch der **Würtenbergiſche Heber**, und dieſen Namen hat er daher bekommen, weil ein Bürger zu Stutgard, **Johann Jordan**, zuerſt die Bemerkung gemacht hat, daß ein ſolcher Heber aus jeder Oefnung das Waſſer gebe, wenn man die andre in ein Gefäß mit Waſſer taucht. Der damalige

Herzogliche Leib-Medicus Salomon Reiſel machte im Jahr 1684 die erſte Nachricht davon bekannt, und gab die Sache, vermuthlich aus Mangel der Theorie, für etwas ganz beſonders aus. Allein bald nachher beſchrieb Dionyſius Papinus in den Transact. Anglic. 1685 einen ſolchen Heber, und Reiſel ſelbſt machte im J. 1690 die wahren Umſtände bekannt in der Abhandlung: Sipho Wirtembergicus per majora experimenta firmatus. Die gewöhnliche Regel beym Gebrauch der Heber war ſonſt dieſe geweſen: der eingetauchte Schenkel müſſe kürzer ſeyn, als derjenige, welcher das Waſſer geben ſolle. Allein die obigen Lehren ergeben, unter welchen Bedingungen dies erforderlich ſey. Dazu, daß der Heber Waſſer giebt, wird nur erfordert, daß die Oefnung des äuſſern Schenkels niedriger liege, als die Oberfläche des Waſſers im Gefäß ſtehet. Deswegen iſt es nichts beſonders, daß der gleichſchenklichte Heber aus beyden Oefnungen Waſſer giebt, da auch ſogar der ungleichſchenklichte aus dem kürzern Schenkel fließt, wenn der längere tief genug unter Waſſer ſteht. M. ſ. Muſſchenbröck Introd. ad Phil. Nat. T. II. §. MMXCVIII. p. 855.

253 §.

Die Geſtalt des Gefäſſes *DEF*, und des Hebers *ACB* iſt gegeben, nebſt der anfänglichen Höhe *AL* des Waſſers über die Oefnung *A* des Hebers, und der Tiefe *BH* der Oefnung *B* unter *A*: man ſucht die Geſchwindigkeit, womit das Waſſer aus der Oefnung *B* ausläuft, nachdem es im Gefäß um eine gegebene Tiefe *LG* geſunken iſt.

Aufl. Man kann den Theil DFKI des Gefäſſes als eine Röhre betrachten, die mit dem Heber ACB bey A zuſammenhängt, und alsdenn findet die Auflöſung des 160 §. ihre Anwendung. Man muß nemlich AG = x, DF = y, BH = $-b$ ſetzen, und durch s die ganze Länge BCAG der centriſchen Linie der aus Gefäß und Heber zuſammen geſetzten Röhre endlich auch durch z jeden unbeſtimmten Querſchnitt des Gefäſſes oder Hebers verſtehen. Wenn alsdenn die Fläche der untern Oefnung B = n, und die Geſchwindigkeit des auslaufenden Waſſers = $\sqrt{q}$ geſetzt wird; ſo hat man die Gleichung

$$dq\int\frac{n^2 ds}{z} - qyds + \frac{n^2 qds}{y} = -(b+x)\,yds.$$

Es wird hier b nämlich negativ, weil BH unter der Horizontallinie HI liegt. Das Integral $\int\frac{n^2 ds}{z}$ muß ſo genommen werden, daß es für $s = 0$ verſchwindet: und wenn die ganze Länge BCA des Hebers = λ iſt, ſo muß man nach der Integration $s = \lambda + x$ ſetzen, ſo hat man $x = s - \lambda$. Wenn nun in dieſer Vorausſetzung $\int\frac{n^2 ds}{z}$ = N wird, ſo hat man die Gleichung

$$Ndq - qyds + \frac{n^2 qds}{y} = -(b + s - \lambda)\,yds,$$

da dann N und y Functionen von s ſind, ſo daß durch die Integration eine Gleichung zwiſchen q und s gefunden wird. (M. ſ. Daniel Bernoulli Hydrod. Sect. V. §. 17. p. 106.)

Wenn die Querſchnitte des Gefäſſes zwiſchen DF und KI insgeſammt in Vergleichung mit der Oefnung B ſehr groß ſind, alſo allemahl y gegen n ſehr groß iſt, ſo wird beynahe $q = b + s - \lambda$, oder $q = b + x$. Alſo läuft in dieſem Fall das Waſſer aus dem Heber mit einer Geſchwindigkeit, die der Höhe BQ des Waſſers im Gefäß über die untere Oefnung des Hebers zugehört.

254 §.

Wenn das Gefäß DEF cylindriſch oder prismatiſch, und jeder Querſchnitt deſſelben DF $= y = m$ iſt, ſo hat man die Gleichung

$$Ndq - mqds + \frac{n^2 qds}{m} = -(b+s-\lambda)\, mds.$$

Wenn nun überdem der Heber coniſch, und die Oefnung A $= f$, ſo wie B $= n$ iſt, ſo wird

$$N = \frac{n^2 x}{m} + \frac{n^2\lambda}{\sqrt{fn}} = \frac{n^2(s-\lambda)}{m} + \frac{n^2\lambda}{\sqrt{fn}};$$

alſo $\frac{m^2}{n^2}N = m(s-\lambda) + \frac{m^2\lambda}{\sqrt{fn}}$. Man ſetze überdem $q = \frac{m^2}{n^2}v$, ſo iſt $\sqrt{v}$ die Geſchwindigkeit des Waſſers im Gefäß, und die Gleichung verwandelt ſich in folgende:

$$\left(s - \lambda + \frac{m\lambda}{\sqrt{fn}}\right)dv - \frac{m^2}{n^2}vds + vds = -(b+s-\lambda)\,ds.$$

Die Form dieſer Gleichung kommt mit derjenigen völlig überein, die im 175 §. integrirt iſt, und die Ver-

Vergleichung ergiebt, daß hier nur λ ſtatt des dortigen b zu ſetzen ſey, ſo wie man hier $-b$ ſtatt des dortigen $b \cos \eta$ ſchreiben muß. Setzt man demnach $s - \lambda + \frac{m\lambda}{\surd fn} = z$, alſo $s = \lambda + z - \frac{m\lambda}{\surd fn}$, und $1 - \frac{m^2}{n^2} = k$, ſo daß $A = a + \frac{m\lambda}{\surd fn}$ aus z wird, wenn man $s = \lambda + a$ ſchreibt, ſo erhält man $v =$

$$\frac{m\lambda - b\surd fn}{k\surd fn}\left(1 - \left(\frac{A}{z}\right)^k\right) + \frac{A}{k+1}\left(\left(\frac{A}{z}\right)^k - \frac{z}{A}\right).$$

Man wird demnach die übrigen aus dieſer Gleichung im 176. bis zum 180 §. geſchloſſenen Folgen auch leicht auf den gegenwärtigen Fall anwenden.

255 §.

Die Geſchwindigkeit zu finden, womit das Waſſer durch den Heber fließt, wenn das Gefäß *DEF* beſtändig voll bleibt.

Aufl. Wenn man wie im 183 §. durch $\surd v$ die Geſchwindigkeit des durch B laufenden Waſſers, durch x die Länge des ausgelaufenen Waſſer-Cylinders, und durch m den oberſten Querſchnitt des Gefäſſes DEF verſteht, ſo hat man

$$dx = \frac{N dv}{n(a+b) + \left(\frac{n^3}{m^2} - n\right)v},$$

$$\text{und } v = \frac{m^2(a+b)}{m^2 - n^2}\left(1 - e^{\frac{n^3 - m^2 n}{m^2 N}x}\right),$$

 wo

wo e die baſis der natürlichen Logarithmen iſt. Die beſtändige Geſchwindigkeit aber, der ſich $\sqrt{v}$ ſehr bald nähert, giebt die Gleichung $v = \frac{m^2 (a+b)}{m^2 - n^2}$, und daraus wird $v = a + b$, wenn m gegen n ſehr groß iſt.

Eine Art, wie es ſich bewerkſtelligen lieſſe, daß das Waſſer durch den Heber gleichförmig laufe, wäre dieſe, wenn der eine im Gefäß hängende Schenkel AC des Hebers durch ein kleines an demſelben befeſtigtes Brett oder hohles Gefäß durchgeführet würde. Weil dies Brett auf dem Waſſer ſchwimmet, und mit der obern Waſſerfläche ſinkt; ſo wird es die Oefnung A immer auf einerley Tiefe unter Waſſer erhalten, ſo lange bis A den Boden des Gefäſſes erreicht hat. M. ſ. *Wolfii* Elem. Hydraul. §. 70. Elem. Math. T. II. pag. 444. Leupold Theatr. Machin. Hydraul. T. I. Cap. I. §. 4. p. 3.

256 §.

48 Fig. Durch den Boden BC des Gefäſſes ABCD ſtecke eine zu beyden Seiten offene Röhre EF, und dieſe ſey mit einer andern etwas weitern Röhre GHI bedeckt, die ſonſt allenthalben verſchloſſen iſt, nur daß ſie ſeitwärts bey G unten am Boden des Gefäſſes eine Oefnung hat. Wenn man nun in das Gefäß ABCD Waſſer gießt, ſo ſteigt es zugleich in dem zwiſchen beyden Röhren befindlichen Zwiſchen-Raum eben ſo hoch, als im Gefäß ſelbſt, und die in dieſem Raum befindliche Luft findet durch die Röhre EF ihren freyen Ausgang. So lange nun die Oberfläche des Waſſers niedriger, als die Oefnung E ſteht, ſo lange

lange kann kein Waſſer auslaufen. Sobald ſich aber dieſe Waſſerfläche über E erhebt; ſobald wird es auch bey E in die Röhre EF hineintreten, und durch dieſelbe abflieſſen. Und weil hier alle dieſelben Urſachen wie beym gewöhnlichen Heber vorhanden ſind, ſo wird der Abfluß des Waſſers ſo lange fortdauren, bis das Gefäß ganz ausgeleert iſt. Beyde Röhren zuſammen machen einen Heber aus, wovon ein Schenkel in dem andern ſteckt. Ein auf dieſe Art eingerichtetes Gefäß heißt Diabetes. Man kann auch ſtatt der beyden in einander ſteckenden Röhren eine einzige, wie EF im Boden des Gefäſſes befeſtigen, die aber alsdenn nicht grade, ſondern wie ein gewöhnlicher Heber gebogen ſeyn muß, ſo daß der zweyte im Gefäß befindliche Schenkel beynahe den Boden erreicht, übrigens aber der ganze Heber nicht völlig ſo hoch als das Gefäß iſt. M. ſ. Wolffii Elem. Math. T. II. Hydraul. §. 72. p. 444.

257 §.

Weil der Druck der Luft auf die Oberfläche des 46
im Gefäß DEF befindlichen Waſſers die einzige Ur- Fig.
ſache von dem Fluß des Hebers iſt; und dieſer Druck keine Waſſer-Säule, die über 32 Fuß hoch iſt, tragen kann; ſo iſt der Gebrauch des Hebers im groſſen auf dieſe Höhe eingeſchränkt. Der höchſte Gipfel C des Hebers darf nicht über 32 Fuß hoch über die Waſſerfläche DF erhaben ſeyn, widrigenfalls wird der Heber kein Waſſer geben. Dieſer Satz findet bey allen übrigen flüßigen Maſſen nach dem Verhältniß ihrer eigenen Schwere ſeine Anwendung. So wird z. E. der Heber das Queckſilber nicht über 28 Zoll hoch heben. Dafern dieſe Höhe von 32

Fuß nicht überſchritten wird, ſo läßt ſich das Waſſer auch auf folgende Art zum Steigen bringen, ohne daß die beyden Schenkel des Hebers unmittelbar
50 Fig. zuſammen hängen. Die Steig=Röhre DE ſteht mit dem untern Ende D in dem offenen Gefäß AB, welches mit Waſſer gefüllt iſt, und eben dieſe Steigröhre iſt in das obere Gefäß FG bey E hinein geleitet. Dies obere Gefäß muß mit einem Deckel verſchloſſen, und alles ſo genau verwahrt ſeyn, daß von auſſen keine Luft hinein dringen kann. Etwa in eben der Höhe mit AB wird ein andres mit Waſſer gefülltes Gefäß KL angebracht, welches mit dem obern Gefäß FG vermittelſt der Röhre HI verbunden, übrigens aber verſchloſſen, und wie FG wider das Eindringen der äuſſern Luft ſorgfältig verwahrt iſt. Am Boden deſſelben iſt die mit einem Hahn O verſehene Röhre MN angebracht, der niedriger liegen muß, als die untere Oefnung D der Steig=Röhre. Sobald man den Hahn O öfnet, ſo läuft das in dem Gefäß KL befindliche Waſſer durch die Röhre MN ab: davon iſt der Erfolg dieſer, daß die in dem Gefäß FG und den Röhren DE, HI befindliche Luft ſich in einen gröſſern Raum, als vorher, ausbreitet. Daher bekömmt der Druck der Atmoſphäre auf die Oberfläche AC des Waſſers in dem offenen Gefäß AB das Uebergewicht über den Gegendruck der eingeſchloſſenen nunmehro verdünnten Luft, und eben deswegen muß das Waſſer in der Röhre DE hinauf ſteigen, und ſich endlich in das Gefäß FG durch die Oefnung bey E ergieſſen.

Falls der Behälter AB aus einer Quelle, oder auf andre Art beſtändigen Zufluß hat, ſo kann man zwiſchen AB und KL eine Röhre ST anbringen, die mit einem

einem Hahn P verſehen iſt, um ſie nach Gefallen zu verſchlieſſen. Wenn hiernächſt auch an FG eine mit einem Hahn Q verſehene Röhre angebracht iſt, ſo kann dadurch das gehobene Waſſer zum beliebigen Gebrauch abgeleitet werden. Wird P geöfnet, ſo tritt das Waſſer aus AB in KL, da dann Q zugleich geöfnet werden muß, damit ein Theil der eingeſchloſſenen Luft heraus trete. Nachdem KL angefüllt iſt, werden die Hähne P und Q verſchloſſen und O geöfnet, damit das Waſſer aus KL wieder ablaufe, aus AB aber durch DE hinauf ſteige.

258 §.

Dieſe Einrichtung heißt ein **unterbrochener Heber**, weil die Schenkel deſſelben nicht unmittelbar zuſammen hängen. Man ſiehet wohl, daß die Steigröhre DE aus eben der Urſache, wie beym zuſammenhängenden Heber, nicht über 32 Fuß hoch ſeyn müſſe, dafern ſich das hinauf ſteigende Waſſer würklich bey E ergieſſen ſoll. Bey gegenwärtiger Einrichtung iſt man in der That noch auf geringere Höhen eingeſchränkt, wie man daraus leicht abnehmen kann, weil das hinaufſteigende Waſſer oberwärts gar keinen Gegendruck leiden muß, wenn es die Höhe von etwa 32 Fuß würklich erreichen ſoll. Einen ſolchen Gegendruck leidet aber das Waſſer hier von der eingeſchloſſenen verdünnten Luft, deren Federkraft nur in dem umgekehrten Verhältniß des Raums, worin ſie ſich ausbreitet, vermindert wird. Geſetzt alſo, die eingeſchloſſene Luft werde nur in einen doppelt ſo groſſen Raum ausgebreitet, als derjenige iſt, den ſie im natürlichen Zuſtande einnimmt, ſo wird ihre Federkraft halb ſo ſtark bleiben, als ſie im na-

türlichen Zuſtande iſt, und das Waſſer wird in der Röhre DE etwa nur 16 Fuß hoch ſteigen. Damit aber aus dem Gefäß KL eine hinlängliche Menge Waſſer auslaufe, und der Raum, worin ſich die eingeſchloſſene Luft ausbreiten ſoll, groß genug werde; ſo muß die Röhre MN eine beträchtliche Länge haben. Denn man ſiehet leicht, daß das Waſſer durch MN nur ſo lange ablaufen werde, als der Druck der eingeſchloſſenen Luft mit dem Druck der Waſſerſäule RN zuſammen den Druck der äuſſern Luft überwiegt. Da nun der Druck der äuſſern Luft weit ſtärker iſt, als der Druck der innern verdünnten Luft auf die Oberfläche XY des Waſſers im Gefäß KL; ſo muß die Säule RN eine beträchtliche Höhe haben, um den Druck der äuſſern Luft zu überwiegen. Herr **von Wolf** giebt von dieſem unterbrochenen Heber im Tom. II. Elem. Mathem. Hydraul. §. 77. pag. 446. eine kurze Beſchreibung. Vollſtändiger giebt ſie **Leupold** im Theatr. Machin. Hydraul. T. I. 12 §. 7 S. und erinnert ſehr wohl, es müſſe der Behälter KL wenigſtens einen nochmahl ſo groſſen körperlichen Inhalt haben, als FG, damit ſich die eingeſchloſſene Luft in einen hinlänglich groſſen Raum ausbreiten könne.

259 §.

Wenn dieſe Maſchine im groſſen angebracht werden ſoll, ſo wird noch eine beſondere Einrichtung in der Abſicht erfordert, daß ſich die Hähne O, P, Q, zu rechter Zeit von ſelbſt öfnen, und wieder ſchlieſſen. Es ſey nämlich anfangs O verſchloſſen, und P geöfnet, um KL zu füllen, ſo wird zugleich Q geöfnet, damit ein Theil der eingeſchloſſenen Luft heraus trete, die ſonſt dadurch, daß KL gefüllt wird, in einen

engern Raum würde gepreſt werden. Bey Verabſäumung dieſes Umſtandes würde kein Waſſer durch DE gehoben werden. Nachdem KL gefüllt iſt, müſſen P und Q geſchloſſen, O aber geöfnet werden, damit KL auslaufe, binnen eben der Zeit aber FG angefüllt werde. Sobald dies geſchehen iſt, muß ſich O ſchlieſſen, P und Q aber ſich zugleich wieder öfnen, damit durch P von neuen Waſſer in KL laufe, zugleich aber das gehobene Waſſer aus FG durch Q zum beſtimmten Gebrauch ablaufe. Es iſt dies nur das weſentliche der ganzen Einrichtung, die in zufälligen Umſtänden, wie man will, verändert werden kann. Statt der Hähne können Klappen oder andere Einrichtungen gebraucht werden, und die Röhre MN allein kann, dafern ſie nur weit und hoch genug iſt, die Stelle des Gefäſſes KL mit vertreten. Caſpar Schott beſchreibt in ſeiner Technica Curioſa Lib. V. Cap. I-III. eine Maſchine, die ein in mechaniſchen Kenntniſſen geübter Einwohner zu Baſel, Jeremias Nitz, in ſeinem Hauſe anlegen laſſen, um vermittelſt eines ſolchen unterbrochenen Hebers das Waſſer in einen erhabenen Behälter zu bringen, aus welchem es nach den bey ſeinem Hauſe befindlichen Garten zu einem daſelbſt befindlichen Springbrunnen geleitet ward. Nach verſchiedenen vergeblichen Verſuchen gelang es ihm endlich, die Maſchine in Gang zu bringen, und es iſt Schade, daß bey der Schottiſchen Beſchreibung nicht die Abmeſſungen aller Theile der ganzen Maſchine befindlich ſind. Vermuthlich ſind ſie ihm von dem Erfinder nicht mitgetheilet worden. Es iſt nicht einmahl angegeben, wie hoch die Steigröhre geweſen iſt, worin das Waſſer gehoben worden. Vermuthlich

hat dieſe Höhe nicht über 16 oder höchſtens 20 Fuß betragen. Leupold im Theatro Mach. Hydraul. T. I. Cap. I. § 14. p. 10. meynet zwar, das Waſſer laſſe ſich vermittelſt eines ſolchen unterbrochenen Hebers wohl bey 18 Ellen hoch heben, wenn ein verſtändiger und erfahrner Mechanicus die Einrichtung mache; allein es iſt ſehr zu zweifeln, daß man es ſo hoch bringen werde, weil dies eine ſo ſtarke Verdünnung der eingeſchloſſenen Luft erfordern würde, daß ihre Federkraft gar nicht merklich bliebe. A. a. O. giebt Leupold eine Einrichtung der Maſchine an, die der Nitziſchen zwar in der Hauptſache ähnlich iſt, aber in Abſicht der beſondern Verrichtungen, um die Hähne O, P, Q zu rechter Zeit zu öfnen und zu ſchlieſſen, ſich davon unterſcheidet.

Wie ſich mehrere dergleichen unterbrochene Heber mit einander verbinden laſſen, um das Waſſer noch auf gröſſere Höhen, als die von 18 Ellen, zu bringen, findet man beym Wolf a. a. O. §. 79. 80. p. 447. und ausführlicher beym Leupold a. a. O. 13 §. 7 Seite.

260 §.

Man kann den unterbrochenen Heber ſo einrichten, daß dadurch im Kleinen zugleich ein artiger Springbrunnen zuwege gebracht wird. Es ſey nämlich ABCD ein mit Waſſer gefülltes Gefäß, und gra- 51 Fig.
de über demſelben ſey ein Teller EF angebracht, der vermittelſt einiger Stützen am Rande des Gefäſſes ABCD befeſtiget ſeyn, oder auch die Stelle eines Deckels auf dieſem Gefäß vertreten kann, jedoch muß die äuſſere Luft in den über dem Waſſer in dieſem Gefäß befindlichen Raum einen freyen Zugang behalten.

halten. Durch den Teller EF geht eine grade Röhre HI, die mit dem untern Ende I beynahe den Boden des Gefäſſes ABCD erreicht, bey H aber nur eine kleine Oefnung hat. Durch eben den Teller iſt noch eine andere zu beyden Seiten offene Röhre KL durchgeführt, und über den Rand des Gefäſſes weggebogen, da dann die untere Oefnung L niedriger als I liegen muß. Auf den Teller EF wird eine gläſerne Glocke geſetzt, und, um den Zugang der äuſſern Luft abzuhalten, am Rande auf dem Teller feſtgeküttet. Wenn man nun bey L einen Theil der unter der Glocke befindlichen Luft durchs Saugen herausziehet, alſo die unter der Glocke befindliche Luft verdünnet; ſo treibt die äuſſere Luft das Waſſer aus dem Gefäß ABCD in der Röhre IH hinauf. Das bey H herausſpringende Waſſer fällt auf den Teller herab, und indem es durch die Röhre KL abläuft, verſchließt es zugleich der äuſſern Luft den Rückweg in die Glocke. Wenn demnach nur gleich anfangs die Luft hinlänglich verdünnt iſt, und L tief genug herabhängt, ſo ſpringt das Waſſer ununterbrochen bey H heraus, und flieſt zugleich durch L ab, ſo lange als I unter Waſſer ſteht.

261 §.

Die Urſache, wodurch das Waſſer unter der Glocke zum Springen gebracht wird, iſt das Uebergewicht der Federkraft der äuſſern Luft über die Federkraft der innern. Man kann auf eine ähnliche Art machen, daß das Waſſer aus einem verſchloſſenen Gefäß in die äuſſere freye Luft ſpringen muß, falls der eingeſchloſſenen Luft eine ſtärkere Federkraft zuwege gebracht wird, als die äuſſere freye Luft im na-

49 Fig. türlichen Zuſtande beſitzt. Es ſey das Gefäß ABCD mit einem Deckel verſchloſſen, und in dem Deckel ſey die Röhre EF befeſtiget, wovon das untere Ende F beynahe den Boden des Gefäſſes erreicht. Das obere Ende bey E ſey ſo eingerichtet, daß man es auf der Luftpumpe gehörig anſchrauben kann. Auch ſey die Röhre ſelbſt bey K mit einem Hahn verſehen, um ſie nach Gefallen zu ſchlieſſen oder zu öfnen. Nun ſey das Gefäß bis an GH etwa zur Hälfte oder noch unter der Hälfte mit Waſſer gefüllt. Man ſchraube das Gefäß auf die Luftpumpe gehörig feſt, und preſſe, nach der Vorſchrift des 23 §. Aeroſt., mehr Luft hinein, damit die eingeſchloſſene Luft mehr Dichtigkeit bekomme, als die äuſſere hat; ſo wird dadurch bekanntermaaſſen ihre Federkraft in eben dem Verhältniß verſtärkt. Der Hahn K dienet nun zugleich, die Röhre ſo lange verſchloſſen zu halten, bis man das Waſſer will hervorſpringen laſſen. In ſolcher Abſicht muß das Gefäß gehörig wieder auf ſeinen Boden BC geſtellt, oder wenigſtens ſo gehalten werden, daß das Waſſer den untern Theil des inwendigen Raums GBCH einnimmt, und die Luft ſich in den obern Raum AGHD begiebt. Wird hiernächſt der Hahn geöfnet, ſo ſpringt das Waſſer mit deſto ſtärkerer Gewalt hervor, je ſtärker vorher die Luft im Gefäß zuſammen gedrückt worden.

262 §.

Alle Abmeſſungen des Gefäſſes *ABCD* und der Röhre *EF* ſind gegeben, nebſt der Federkraft der innern zuſammengepreßten Luft: man ſoll die Geſchwindigkeit finden, womit das Waſſer aus der Röhre bey *E* hervorſpringt.

Aufl.

Aufl. Man kann auch hier wie im 253 §. das Gefäß ABCD wie eine Röhre betrachten, die mit EF zuſammenhängt, ſo daß die allgemeine Auflöſung des 159 § ihre Anwendung findet. Die dortige Gleichung war:

$$\Pi = k + b - x + \frac{m^2 v}{n^2} - \frac{dv}{yds} \int \frac{m^2 ds}{z} - \frac{m^2 v}{y^2},$$

und die Anwendung auf den gegenwärtigen Fall läſt ſich ſo machen. Es ſey das Gefäß anfangs bis an GH voll geweſen, und in der Zeit t ſey ſoviel ausgelaufen, als den Raum GMNH füllt. Man ſetze FL $= a$, FS $= x$, FE $= b$, EF + FS $= s$ den Querſchnitt MN $= y$, die Fläche der Oefnung bey E $= n$. (Ich nehme an, daß die Röhre EF vertical ſtehet. Wenn dies nicht wäre, ſo würden doch a, x, b die verticalen Höhen der Querſchnitte GH, MN, und der Oefnung E über eine durch F horizontalgelegte Ebene bedeuten.) Durch m muß derjenige bekannte Querſchnitt verſtanden werden, wodurch das Waſſer mit der Geſchwindigkeit $\sqrt{v}$ läuft, und das Integral

$\int \frac{ds}{z}$ muß man für die ganze Röhre EF und für das Gefäß von F bis S nehmen. Setzt man $m = n$, ſo iſt $\sqrt{v}$ die Geſchwindigkeit des bey E hervorſpringenden Waſſers. Uebrigens bedeutet hier Π die Höhe einer Waſſerſäule auf der Grundfläche MN, deren Gewicht ſo groß iſt, als der Druck der zuſammen gepreſten Luft gegen MN. Wenn nun k die Höhe dieſer Waſſerſäule für die Federkraft der Luft im natürlichen Zuſtande bedeutet; ſo ſey für den Anfang der Bewegung $\Pi = \mu k$, da die eingeſchloſſene Luft

den

den Raum AGHD füllte; ſo iſt für ihre jetzige Federkraft, nachdem GH in MN geſunken iſt, die Höhe $\Pi = \frac{AGHD}{AMND}\mu k$, alſo auch Π eine Function von x: da dann hiernächſt die völlige Auflöſung der Aufgabe vermittelſt der Integralrechnung gefunden wird.

263 §.

Wenn man $m = n$ ſetzt, alſo durch v die Geſchwindigkeit des durch E hervorſpringenden Waſſers verſteht; ſo hat man

$$\Pi = k + b - x + v - \frac{n^2 dv}{yds}\int\frac{ds}{z} - \frac{n^2 v}{y^2}.$$

Sind alſo die Querſchnitte y des Gefäſſes in Vergleichung mit der Fläche n der Oefnung E ſehr groß, ſo wird $v = \Pi - k - (b - x) = \Pi - k - ES$. Iſt alsdenn ABCD ein verticalſtehendes priſmatiſches, oder cylindriſches Gefäß, und man ſetzt $FO = \alpha$, ſo wird $OL = \alpha - a$, $OS = \alpha - x$, und $\frac{AGHD}{AMND}$ $= \frac{OL}{OS} = \frac{\alpha - a}{\alpha - x}$, folglich $\Pi = \frac{\alpha - a}{\alpha - x} \cdot \mu k$.

Daraus folgt $v = \left(\frac{(\alpha - a)\mu}{\alpha - x} - 1\right)k - (b - x)$, und die gröſte Geſchwindigkeit, welche das Waſſer ſehr ſchnell gleich nach dem erſten Anfang der Bewegung erreicht, iſt $= \surd((\mu - 1)k - EL)$. Das Waſſer muß alſo, alle Hinderniſſe der Bewegung beyſeit geſetzt, gleich anfangs auf die Höhe $(\mu - 1)k$ $- EL$

— EL ſteigen. Dieſe Höhe wird aber nach und nach abnehmen, indem die Oberfläche GH herab ſinkt, weil dadurch der eingeſchloſſenen Luft verſtattet wird, ſich in einen gröſſern Raum auszubreiten, wodurch zugleich ihre Federkraft geſchwächt wird. Wegen der bekannten Hinderniſſe der Bewegung aber erreicht das Waſſer die Höhe nicht würklich, die dieſe Rechnung giebt, und man würde, die würkliche Höhe zu berechnen, das Verfahren des 27 und 28 §. anbringen müſſen. Man ſieht leicht, daß ſtatt der dortigen Waſſerhöhe hier diejenige Höhe gebraucht werden müſſe, worauf das Waſſer ſtiege, wenn keine Hinderniſſe es aufhielten.

264 §.

Wenn das Gefäß ABCD ſo hoch wäre, daß man es bis auf die Höhe $(\mu - 1)k$ über GH mit Waſſer füllen könnte; und wenn alsdenn die Röhre EF ſeitwärts ſo angebracht wäre, daß das Waſſer durch dieſelbe wegen des Waſſerdrucks hervorſpringen könnte; ſo würde es ebenfalls, alle Hinderniſſe beyſeit geſetzt, auf die Höhe $(\mu - 1)k$ — EL ſteigen. Man kann indeſſen nicht mit dem H. v. Wolf Aërom. §. 91. in den Element. Math. T. II. p. 450. und andern, die ihm folgen, ſchlechthin annehmen, daß die Bewegung des hervorſpringenden Waſſers auf eben die Art erfolgen würde, wenn ſtatt der zuſammengepreſten Luft über GH die erwehnte Waſſerſäule ſtände. In dem Fall verwandelte ſich die Gleichung des 263 §. in folgende:

$$0 = b - x + v - \frac{n^2 dv}{yds}\int\frac{ds}{z} - \frac{n^2 v}{y^2},$$

weil

weil nun beynahe $\Pi = k$ wäre. Das Integral $\int \frac{ds}{z}$ müſte nun für die Röhre von E bis F und überdem von F bis oben an die höchſte Fläche der über GH ſtehenden Waſſerſäule genommen werden. Auch müſte man durch x die Höhe dieſer höchſten Fläche über F verſtehen. Dies würde alſo eine ganz andre Gleichung geben, als in dem Fall, wenn über GH zuſammengepreßte Luft ſteht. Das Gewicht der über GH ſtehenden Waſſerſäule iſt durch ihre ganze Maſſe verbreitet, und muß dieſe Maſſe mit in Bewegung ſetzen; es bewegt nicht blos die im Gefäß unter GH bis F und die in der Röhre EF befindliche Maſſe, wie es der Druck der Luft thut. Wenn das Gefäß in Vergleichung mit der Oefnung E ſehr weit iſt; ſo kommt die über GH ſtehende Waſſerſäule in keine beträchtliche Bewegung, und dies iſt die Urſache, weswegen alsdenn der Waſſerſtrahl in beyden betrachteten Fällen auf einerley Höhe ſprützt. Unter dieſer Einſchränkung alſo haben die Wolfiſchen Schlüſſe a. a. O. ihre Richtigkeit.

265 §.

Die Zuſammenpreſſung der Luft in dem Gefäß läßt ſich auch auf andere Arten, als vermittelſt der Luftpumpe bewerkſtelligen: jedoch wird man ſie nicht leicht auf einem andern Wege ſo ſtark verdichten können, als es ſich vermittelſt der Luftpumpe thun läßt. Man kann das Gefäß, worin die Röhre ſteckt, mit einem andern vermittelſt einiger Röhren ſo verbinden, daß das Waſſer ſelbſt die eingeſchloſſene Luft verdichtet, und man bringt auf ſolche Art einen

Spring-

Springbrunnen zuwege, der von dem Erfinder ein Herons-Brunnen genannt wird. Die Einrichtung iſt folgende. Das Gefäß AB iſt mit der Röhre EF völlig ſo wie im vor. § das Gefäß ABCD verſehen. Unter demſelben in beliebiger Tiefe ſteht ein andres Gefäß ohngefähr von eben der Gröſſe. Der Deckel des oberſten Gefäſſes AB iſt mit einem Rande AO von etlichen Zollen Höhe umgeben, damit auf demſelben, wie in einer Schüſſel etwas Waſſer ſtehen bleiben kann. In dieſer Schüſſel befindet ſich eine Oefnung G und von derſelben geht eine Röhre GH bis in das unterſte Gefäß ſo weit herab, daß ſie faſt den Boden deſſelben erreicht. In dem Deckel des untern Gefäſſes befindet ſich eine andre Oefnung I, und von derſelben ſteigt eine Röhre IK in das oberſte Gefäß ſoweit hinauf, daß ſie beynahe den oberſten Deckel deſſelben erreicht. Wenn nun in der oberſten Schüſſel AL auſſer G noch eine andre Oefnung M befindlich iſt, ſo kann man durch dieſe Oefnung vermittelſt eines Trichters das obere Gefäß AB mit Waſſer ſo hoch anfüllen, daß es jedoch die Oefnung K der Röhre IK nicht überſteigt. Nachdem dies geſchehen iſt, wird die Oefnung M mit einem Pfropf wieder genau verſchloſſen. Hierauf füllt man die Schüſſel AO mit Waſſer, welches durch die Röhre GH in das untere Gefäß CD herab fällt, und indem es in demſelben ſteigt, einen Theil der darin befindlichen Luft durch die Röhre IK in den über dem Waſſer in AB befindlichen Raum hinauf treibt, alſo überall die eingeſchloſſene Luft verdichtet. Der Hahn bey E wird ſo lange verſchloſſen oder in Ermangelung des Hahns die Oefnung E ſo lange mit dem Finger zugehalten, bis kein Waſſer mehr durch

52 Fig.

die Röhre GH herab fällt, und das übrige auf der Schüſſel AB ſtehen bleibt, damit die Luft ſo ſtark verdichtet werde, als es der Druck des Waſſers zu bewerkſtelligen vermögend iſt. Wird hiernächſt E geöfnet, ſo ſpringet das Waſſer aus eben der Urſache, wie im vor. §. aus E, und weil das herabfallende Waſſer von der Schüſſel aufgefangen wird, ſo ſpringt dieſer Brunnen ſo lange ununterbrochen fort, bis das Gefäß AB ausgeleert iſt. So wie nämlich das Waſſer in AB ſinkt, verſtattet es der Luft, ſich in einen gröſſern Raum auszubreiten, und dies vermindert ihre Federkraft, ſo daß ihr Druck gegen die Oberfläche PQ des Waſſers im Gefäß CD geringer wird, und dies verſtattet dem aus der Schüſſel AL durch die Röhre GH herabfallenden Waſſer beſtändig einen neuen Zugang. Demnach verliert der Raum worin die Luft ausgebreitet iſt, unten, ſtatt deſſen, daß er oben gewinnet, und die Luft bleibt ſo lange in einem zuſammengepreßten Zuſtande, bis ſie durch die Röhre EF heraus ſchlupfen, und ſich mit der äuſſern ins Gleichgewicht ſetzen kann.

266 §.

Die Geſchwindigkeit des aus dem Herons-Brunnen hervorſpringenden Waſſers zu finden, vorausgeſetzt, daß die Oefnung *E* in Vergleichung mit den Querſchnitten des Gefäſſes *AB* ſehr klein ſey.

Aufl. Es kommt nur darauf an, die Federkraft der eingeſchloſſenen Luft zu finden, und hiezu dienen folgende Schlüſſe. Auf das Waſſer in der Schüſſel drückt die Atmoſphäre in ihrem natürlichen Zuſtande, und ihr Druck ſey wie im 262 §. dem Druck einer

einer Waſſerſäule in der Höhe k gleich. Dieſen Druck leidet alſo auch die eingeſchloſſene Luft, und überdem den Druck der Waſſerſäule GN, deren Höhe eigentlich mit der Höhe der Oberfläche des Waſſers in der Schüſſel AO über die Fläche PQ einerley iſt. Demnach iſt die Federkraft der eingeſchloſſenen Luft $= k + GN$, und ihr Ueberſchuß über die Federkraft der äuſſern Luft iſt $= GN$. Daraus folgt, wie im 256 §., daß das Waſſer mit einer Geſchwindigkeit hervorſpringe, die der Höhe $GN - EL$ zugehört.

Je höher das Waſſer im Gefäß CD ſteigt, deſto kleiner wird GN, und EL wird im Gegentheil gröſſer. Demnach nimmt die Geſchwindigkeit des Waſſers deſto mehr ab, je weiter ſich das Gefäß ausleert. Ueberdem erhellet, daß der Raum, den die eingeſchloſſene Luft einnimmt, nach und nach wachſe, weil die Waſſerſäule, die ſie trägt, nach und nach kleiner wird. Deswegen kann auch genau zu reden, nicht alles hervorſpringende Waſſer, was auf die Schüſſel zurück fällt, in CD herab fallen. Soll dieſe Aenderung der Federkraft der eingeſchloſſenen Luft unbeträchtlich bleiben, ſo muß das Gefäß CD nur ſehr niedrig, dabey aber doch ſo weit gemacht werden, daß es mit AB ohngefähr einerley Inhalt hat. Man kann übrigens das Gefäß CD mit einem Hahn verſehen, um das hineingefallene Waſſer nach Gefallen wieder abzulaſſen.

267 §.

Man weiß aus dem 101 §. Aeroſt., daß die Federkraft der Luft auch durch die Wärme verſtärkt werden könne, wenn gleich die Dichtigkeit einerley bleibt. Deswegen läßt ſich das Waſſer auch durch

die Hitze zum Springen bringen, indem die Federkraft der darauf drückenden Luft durchs Feuer verſtärkt wird. Die Einrichtung, um dies zu bewerkſtelligen, iſt dem eben beſchriebenen Herons-Brunnen ähnlich: nur bleibt einmahl die Röhre GH weg, welche das Waſſer aus der obern Schüſſel in das untere Gefäß leitete, um die innere Luft zu verdichten. Es war fürs zweyte beym Herons-Brunnen vortheilhaft, das obere Gefäß AB in ziemlicher Höhe über das untere CD anzubringen, weil von dieſer Höhe die Dichtigkeit der eingeſchloſſenen Luft und ihre Federkraft abhieng. Dieſer Umſtand fällt hier weg, und das obere Gefäß kann nun unmittelbar auf das untere ſtehen, ſo daß der Boden des obern zugleich den Deckel des untern abgiebt. Wird nun das untere Gefäß aufs Feuer geſetzt, ſo verſtärkt die Hitze die Federkraft der in demſelben eingeſchloſſenen Luft. Sie tritt demnach, wie im Herons-Brunnen durch die Röhre IK in das obere Gefäß AB hinauf und nöthiget, das in demſelben eingeſchloſſene Waſſer durch die Röhre FE hervorzuſpringen.

Der XVII. Abſchnitt.

Theorie der Pumpen, und insbeſondre der Saugwerke.

268 §.

Durch eine Pumpe wird überhaupt eine Maſchine verſtanden, die ſo eingerichtet iſt, daß das Waſſer in einer Röhre vermittelſt Auf- und Niederdrü-

drückung eines Kolbens gehoben werden kann. Ihre Erfindung ſchreibt man dem Cteſibius von Alexandrien zu, der nicht lange nach dem Archimedes berühmt geweſen iſt. Das allgemeine der ganzen Einrichtung beruhet auf folgenden Stücken. Eine verticale Röhre ſtehet mit dem untern Ende im Waſſer, und die untere Oefnung iſt mit einer Klappe verſehen, die das Waſſer zwar hinauf treten, aber nicht wieder zurück fallen läßt. Mit einer ähnlichen Klappe iſt auch der Kolben ſelbſt verſehen, durch welche das Waſſer zwar über den Kolben hinauf treten kann, ſich ſelbſt aber den Rückweg verſchließt, indem es zurück zu fallen ſtrebt. Eine ſolche Klappe wird auch ein **Ventil** genannt, und die Röhre, worin der Kolben ſpielt, heißt der **Stiefel**.

269 §.

Dergleichen Pumpen heiſſen gemeine **Waſſer-Pumpen**, wenn der Stiefel ſo tief im Waſſer ſteht, daß der Kolben in ſeinem niedrigſten Stande ebenfalls um eine ziemliche Tiefe unter der Oberfläche des Waſſers ſteht, und die Art, wie das Waſſer vermittelſt einer ſolchen Pumpe gehoben wird, läßt ſich ſo begreifen. Es iſt ABCD der Stiefel, und er 53
ſteht bis an YZ unter Waſſer. Demnach muß das Fig.
Waſſer nach den Geſetzen der Hydroſtatik eben ſo hoch durch die untere Oefnung B in den Stiefel hineintreten. Die untere Klappe EF nicht nur, ſondern auch die Klappe IK im Kolben HI verſtatten dem Waſſer einen freyen Durchgang, ſo lange es aufwärts ſteigt. Wird nun der Kolben HI vermittelſt der Kolbenſtange GH in die Höhe gezogen; ſo drückt die über dem Kolben ſtehende Waſſerſäule IL

die Klappe IK zu, und wird daher mit dem Kolben zugleich in die Höhe gezogen. Weil nun auf ſolche Art unter dem Kolben ein leerer Raum entſteht, ſo öfnet das äuſſere Waſſer die untere Klappe EF, tritt durch dieſelbe hinauf, und füllet den leeren Raum unter dem Kolben aus. Wird hierauf der Kolben wieder zurück geſtoſſen, ſo würde er das hineingetretene Waſſer zurück treiben: allein das zurücktretende Waſſer verſchließt die Klappe EF. Deswegen iſt das Waſſer genöthiget durch die im Kolben befindliche Klappe IK, welche vom Gegendruck des Waſſers geöfnet wird, über den Kolben hinauf zu treten. Beym neuen Kolbenzuge ſchließt ſich IK wieder, und es tritt eben ſoviel Waſſer durch die Klappe EF wieder hinein, welches beym Herabſtoſſen des Kolbens abermahl durch die Klappe IK über den Kolben hinauf zu treten genöthiget wird. Die Höhe der über dem Kolben ſtehenden Waſſerſäule nimmt auf ſolche Art beſtändig zu, bis endlich das Waſſer die Oefnung M erreicht, und durch die Röhre MN abläuft. Dies Ablaufen dauret hiernächſt ſo lange fort, als die Bewegung des Kolbens fortgeſetzt wird. Dafern der Kolben mit ſeiner Klappe wider das Durchdringen des Waſſers gehörig verwahrt iſt, ſo wird die Waſſerſäule OI auch, wenn die Bewegung des Kolbens nachläßt, über dem Kolben ſtehen bleiben, und die Pumpe wird hiernächſt ſogleich beym erſten Kolbenzuge wieder Waſſer geben.

270 §.

Vermittelſt einer ſolchen Pumpe läßt ſich alſo das Waſſer auf jede gefällige Höhe bringen, nur müſſen Kolben, Kolbenſtange und Ventil ſtark genug ſeyn,

damit ſie das Gewicht der ganzen Waſſer-Säule OI tragen können, und die Kraft, welche den Kolben aufwärts ziehen ſoll, muß ſtark genug ſeyn, dieſe ganze Waſſerſäule mit der erforderlichen Geſchwindigkeit zu heben. Dafern der Kolben beym Heraufſteigen beſtändig unter der höchſten Waſſerfläche YZ bleibt, alſo auch in ſeinem höchſten Stande nicht über YZ gehoben iſt; ſo hat die Luft an der Würkung dieſer Pumpe gar keinen Antheil, und ſie würde auch im luftleeren Raum ihre völlige Würkung thun. Stiege aber im luftleeren Raum der Kolben über YZ hinauf, ſo würde das Waſſer ihm nicht auf jede Höhe völlig nachfolgen. Es würde zwar ſicher die Höhe der äuſſern Waſſerfläche YZ erreichen, aber es könnte doch wohl ein Theil des Raums unter dem Kolben leer bleiben. Dies verhält ſich aber in der freyen Luft ganz anders. Der Druck der Atmoſphäre auf die äuſſere Waſſerfläche treibt das in der Röhre befindliche Waſſer auch über YZ hinauf, wenn der Kolben höher gehoben, und dadurch unter dem Kolben ein leerer Raum zuwege gebracht wird. Weil dieſer Druck der äuſſern Luft ſo ſtark iſt, daß er mit einer 32 Fuß hohen Waſſer-Säule das Gleichgewicht halten kann, ſo würde das Waſſer auch noch 32 Fuß hoch über YZ in die Röhre ABCD hinein treten, wenn der Kolben ſo hoch in die Höhe gezogen würde. Auf dieſe Betrachtung gründet ſich die Einrichtung derjenigen Pumpen, welche Saugwerke heiſſen, und worin das Waſſer durch den Druck der äuſſerlichen Luft zuvor bis auf eine gewiſſe Höhe getrieben wird, ehe es durch die Klappe des eigentlichen Stiefels ritt, und von dort vermittelſt des Kolbens bis an die Gußröhre gehoben wird. Es iſt näm-

lich nicht nothwendig, daß der Kolben bis unter die Fläche YZ des äuſſern Waſſers hinabgeſtoſſen, und alsdenn auf die Höhe von 30 bis 32 Fuß wieder aufgezogen werde, wenn das Waſſer durch den Druck der äuſſern Luft bis auf dieſe Höhe gehoben werden ſoll. Ueberdem läßt ſich auch nicht wohl eine ſolche mechaniſche Einrichtung machen, wodurch der Kolben auf eine ſo beträchtliche Höhe gehoben und wechſelsweiſe wieder herabgeſtoſſen werden könnte. Der Raum, den der Kolben von ſeiner niedrigſten bis zur höchſten Stelle durchläuft, beträgt gewöhnlich nicht über 3 bis 4 Fuß, und die ganze übrige Einrichtung einer Saugpumpe beſtehet in folgenden Stücken.

271 §.

54 Fig. Die Pumpe ſelbſt wird aus zwoen Röhren AB und CD zuſammengeſetzt, wovon die obere CD etwas weiter iſt, als die untere AB. Dieſe Röhren ſind da, wo ſie an einander geſetzt werden, mit einem Rand EF umgeben, der mit vier Schrauben verſehen iſt, um die obere Röhre vermittelſt derſelben auf der untern gehörig zu befeſtigen. Zwiſchen beyden Rändern wird ein lederner Ring gelegt, damit ſie deſto beſter zuſammen ſchlieſſen. Die untere Röhre AB, welche eigentlich im Waſſer zu ſtehen kommt, heißt die Saugröhre, die obere CD aber, worin der Kolben auf und nieder ſpielet, wird der Stiefel genannt. Wenn die Pumpe dienen ſoll, das Waſſer aus einem Brunnen zu heben zum öconomiſchen Gebrauch, ſo wird unten in der Saugröhre bey AA ein mit Löchern durchſtochenes Blech (der Seiber) angebracht; um zu verhindern, daß das Waſſer keinen Unrath mit ſich hinauf nehme.

Der

Der Stiefel iſt unten bey G, ſo wie auch der Kolben bey P mit einer Klappe oder Ventil verſehen. Wenn nun die Saugröhre bis an YZ unter Waſſer ſtehet, ſo muß die Höhe des Ventils G über die Fläche YZ nicht mehr als aufs höchſte 28 Fuß betragen, damit die Atmoſphäre das Waſſer noch um einige Fuſſe über das Ventil G hinauf treiben könne. Steht nun anfangs der Kolben in ſeiner niedrigſten Stelle ſo, daß er das Ventil G unten im Stiefel unmittelbar berührt, ſo würde in dieſer Vorausſetzung zwiſchen beyden gar keine Luft befindlich ſeyn, wenn die untere Fläche des Kolbens an das Ventil allenthalben genau anſchlöſſe, die zwiſchen beyden anfangs befindliche Luft würde durch das Kolben-Ventil, indem der Kolben niedergeſtoſſen wird, gänzlich heraustreten, und dies würde unſtreitig die vollkommenſte Einrichtung einer Pumpe ſeyn. Allein die Einrichtung läßt ſich nicht wohl ſo machen, daß ſie dieſer Vorausſetzung völlig gemäß wäre. Zwiſchen dem Kolben und dem Ventil wird ein kleiner Raum bleiben, der alſo anfangs mit Luft von natürlicher Dichtigkeit angefüllet iſt. Wenn aber der Kolben nun bis zu ſeiner höchſten Stelle etwa z. E. 4 Fuß hoch hinauf ſteigt, ſo breitet ſich die vorhin unter dem Kolben zurück gebliebene Luft in den ganzen Raum aus, der nun zwiſchen dem Kolben und Ventil leer wird. Hiedurch wird ihre Federkraft vermindert, die Federkraft der in der Saugröhre befindlichen Luft iſt ſtärker. Daher ſtößt ſie das Stiefel-Ventil G auf, und ein Theil von ihr tritt in den Stiefel hinein. Hiedurch wird zugleich die Federkraft der in der Saugröhre zurückbleibenden Luft vermindert, ſo daß ſie mit der Federkraft der äuſſern Luft nicht mehr

im Gleichgewicht bleibt. Der Erfolg davon iſt dieſer, daß die äuſſere Luft in die Saugröhre ſoviel Waſſer hineintreibt, bis das Gewicht der hineingetretenen Waſſerſäule mit dem Druck der eingeſchloſſenen Luft zuſammen dem Druck der Atmoſphäre gleich iſt. Indem ferner der Kolben von der höchſten bis zur niedrigſten Stelle zurückgeſtoſſen wird, drückt er die unter ihm und über dem Stiefel-Ventil befindliche Luft zuſammen. Dieſe ſchließt alſo das Stiefel-Ventil, ſtößt das Kolben-Ventil auf und tritt durch daſſelbe über den Kolben hinauf, einen kleinen Theil ausgenommen, der wie zu Anfange zwiſchen dem Kolben- und Stiefel-Ventil zurück bleibt. Beym zweyten Hub des Kolbens wird alſo eben das mit einem geringen Unterſcheid erfolgen, was beym erſten Hub erfolgte. Ein Theil der Luft tritt aus der Saugröhre in den Stiefel, und die Atmoſphäre preßt etwas mehr Waſſer in die Saugröhre hinein. Man ſieht leicht, wenn der Kolben ſo fortfährt auf und nieder zu ſpielen, daß bey jedem neuen Hub das Waſſer in der Saugröhre höher ſteigen, und endlich durch das Ventil G in den Stiefel hinein treten müſſe: da es dann weiter vermittelſt des Kolbens, wie bey der gemeinen Waſſerpumpe (269 §.) bis zur Guß-Röhre gehoben wird.

272 §.

Wenn ſich die Einrichtung ſo machen lieſſe, daß der Kolben in ſeinem niedrigſten Stande ganz genau an den Boden des Stiefels, und das daſelbſt befindliche Ventil anſchlöſſe; ſo würde das Waſſer allemahl bis in den Stiefel treten, und bis zur höchſten Stelle des Kolbens gehoben werden, falls die

gröſte

gröſte Kolbenhöhe über dem Waſſerpaß YZ nicht über 32 Rheinl. Fuß beträgt. In allen andern Fällen, wo zwiſchen dem Kolben in ſeinem niedrigſten Stande, und dem Boden des Stiefels ein Zwiſchenraum bleibt, wird die in demſelben zurückbleibende Luft dem in der Saugröhre hinaufſteigenden Waſſer deſto mehr hinderlich ſeyn, je gröſſer dieſer Zwiſchenraum iſt. Er heiſt deswegen der ſchädliche Raum der Pumpe, und die Pumpe iſt deſto vollkommener, je kleiner dieſer ſchädliche Raum iſt. Wenn man das Pumpenventil nicht im Boden des Stiefels B, ſondern irgendwo in der Saugröhre anbringen wollte; ſo würde man hiedurch den ſchädlichen Raum vergröſſern, und dies deſto mehr, je niedriger das Ventil in der Saugröhre angebracht würde. Die allerunvollkommenſte Pumpe würde alſo diejenige ſeyn, welche ihr Ventil nicht am oberſten, ſondern am unterſten Ende der Saugröhre bey A hätte. Man kann alſo alle Arten von Pumpen in folgende drey Claſſen bringen. Eine **Pumpe der vollkommenſten Art** hat ihr Ventil oben an der Saugröhre, und gar keinen ſchädlichen Raum. Eine **Pumpe der unvollkommenſten Art** hat ihr Ventil unten an der Saugröhre. Eine **Pumpe von mittlerer Art** hat zwar ihr Ventil oben an der Saugröhre, aber zwiſchen dem Kolben und Ventil einen ſchädlichen Raum. Man ſehe **Belidors** Architectura Hydraul. III Buch, III Cap. 913 §.

273 §.

Die Abmeſſungen des Stiefels und der Saugröhre einer Pumpe der vollkommenſten Art ſind gegeben, nebſt der Höhe des Stiefel- 55 Fig.
ventils

ventils B über den Waſſerpaß YZ, und der Höhe AB des Kolbenhubes: man frägt, wie hoch das Waſſer nach dem erſten Kolbenhub in die Röhre hineintreten wird.

Aufl. Es ſey die Höhe BZ des Stiefelventils B über den Waſſerpaß $= b$, die Höhe des Kolbenhubs AB $= c$, und AZ $= b + c = a$, der Querſchnitt des Stiefels $= m^2$, der Saugröhre $= n^2$; ſo iſt der Inhalt der Saugröhre $= n^2 b$, und dieſen Raum füllt die natürliche Luft aus, bevor der Kolben das erſtemahl zu ſteigen anfängt. Der Inhalt des Stiefels bis an die höchſte Stelle A, ſo die Grundfläche des Kolbens erreicht, iſt $= m^2 c$. Wenn alſo das Waſſer in der Saugröhre während des erſten Kolbenhubes um die Höhe ZX $= x$ ſteigt; ſo füllt die nach dem erſten Hub noch übrige innere Luft den Raum AB + BZ − ZX $= m^2 c + n^2 (b - x)$ aus. Die Federkraft dieſer noch übrigen Luft ſey $= h'$, und die Federkraft der Atmoſphäre $= h$, ſo daß durch jeden dieſer Buchſtaben die Höhe einer Waſſerſäule angezeigt wird, der die Federkraft der Luft das Gleichgewicht hält; ſo hat man $m^2 c + n^2 (b - x) : n^2 b = h : h'$ (75 §. Aeroſt.), alſo $h' = \dfrac{n^2 bh}{m^2 c + n^2 (b - x)}$.

Es iſt überdem $h' + x = h$, alſo $x = h - h'$, oder

$$x = h - \frac{n^2 bh}{m^2 c + n^2 (b - x)}.$$ Hieraus folgt

$$m^2 cx + n^2 bx - n^2 xx = m^2 ch - n^2 hx,$$ oder

$$n^2 x^2 - (m^2 c + n^2 b + n^2 h) x = - m^2 ch,$$ alſo

$$x^2 - \left(\frac{m^2 c}{n^2} + b + h\right) x = - \frac{m^2 ch}{n^2},$$ und

$x =$

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2c}{n^2} + b + h\right) \pm \surd\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{m^2c}{n^2} + b + h\right)^2 - \frac{m^2ch}{n^2}\right).$$

Wenn Stiefel und Saugröhre gleich weit ſind, alſo $m^2 = n^2$ iſt; ſo hat man
$x = \frac{1}{2}(a+h) \pm \surd(\frac{1}{4}(a+h)^2 - ch)$, weil $c = a - b$. M. ſ. Muſſchenbroek Introd. ad Phil. Nat. T. II. §. 2125. p. 870. Hiemit kommt auch Belidors Aufloͤſung uͤberein, Architect. Hydraul. III Buch III Cap. 869 §. Man kann die letzte Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2}(a+h) - \surd(\tfrac{1}{4}(a+h)^2 - ch)$$

als eine allgemeine Gleichung betrachten, die ſich auf alle Faͤlle, auch wenn Stiefel und Saugroͤhre ungleich weit ſind, anwenden laͤßt, wenn man $a = \frac{m^2c}{n^2} + b$ ſetzt, da dann $\frac{m^2c}{n^2}$ die auf die Weite der Saugroͤhre reducirte Hoͤhe des Kolbenzuges heißt. Wenn naͤmlich ſtatt des Stiefels, deſſen Querſchnitt m^2 iſt, ein anderer gebraucht wuͤrde, der eben ſo weit, als die Saugroͤhre waͤre, ſo muͤßte der Kolben um die Hoͤhe $\frac{m^2c}{n^2}$ gehoben werden, wenn bey jedem Zug eben ſo viel Luft aus der Saugroͤhre in den Stiefel treten ſollte, als im vorigen Fall.

Bey Aufloͤſung dieſer Aufgabe iſt angenommen worden, daß Stiefel und Saugroͤhre lothrecht ſtehen. Iſt nun die Saugroͤhre zwar grade, aber gegen den Horizont ſchief geneigt und man verſteht noch die Laͤngen AB, BZ und ZX durch c, b, x, ſo hat man

xſin η

$x \sin\eta + h' = h$, mithin

$$x = \frac{h-h'}{\sin\eta} = \frac{h}{\sin\eta} - \frac{h^2 b}{m^2 c + n^2 (b-x)} \cdot \frac{h}{\sin\eta}.$$

Demnach ſetzt man in der gefundenen Gleichung nur allenthalben für x, $\frac{h}{\sin\eta} = h \cdot \operatorname{coſec}\eta$ ſtatt h.

274 §.

Dafern während des zweyten Hubes das Waſſer von X bis W ſteigt, ſo läßt ſich auf eben die Art $XW = y$ finden. Was vorhin $b - x$ war, ſey jetzt $= \beta$, und die Federkraft der innern Luft nach dem zweyten Hub $= h''$, ſo iſt $m^2 c + n^2(\beta - y) : n^2 \beta = h' : h''$, und $h'' = h' - y$, folglich wird

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2 c}{n^2} + \beta + h'\right)$$
$$- \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{m^2 c}{n^2} + \beta + h'\right)^2 - \frac{m^2 c h'}{n^2}\right)}.$$

Wenn alſo $m^2 = n^2$ iſt; ſo hat man

$$y = \tfrac{1}{2}(c + \beta + h') - \sqrt{(\tfrac{1}{4}(c + \beta + h') - ch')}.$$

Setzt man $ZW = x + y = z$, ſo wird $\beta - y = b - z$, und $h'' = h - z$, alſo $m^2 c + n^2(b - z) : n^2 \beta = h' : h - z$, woraus $(m^2 c + n^2(b - z))(h - z) = n^2 \beta h'$ folgt, und $z = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2}{n^2} c + b + h\right)$

$$- \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{m^2 c}{n^2} + b + h\right)^2 - \frac{m^2 c h}{n^2} - (bh - \beta h')\right)}.$$

Iſt aber $m^2 = n^2$, ſo erhält man

$$z = \tfrac{1}{2}(a + h) - \sqrt{(\tfrac{1}{4}(a + h)^2 - ch - (bh - \beta h'))}.$$

Es

Es ſey $a = 16$ Fuß, und $b = 12$ Fuß, alſo $c = 4$ Fuß, und $h = 32$ Fuß, $m^2 = n^2$; ſo wird $\frac{1}{2}(a+h) = 24$, $\frac{1}{4}(a+h)^2 = 576$, $ch = 128$, $\sqrt{(576-128)} = \sqrt{448} = 21{,}166$, alſo $x = 2{,}834$. Ferner wird $\beta = b - x = 9{,}166$, $h' = 29{,}166$, alſo $\beta h' = 267{,}334556$, $bh = 384$, $bh - \beta h' = 116{,}665444$. Dies abgezogen von 448, läßt 331,334556. Die Quadratwurzel iſt 18,202, alſo $z = 24 - 18{,}202 = 5{,}798$. Muſſchenbröck hat dies Exempel a. a. O. im 2124 §., und er bringt für den erſten Kolben-Hub eben die Höhe x heraus. Allein die folgenden Kolben-Züge findet er nicht ſo, wie ſie nach gegenwärtiger Rechnung heraus kommen. Die für x gefundene Gleichung läſt ſich, wenn $m^2 = n^2$ iſt, ſo ausdrücken $\frac{b}{c+b-x} + \frac{x}{h} = 1$, oder $\frac{b}{a-x} + \frac{x}{h} = 1$, und eben den Ausdruck hat Muſſchenbröck. Hieraus ſchließt er, man finde die Gleichung für z, wenn in jener z ſtatt x, und β ſtatt b geſetzt werde. Dies giebt $\frac{\beta}{a-z} + \frac{z}{h} = 1$, und aus dieſer Gleichung folgt $z = 5{,}098$. Allein bey dieſer Rechnung hat Muſſchenbröck ohne Zweifel eine Pumpe der unvollkommenſten Art in Gedanken gehabt, ob es gleich ſcheint, daß er die Pumpe der vollkommenſten Art verſtehe, auch ſeine Zeichnung grade dieſe zuletzt erwähnte Art vorſtellig macht. Es wäre dies ſonſt eine ganz unrichtige Anwendung der für x gefundenen Gleichung. Dieſe giebt nämlich nicht z, ſondern y, wenn man y ſtatt x, β ſtatt b, aber auch überdem noch h' ſtatt h ſchreibt,

ſchreibt, weil beym Anfang des zweyten Kolbenzuges die in den Raum β ausgebreitete Luft nur noch die Dichtigkeit h' hat. Man erhält demnach

$$\frac{\beta}{c+\beta-y} + \frac{y}{h'} = 1, \text{ oder } \frac{\beta}{a-(b-\beta)-y}$$

$$+ \frac{y}{h'} = 1, \text{ d. i. } \frac{\beta}{a-x-y} + \frac{y}{h'} = 1,$$ da dann $a-x$ das iſt, was vorhin a war. Setzt man alſo α ſtatt $a-x$, ſo wie β ſtatt $b-x$ ſtehet, ſo iſt nun $\frac{\beta}{\alpha-y} + \frac{y}{h'} = 1$. Aus dieſer Gleichung folgt $y = \frac{1}{2}(\alpha + h') \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(\alpha + h')^2 - ch')}$, welches mit dem vorigen Werth von y überein kömmt. Die Rechnung giebt $\frac{1}{2}(\alpha + h') = 21{,}166$, und $\sqrt{(\frac{1}{4}(\alpha + h')^2 - ch')} = 18{,}202$, alſo $y = 2{,}964$, folglich $z = x + y = 5{,}798$, wie vorhin. Um z unmittelbar aus der Gleichung zu finden, müſte man $a-x$ ſtatt α, alſo $\alpha - y = a - z$, und hiernächſt $y = z - x = z - (h - h')$ ſetzen. Dies giebt

$$\frac{\beta}{a-z} + \frac{z-h+h'}{h'} = 1, \text{ alſo } \frac{\beta}{a-z} + \frac{z}{h'}$$

$$= \frac{h}{h'},$$ oder $\beta h' = (a-z)(h-z)$, welches die vorhin für dieſen Fall gefundene Gleichung iſt.

275 §.

Die Gleichung $y = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2c}{n^2} + \beta + h'\right)$

$$- \sqrt{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{m^2c}{n^2} + \beta + h'\right)^2 - \frac{m^2ch'}{n^2}\right)}$$ iſt

am

am bequemſten, wenn man berechnen will, um wie viel das Waſſer bey jedem folgenden Kolbenzug ſteigt. Wenn nämlich jedesmahl durch β der in der Saugröhre noch mit Luft gefüllte Raum und durch h' die Dichtigkeit dieſer Luft verſtanden wird, ſo iſt y dasjenige Stück, um welches beym folgenden Kolbenzug die Höhe des Waſſers in der Saugröhre zunimmt. Für $m^2 = n^2$ iſt alſo

$$y = \tfrac{1}{2}(c+\beta+h') - \sqrt{(\tfrac{1}{4}(c+\beta+h')^2 - ch')}.$$

Im vorigen Exempel giebt die Rechnung für den dritten Kolbenzug

$c = 4$	$\frac{1}{4}(c+\beta+h')^2 = 331{,}312804$
$\beta = 6{,}202$	$ch' = 104{,}808$
$h' = 26{,}202$	$\frac{1}{4}(c+\beta+h')^2 - ch' = 226{,}504804$
$36{,}404$	Die Quadratwurzel hievon iſt 15.050, alſo
$2,$	
$\frac{1}{2}(c+\beta+h') = 18{,}202$	$y = 3{,}152.$

Für den vierten Kolbenzug iſt

$c = 4$	$\frac{1}{4}(c+\beta+h')^2 = 226{,}502500$
$\beta = 3{,}050$	$ch' = 92{,}200$
$h' = 23{,}050$	$\frac{1}{4}(c+\beta+h')^2 - ch' = 134{,}302500$
$30{,}100$	Die Quadratwurzel iſt $= 11{,}588$, alſo wird
$2,$	
$\frac{1}{2}(c+\beta+h') = 15{,}050$	$y = 3{,}462.$

Man hat alſo folgende Reſultate:

Anzahl der Kolbenzüge.	Der Wehrt von y.	Höhe des Waſſers in der Steigröhre.
1	2,834	2,834
2	2,964	5,798
3	3,152	8,950
4	3,462	12,412

Daraus ergiebt ſich, daß das Waſſer nach dem vierten Kolbenzuge ſchon in den Stiefel hinein trete. Alſo wird es der fünfte Kolbenzug ſchon bis an die höchſte Stelle heben, die der Kolben erreicht; und wenn die Gußröhre gleich über dieſer Stelle angebracht iſt, ſo wird es beym ſechſten Kolbenzuge ſchon zur Gußröhre hinauslaufen.

276 §.

Dieſe Rechnung ſetzte voraus, daß Stiefel und Saugröhre von gleicher Weite ſind, und die für y im 273 §. gefundene allgemeine Gleichung ergiebt, daß die Rechnung wenig mehr auf ſich habe, wenn Stiefel und Saugröhre eine ungleiche Weite haben, weil nun ſtatt c die reducirte Höhe des Kolbenzuges $\frac{m^2 c}{n^2}$ gebraucht werden muß. Hiebey iſt aber noch zu bemerken, daß dieſe Gleichung nur ſo lange ihre Anwendung finde, als die Höhe des heraufſteigenden Waſſers die Höhe der Saugröhre ſelbſt nicht übertrift. Dies ergiebt ſich ſogleich, wenn man auf die im 273 §. zum Grunde gelegte Proportion $m^2 c + n^2 (b - x) : n^2 b = h : h - x$ zurück gehet. Das erſte Glied drückt den Raum aus, den die verdünnte Luft ausfüllt, indem der Kolben das erſtemal ſeine höchſte Stelle erreicht hat: aber in der Vorausſetzung, daß das Waſſer nur bis an X in der
56 Saugröhre geſtiegen ſey. Wäre es wie in der
Fig. 56 Fig. bis an X in den Stiefel geſtiegen; ſo wäre der Raum, den die verdünnte Luft einnimmt $= m^2 c - m^2 . BX$. Wenn demnach nun $BX = z$ geſetzt wird, ſo erhält man $m^2 (c - z) : n^2 b = h : (h - b - z)$, alſo $m^2 (c - z)(h - b - z) = n^2 bh$. Weil nun $b + z$ das

iſt,

iſt, was vorhin x hieß, und $c = a - b$ iſt, ſo hat man auch $(a - x)(h - x) = \frac{n^2}{m^2} bh$, und dies giebt

$$x^2 - (a + h)x = \frac{n^2}{m^2} bh - ah,$$ woraus nun

$$x = \tfrac{1}{2}(a + h) - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}(a + h)^2 - \left(a - \frac{n^2}{m^2} b\right) h\right)}$$

folgt. Wenn $m = n$ iſt, ſo wird $x = \frac{1}{2}(a + h) - \sqrt{(\frac{1}{4}(a + h)^2 - ch)}$ und die Auflöſung kommt mit der vorigen völlig überein, wie erfordert wird.

277 §.

Die Abmeſſungen des Stiefels und der Saugröhre einer Pumpe der unvollkommenſten Art ſind gegeben, nebſt der Höhe des Kolbenzuges: man frägt, wie hoch das Waſſer nach dem erſten ſowohl, als den folgenden Kolbenzügen in die Saugröhre hinein treten werde.

Aufl. Es ſey die Höhe der Saugröhre $= b$, und jeder Querſchnitt von ihr $= n^2$, ſo iſt zugleich b die kleinſte Höhe des Kolbens über das Waſſer, wenn der Kolben in ſeinem niedrigſten Stande den Boden des Stiefels erreicht, wie hier angenommen wird. Die gröſte Höhe des Kolbens über den Waſſerpaß YZ ſey $= a$, und die Höhe des Kolbenzuges $a - b = c$, jeder Querſchnitt des Stiefels $= m^2$. Beym erſten Kolbenzuge tritt das Waſſer auf einerley Höhe, es mag das Ventil oben oder unten an der Saugröhre angebracht ſeyn, und die Pumpe zur vollkommenſten oder unvollkommenſten Art gehören. Es iſt nämlich in beyden Fällen anfangs die ganze Saugröhre mit Luft von natürlicher Dichtigkeit angefüllet,

die alſo den Raum $= n^2 b$ einnimmt. Steigt nun beym erſten Kolbenzuge das Waſſer auf die Höhe $ZX = x$, ſo wird die Luft in den Raum $m^2 c + (b-x) n^2$ ausgebreitet, ſo daß nun ihre Federkraft $= \frac{n^2 b}{m^2 c + n^2 (b-x)} h$ wird, und dieſe muß $= h - x$ ſeyn. Man erhält alſo die Gleichung $\frac{n^2 b}{m^2 c + n^2 (b-x)} h = h - x$, und daraus folgt, wie im 273 §., $x =$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2 c}{n^2} + b + h\right) \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{m^2 c}{n^2} + b + h\right)^2 - \frac{m^2 c h}{n^2}\right)}$$

da dann die negative Wurzel genommen werden muß. Beym zweyten und den folgenden Kolbenzügen aber ſind beyde erwehnte Fälle gar ſehr verſchieden. Indem nämlich der Kolben wieder bis zur niedrigſten Stelle herabſteigt, drückt er die Luft bis auf ihre natürliche Dichtigkeit zuſammen, und ſoviel, als vorhin den Raum $n^2 x$ füllte, tritt nur durch das Kolbenventil hinaus. Die übrige bleibt in dem Raum $BX = n^2(b-x) = n^2 \beta$ zurück, und dieſe behält ihre natürliche Dichtigkeit, ſtatt deſſen, daß bey der Pumpe der vollkommenſten Art die in dieſem Raum zurückbleibende Luft nur die Dichtigket $\frac{n^2 b}{m^2 c + n^2 (b-x)} h = h'$ behält, wenn nun beym zweyten Kolbenzuge das Waſſer bis W ſteigt, und $ZW = z$ iſt, ſo breitet ſich die in dem Raum $n^2 \beta$ vorhin zurückgebliebene natürliche Luft in den Raum $m^2 c + n^2 (b-z)$ aus und ihre Dichtigkeit wird $= \frac{n^2 \beta}{m^2 c + n^2 (b-z)} h$. Dieſe muß

$= h$

$= h - z$ ſeyn, und man erhält $\frac{n^2\beta}{m^2c+n^2(b-z)} h = h - z$.
Bey der vollkommenſten Art der Pumpe aber hätte man
$\frac{n^2\beta}{m^2c+n^2(b-z)} h' = h - z$, wie im 274 §. Alſo wird

im gegenwärtigen Fall $z = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2c}{n^2} + b + h\right)$
$\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{m^2c}{n^2} + b + h\right)^2 - \left(\frac{m^2c}{n^2} + b - \beta\right)h}$,
und man darf in der für den erſten Kolbenzug gefundenen Gleichung nur z ſtatt x und β ſtatt b ſchreiben, wenn man $\frac{mc}{n} + b = a$ ſetzt. Nun ſieht man leicht, daß die Rechnung wieder auf ähnliche Art für den dritten und die folgenden Kolbenzüge fortgeführt werden könne. Steigt das Waſſer beym dritten Kolbenzug auf die Höhe z', ſo ſetzt man z' ſtatt z, und $\beta - z$ ſtatt β, u. ſ. f.

Wenn man hiemit dasjenige vergleicht, was im 208 §. in Abſicht der Muſſchenbröckſchen Rechnung für die Höhen, worauf das Waſſer bey wiederholten Kolbenzügen ſteigt, erinnert worden; ſo ergiebt ſich augenſcheinlich, daß die gedachten Erinnerungen ihre Richtigkeit haben, und Muſſchenbröcks Rechnung nur für die Pumpe der unvollkommenſten Art gelte.

Bey dieſer Art Pumpen wird alſo das Waſſer nicht ehe bis in den Stiefel ſteigen können, bevor alle Luft aus der Saugröhre herausgetreten iſt. Falls die Luft nicht insgeſammt heraustreten kann, ſo wird das Waſſer nur bis zu einer beſtimmten Höhe in der Saugröhre gelangen, und hiernächſt unbeweglich ſte-

hen bleiben, es mag die Bewegung des Kolbens, ſo lange man will, fortgeſetzt werden.

278 §.

Die Umſtände zu finden, unter welchen das Waſſer entweder würklich bis in den Stiefel treten wird, oder nur bis zu einer beſtimmten Höhe in der Saugröhre gebracht werden kann, wenn die Pumpe zur unvollkommenſten Art gehört.

Aufl. Es ſey $ZV = x$ die gröſte Höhe, auf welche das Waſſer gebracht werden kann; ſo iſt beym niedrigſten Stande des Kolbens die zurückgebliebene Luft in dem Raum $BV = n^2(b-x)$ eingeſchloſſen und ihre Federkraft iſt ſo groß, als die natürliche Federkraft der Atmoſphäre. Beym höchſten Kolbenſtande iſt eben dieſe Menge Luft in den Raum $m^2c + n^2(b-x)$ ausgebreitet, alſo iſt in dieſem Zuſtande ihre Federkraft $= \frac{n^2(b-x)h}{m^2c+n^2(b-x)}$.
Wenn nun dieſe $= h - x$ iſt, ſo kann das Waſſer nicht mehr ſteigen, und dies erfordert die Vorausſetzung, vermöge der x die gröſte Höhe ſeyn ſoll, die das Waſſer erreichen kann. Dieſe wird demnach durch die Gleichung $\frac{n^2(b-x)h}{m^2c+n^2(b-x)} = h - x$ beſtimmt, und dieſe Gleichung giebt

$$x^2 - \left(\frac{m^2c}{n^2} + b\right)x = -\frac{m^2c}{n^2}h, \text{ alſo } x =$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{m^2c}{n^2} + b\right) - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{m^2c}{n^2}+b\right)^2 - \frac{m^2ch}{n^2}\right)}.$$

Es iſt demnach dieſe größte Höhe allemal kleiner als $\frac{1}{2}\left(\frac{m^2c}{n^2}+b\right)$, alſo kleiner als die halbe Summe der Höhe der Saugröhre und der auf die Mündung der Saugröhre reducirten Höhe des Stiefels. Nur in dem Fall, wenn $\frac{1}{4}\left(\frac{m^2c}{n^2}+b\right)^2 = \frac{m^2ch}{n^2}$ iſt, erreicht das Waſſer völlig die Höhe $= \frac{1}{2}\left(\frac{m^2c}{n^2}+b\right)$, welches die halbe gröſte Höhe des Kolbens in dem Fall iſt, wenn Stiefel und Saugröhre gleich weit ſind. Schreibt man Kürze halber a ſtatt $\frac{m^2c}{n^2}+b$; ſo hat man $x = \frac{1}{2}a - \surd\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{m^2c}{n^2}h\right)$. Man ſ. Belidor a. a. O. 916 §.

Wenn $\frac{m^2ch}{n^2} > \frac{1}{4}\left(\frac{m^2c}{n^2}+b\right)^2$ iſt, ſo giebt es für x keinen möglichen Werth, alſo giebt es gar keine Stelle in der Saugröhre, wo das Waſſer ſtehen bleiben könnte. Dies iſt alſo der Fall, wo das Waſſer bis in den Stiefel treten wird. Schreibt man C ſtatt $\frac{m^2c}{n^2}$, ſo beſtimmt der Ausdruck $2\surd Ch > a$, oder $2\surd Ch > C+b$ die Umſtände, unter welchen dies erfolgen muß. Wenn demnach von den beyden Stücken des Saugwerks b und C, eins

gegeben iſt, ſo ergiebt der gefundene Ausdruck, wie groß das andere genommen werden müſſe, damit das Waſſer bis in den Stiefel trete, und hiernächſt, vermittelſt des Kolbens, bis zur Gußröhre gehoben werden könne. Man erhält nämlich $b < 2\sqrt{Ch} - C$, und $C > \frac{aa}{4h}$. Wenn alſo b gegeben iſt, ſo muß C ſo genommen werden, daß $C > \frac{(C+b)^2}{4h}$ bleibt. Fals dieſer Bedingung kein Genüge geſchehen kann, ſo muß b kleiner genommen werden. Man findet beym Muſſchenbröck a. a. O. im 2131-2134 §. 870. 871 S. eben dieſe Sätze: ſie ſind aber bey ihm zu allgemein ausgedrückt, ſo daß es ſcheint, er wolle ſie auch auf Pumpen der mittlern Art angewandt wiſſen, welches aber keinesweges geſchehen darf, wie die folgenden Unterſuchungen ergeben werden.

279 §.

55 Fig. Die Größe des ſchädlichen Raums, nebſt den übrigen Abmeſſungen einer Pumpe der mittlern Art, ſind gegeben: man ſucht, wie hoch das Waſſer ſowohl nach dem erſten, als auch den folgenden Kolbenzügen in die Saugröhre hineintreten werde.

Aufl. Es ſey A die höchſte, und C die niedrigſte Stelle des Kolbens. Die größte Höhe des Kolbens über das Waſſer YZ ſey $= a$, die Höhe der Saugröhre $= b$, die Höhe des ſchädlichen Raums $= f$, und ſein körperlicher Inhalt $= k^3$; ſo iſt $b + f + c = a$. Nun erhellet, daß beym erſten Kolbenzuge

zuge die in demſelben befindliche Luft ſich ausbreiten, alſo auch der in der Saugröhre befindlichen Luft, die anfangs ebenfalls noch die natürliche Federkraft h beſitzt, geſtatten werde, die Klappe B aufzuſtoßen, und zum Theil in den Stiefel zu treten. Die Höhe $ZX = x$, worauf das Waſſer bey dieſem erſten Kolbenzuge ſteigt, giebt nun die Proportion $m^2c + k^3 + n^2(b - x) : n^2b + k^3 = h : h - x$, woraus die Gleichung

$$x^2 - \left(\frac{m^2c + k^3}{n^2} + b + h\right)x = -\frac{m^2ch}{n^2}$$

folgt. Wenn man ſie mit der Gleichung des 273 §. vergleicht, ſo ergiebt ſich, daß die dortige Gleichung aus dieſer gefunden werde, wenn man $k^3 = 0$ ſetzt. Es wird alſo in dieſem Fall

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2c + k^3}{n^2} + b + h\right)$$

$$-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{m^2c + k^3}{n^2} + b + h\right)^2 - \frac{m^2ch}{n^2}\right)}.$$

Wird nun der Kolben niedergedrückt, und dadurch die im Stiefel befindliche Luft verdichtet; ſo drückt dieſe Luft zwar ſogleich das Stiefel-Ventil zu: ſie kann aber das Kolben-Ventil nicht aufſtoſſen, bevor ihre Federkraft anfängt, die Federkraft der äußern Luft zu übertreffen. Geſetzt, dies erfolgt allererſt, wenn der Kolben bis in M zurück getreten iſt, ſo wird derjenige Theil Luft, der zwiſchen C und M enthalten iſt, und mit der äußern gleiche Dichtigkeit hat, bey der noch übrigen Bewegung des Kolbens durch das Kolben-Ventil hinaus treten. Der ſchädliche

liche Raum zwiſchen B und C wird mit Luft von natürlicher Dichtigkeit angefüllet bleiben, da im Gegentheil die Dichtigkeit der in der Saugröhre befindlichen in den Raum n^2 $(b - x)$ ausgebreiteten Luft $= h - x = h'$ iſt. Demnach wird ſich beym zweyten Kolbenzuge die Klappe B nicht ſogleich öfnen, ſondern nur alsdann allererſt, wenn die Federkraft den im Raum BC zurückgebliebenen und ſich nun wieder ausdehnenden Luft anfängt, kleiner als h' zu werden. Geſetzt, dies erfolgt, wenn der Kolben bis L geſtiegen iſt, ſo wird der Raum zwiſchen B und L $= \frac{h}{h'} k^3$ ſeyn. Um alſo XW $= y$ zu finden, d. i. die Höhe, um welche das Waſſer in der Saugröhre beym zweyten Kolbenzuge ſteigt, muß man die Proportion brauchen

$$m^2 c + k^3 + n^2 (\beta - y) : n^2 \beta + \frac{h}{h'} . k^3 = h' : h' - y,$$

da dann, wie im 273 §., $\beta = b - x$ iſt. Es folgt hieraus die Gleichung

$$y^2 - \left(\frac{m^2 c + k^3}{n^2} + \beta + h' \right) y = \frac{(h - h') k^3}{n^2} - \frac{m^2 c h'}{n^2}.$$

Wenn $k^3 = 0$ iſt, ſo kommt dieſe Gleichung wiederum mit derjenigen überein, die im 273 §. für x gefunden, und im 275 §. gebraucht ward, für jeden folgenden Kolbenzug die Höhe zu finden, um welche das Waſſer in der Saugröhre ſteigt. Man wird alſo dieſe Gleichung leicht zu einem ähnlichen Gebrauch anwenden.

280 §.

Wenn die Größe des ſchädlichen Raums $=k^3$ gegeben iſt, nebſt den übrigen Abmeſſungen der Pumpe: die größte Höhe zu finden, worauf das Waſſer in der Saugröhre ſteigen kann.

Aufl. Wäre gar kein ſchädlicher Raum vorhanden, ſo müßte endlich das Waſſer ſo hoch ſteigen, als die Atmoſphäre es zu tragen vermag, alſo ungefähr 32 Fuß hoch. Allein dieſe Höhe wird das Waſſer nicht erreichen können, wenn ein ſchädlicher Raum vorhanden iſt. Das Waſſer wird nur ſo lange zu ſteigen fortfahren, bis die in der Saugröhre darüber ſtehende Luft ſo weit verdünnet iſt, daß der Kolben bis zu ſeiner größten Höhe hinauf gezogen werden müßte, wenn die im ſchädlichen Raum befindliche Luft auf eben den Grad verdünnet werden ſollte. Sobald nämlich die Luft in dieſen Zuſtand gekommen iſt, kann aus der Saugröhre keine Luft mehr in den Stiefel, alſo auch aus dem Stiefel nichts mehr durch das Kolben-Ventil in die freye Luft treten. In dieſem Zuſtande iſt alſo die Federkraft der innern Luft $= \frac{k^3}{m^2c+k^3}h$. Wenn alſo z die größte Höhe iſt, die das Waſſer erreichen kann, ſo muß $z + \frac{k^3}{m^2c+k^3}h = h$ ſeyn, folglich iſt

$$z = h\left(1 - \frac{k^3}{m^2c+k^3}\right) = \frac{m^2c}{m^2c+k^3}h.$$

Wäre

Wäre alſo z. E. der ſchädliche Raum dem 12ten Theil desjenigen Raums gleich, worin der Kolben auf und nieder ſpielt; ſo wäre $z = \frac{12}{13} \cdot 32$ Fuß = $29\frac{7}{13}$ Fuß; und wenn die Saugröhre gerade dieſe Höhe hätte, ſo würde das Waſſer zwar bis an das Ventil des Stiefels gehoben werden, aber keinesweges bis in den Stiefel hinein treten können. Uebrigens iſt noch zu bemerken, daß die gefundene Gleichung ſich auch ſo ausdrücken laſſe

$$\frac{m^2 c : n^2}{m^2 c : n^2 + k^3 : n^2} h = z,$$ da dann $m^2 c : n^2$ und $k^3 : n^2$ die auf die Weite der Saugröhre reducirten Höhen des Kolbenzuges und des ſchädlichen Raums ſind. Verſtehet man alſo durch c und k dieſe reducirten Höhen, ſo hat man $z = \frac{c}{c+k} h$. Dieſer Ausdruck kommt alsdenn völlig mit Belidors Auflöſung überein. Architectura Hydraulica III. Buch III. Cap. 928 §.

Jede von den dreyen Größen z, c, k, läßt ſich aus der Gleichung $z = \frac{c}{c+k} h$ finden, wenn zwey davon gegeben ſind, weil der Werth von h ein für allemal beſtimmt iſt. Es wird nämlich auch $k = \frac{c(h-z)}{z}$ und $c = \frac{kz}{h-z}$. Wäre alſo die Höhe der Saugröhre gegeben, nebſt der Größe des ſchädlichen Raums, ſo würde die lezte Gleichung ergeben, wie groß der Raum ſeyn muß, worin der Kolben auf und nieder ſpielt, damit das Waſſer endlich bis an das Stiefel-Ventil hinauf ſteige.

Wenn

Wenn die Höhe der Saugröhre kleiner iſt, als $z = \frac{m^2 c}{m^2 c + k^3} h$, ſo wird das Waſſer endlich in den Stiefel treten, und ſobald dies erfolgt iſt, wird bey fortwährenden Spielen des Kolbens wenigſtens ein Theil der in dem ſchädlichen Raum bisher zurückgebliebenen Luft durch das Kolben-Ventil heraus treten. Man ſiehet aber leicht, daß das Waſſer nicht bis an die niedrigſte Stelle des Kolbens ſteigen, alſo auch nicht durchs Kolben-Ventil treten, und bis zur Gußröhre gehoben werden könne, bevor alle Luft aus dem ſchädlichen Raum herausgetreten iſt. Dafern nicht alle dieſe Luft zuletzt heraus treten kann, ſo wird das Waſſer nur bis zu einer beſtimmten Höhe in dem Stiefel gelangen, und in dieſer Höhe unbeweglich ſtehen bleiben, es mag hiernächſt die Bewegung des Kolbens, ſo lange man will, fortgeſetzt werden.

281 §.

Die Umſtände zu finden, unter welchen das Waſſer entweder über die niedrigſte Stelle des Kolbens hinauf, und alſo auch hiernächſt über das Kolben-Ventil hinauf treten, oder nur bis zu einer beſtimmten Höhe im ſchädlichen Raum gebracht werden kann, wenn die Pumpe zur mittlern Art gehört.

Aufl. Der Inhalt des ſchädlichen Raums ſey, wie vorhin, $= k^3$, und ſeine Höhe $= f$, ſo wie der Inhalt des Raums, worin der Kolben ſpielt, $= m^2 c$ iſt. Wenn alſo der ſchädliche Raum eine cylindriſche Geſtalt hat, wovon jeder Querſchnitt $= r^2$ iſt,

ſo

ſo hat man $k^3 = fr^2$. Man nehme an, das Waſſer ſteige bis N und nicht höher, und es ſey die Höhe BN $= s$; ſo erhellet, daß die Pumpe ſich jetzt unter ähnlichen Umſtänden befinde, wie eine Pumpe der unvollkommenſten Art im 278 §., nur mit dem Unterſcheid, daß hier der Druck der Waſſerſäule BN mit der Federkraft der eingeſchloſſenen Luft zuſammen $= h - b$ ſeyn muß. Es iſt in der That eben ſo viel, als wenn die Saugröhre nicht vorhanden wäre, die äußere Luft aber nur mit der Federkraft $h - b$ gegen das Ventil B drückte. Nun iſt beym niedrigſten Kolbenſtande der Raum CN $= r^2 (f - s)$ mit Luft von natürlicher Dichtigkeit ausgefüllt, und ſie breitet ſich, indem der Kolben bis A ſteigt, in den Raum AN $= m^2 c + r^2 (f - s)$ aus, folglich wird in dieſem verdünnten Zuſtande ihre Federkraft $=$

$\dfrac{r^2 (f-s)}{m^2 c + r^2 (f-s)} h$. Demnach erhält man folgende Gleichung

$$\frac{r^2 (f-s) h}{m^2 c + r^2 (f-s)} + s = h - b$$

Die Vergleichung mit dem 278 §. ergiebt, daß hier s ſtatt des dortigen x, imgleichen f und r^2 ſtatt des dortigen b und n^2 ſtehen, wie vermöge der eben bemerkten Aehnlichkeit beyder Fälle ſeyn muß. Jedoch kommt dieſe Gleichung nicht in allen Stücken mit der dortigen überein, weil hier nur einmal $h - b$ ſtatt des dortigen h ſtehet. Reducirt man die gefundene Gleichung gehörig, ſo wird

$$s^2 + \left(b - f - \frac{m^2 c}{r^2}\right) s = \left(\frac{m^2 c}{r^2} + f\right) b - \frac{m^2 c}{r^2} \quad h,$$

alſo

alſo

$$s = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2c}{r^2} + f - b\right) \pm \surd\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{m^2c}{r^2} + f - b\right)^2 + \left(\frac{m^2c}{r^2} + f\right) b - \frac{m^2ch}{r^2}\right),$$ oder

$$s = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2c}{r^2} + f - b\right) \pm \surd\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{m^2c}{r^2} + f + b\right)^2 - \frac{m^2ch}{r^2}\right).$$

Vermöge der Vorausſetzung muß

$$b < \frac{m^2ch}{m^2c + k^3}, \text{ oder } b < \frac{m^2ch : r^2}{m^2c : r^2 + k^3 : r^2}$$

ſeyn, und es iſt hier $k^3 : r^2 = f$, alſo iſt

$$b < \frac{m^2ch : r^2}{m^2c : r^2 + f}, \text{ und } \left(\frac{m^2c}{r^2} + f\right) b < \frac{m^2ch}{r^2},$$ folglich

$$\surd\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{m^2c}{r^2} + f - b\right)^2 + \left(\frac{m^2c}{r^2} + f\right) b - \frac{m^2ch}{r^2}\right) < \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2c}{r^2} + f - b\right).$$

Wenn demnach $\frac{m^2c}{r^2} + f > b$ iſt, ſo ſind beyde Werthe von s poſitiv, und der kleinſte von beyden muß hier gebraucht werden. Dafern aber $\frac{m^2c}{r^2} + f < b$ iſt, ſo werden alle beyde Werthe von

s ne-

s negativ, und davon kann keiner ſtatt haben. Das Waſſer iſt nun über alle beyde Stellen, wo es hängen bleiben könnte, ſchon hinüber. Unter den beyden Bedingungen alſo, daß $b < \frac{m^2ch}{r^2} : \left(\frac{m^2c}{r^2} + f\right)$, und zugleich $\frac{m^2c}{r^2} + f < b$ iſt, wird die Pumpe, fals ſonſt kein Fehler vorhanden iſt, das Waſſer ſicher bis zur Gußröhre heben. Hieher gehört auch noch der Fall, wenn $\frac{m^2c}{r^2} + f = b$ iſt, und zugleich $b < \frac{m^2ch}{r^2} : \left(\frac{m^2c}{r^2} + f\right)$, weil alsdenn beyde Werthe von s unmöglich werden. Das Waſſer wird auch bey dieſer Beſchaffenheit der Pumpe bis zur Gußröhre gehoben werden. Demnach kann nur in dem einzigen Fall das Waſſer im ſchädlichen Raum auf einer beſtimmten Höhe ſtehen bleiben, wenn $\frac{m^2c}{r^2} + f > b$ iſt, wenn gleich die andre Bedingung $b < \frac{m^2ch}{r^2} : \left(\frac{m^2c}{r^2} + f\right)$ ebenfals ſtatt hätte. Sollen aber auch in dieſem Fall beyde Werthe von s möglich bleiben; ſo muß nicht $\frac{1}{4}\left(\frac{m^2c}{r^2} + f + b\right)^2 < \frac{m^2ch}{r^2}$ ſeyn. Sind dieſe beyden Ausdrücke einander gleich, ſo bleibt das Waſſer in der Höhe $\frac{1}{2}\left(\frac{m^2c}{r^2} + f - b\right)$

hän-

hängen. In allen Fällen aber, wenn $\frac{m^2c}{r^2}+f > b$, und $\frac{1}{4}\left(\frac{m^2c}{r^2}+f+b\right)^2 < \frac{m^2ch}{r^2}$, alſo $\frac{m^2c}{r^2}+fb < 2\sqrt{\frac{m^2ch}{r^2}}$ iſt, wird das Waſſer nirgend ſtehen bleiben, ſondern das Saugwerk ſeine gehörige Vollkommenheit haben.

282 §.

Herr Parent hat in ſeinen Recherches de Phyſique et de Mathematique 1700 acht Aufgaben vorgetragen, welche die Theorie der Saugwerke betreffen, und ſie damals als neue bis dahin unbekannte Lehren vorgetragen, ohne die Beweiſe ſeiner Auflöſungen beyzufügen, mit einer Aufforderung an die damaligen Kunſtverſtändige, die Beweiſe zu ſuchen. Herr Belidor trägt dieſe Aufgaben des Hrn. Parent mit deſſen eigenen Worten vor, in der Architect. Hydraul. III. Buch III. Cap. 919-926 §., und entwickelt hiernächſt die Theorie, worauf die Auflöſungen dieſer Aufgaben beruhen. Sein Vortrag iſt mit dem bisherigen in der Hauptſache einerley, und giebt eben die Reſultate, einen einzigen Umſtand ausgenommen, wovon gleich mit mehrern Erwähnung geſchehen ſoll. Das Reſultat der ganzen Unterſuchung kommt nämlich auf folgende Sätze an.

Wenn $b < \frac{m^2c}{m^2c+r^2f}h$ iſt, alſo die Höhe der Saugröhre kleiner iſt, als die vierte Proportionallinie zur Summe des Raums, worin der Kolben

ſpielt, und des ſchädlichen Raums, zum Raum, worin der Kolben ſpielt, und der Höhe einer Waſſerſäule, deren Gewicht dem Druck der Atmoſphäre gleich iſt; ſo hat das Saugwerk allemal ſeine gehörige Vollkommenheit, falls auch überdem $\frac{m^2c}{r^2} + f$ nicht größer als b iſt. Wenn die erwähnte vierte Proportiallinie z heißt, ſo hat man $m^2c + r^2f : m^2c = h : z$, und da ließe ſich das erſte Verhältniß auch ſo ausdrücken, $\frac{m^2c}{n^2} + \frac{r^2f}{n^2} : \frac{m^2c}{n^2}$, ſo daß ſtatt des ſchädlichen Raums, und des körperlichen Raums, worin der Kolben ſpielt, auch ihre auf die Weite der Saugröhre reducirten Höhen gebraucht werden können. Vorhin ward eben dies Verhältniß ſo ausgedrückt, $\frac{m^2c}{r^2} + f : \frac{m^2c}{r^2}$, alſo ward die Höhe des ſchädlichen Raums ſelbſt, und die auf die Weite des ſchädlichen Raums reducirte Höhe des Kolbenzuges gebraucht. In Anſehung dieſer erſten Bedingung iſt es alſo einerley, ob man beyde Räume auf die Weite der Saugröhre, oder des ſchädlichen Raums reducirt. In Anſehung der zweyten Bedingung aber iſt dies nicht einerley. Zwar kann man ſie auch ſo ausdrücken, $\frac{m^2c}{n^2} + \frac{r^2f}{n^2} < \frac{r^2b}{n^2}$, aber man ſiehet wohl, daß die Saugröhre alsdenn ſo betrachtet werden muß, als ob ſie mit dem ſchädlichen Raum einerley Weite hätte, welches bey der vorigen Bedingung nicht ſeyn mußte.

Da-

Dafern außer der erſten Bedingung überdem $\frac{m^2 c}{r^2} + f > b$ iſt; ſo hat das Saugwerk nur alsdenn ſeine Vollkommenheit, wenn auch $\frac{m^2 c}{r^2} + b + f < 2\sqrt{\frac{m^2 c}{r^2} h}$ iſt. Dieſe letzte Bedingung ließe ſich nun auch ſo ausdrücken,

$$\frac{m^2 c}{n^2} + \frac{r^2 b}{n^2} + \frac{r^2 f}{n^2} < 2\sqrt{\frac{m^2 c}{n^2} \cdot \frac{r^2 h}{n^2}},$$

ſo daß wiederum die auf die Mündung der Saugröhren reducirten Höhen des Kolbenzuges und des ſchädlichen Raums in Rechnung gebracht würden: allein alsdenn erhält man nicht allein $\frac{r^2 b}{n^2}$ ſtatt b, wie vorhin, ſondern überdem auch $\frac{r^2 h}{n^2}$ ſtatt h. Alſo iſt es bey dieſen Unterſuchungen nicht allgemein verſtattet, ſtatt eines Saugwerks ein andres zu betrachten, das aus dem vorigen entſtehet, wenn man die Höhen des Kolbenzuges und ſchädlichen Raums auf die Mündung der Saugröhre reducirt. Dies hat Parent allemal gethan, und Belidor thut es auch: allein eben deswegen bedarf ihr Vortrag einiger Verbeſſerung. Wenn der ſchädliche Raum mit der Saugröhre allemal einerley Weite hätte; ſo hätte es ſeine Richtigkeit, daß die Höhe des Kolbenzuges auf die Weite der Saugröhre reducirt werden müßte; allein dieſer Fall kommt in der Anwendung

gar nicht vor. Gewöhnlich iſt die Weite des ſchädlichen Raums und des Kolbenzuges einerley, und alsdenn bedarf es gar keine Reduction, weil beyde Räume ſich nun wie ihre Höhen verhalten. Der körperliche Raum der Saugröhre kömmt bey dieſer Rechnung gar nicht, ſondern allein ihre Höhe in Betrachtung, weil bey gleicher Federkraft der im ſchädlichen Raum und im Raum des Kolbenzuges ausgebreiteten Luft, das Waſſer auf einerley Höhe ſteht, die Saugröhre mag weit oder eng ſeyn. Die Federkraft dieſer Luft hängt aber blos von dem Verhältniß des noch leeren Theils im ſchädlichen Raum gegen den Raum des Kolbenzuges ab, und gar nicht von der Größe des körperlichen Raums der Saugröhre.

283 §.

Es ſcheint, daß beide angeführte Schriftſteller, Parent ſowohl als Belidor, dieſen Umſtand überſehen haben: ſie könnten ſonſt nicht die allgemeine Regel geben, daß die Höhen des Kolbenzuges und des ſchädlichen Raums allemal auf die Mündung der Saugröhre reducirt werden müſſen. Statt deſſen, daß hier im 281 §. die Höhe BN geſucht iſt, berechnet Belidor im 933 §. a. a. O. die Höhe ZN, da dann, wenn die Rechnung richtig iſt, beyde Wege auf einerley Reſultat führen. Er ſetzt die Proportion an $z + c - x : z - x = a : a - x$, und bey ihm iſt a das, was hier h heißt, z iſt die Summe der Höhen der Saugröhre, und der auf ihre Mündung reducirten Höhe des ſchädlichen Raums, $x =$ ZN. Allein es iſt eigentlich der körperliche Raum AN : Körp. Raum CN $= a : a - x$, und nach der bis-

heri-

herigen Bezeichnung wäre der körperliche Raum AN $= n^2 b + fr^2 + m^2 c - n^2 b - r^2 (x - b) = m^2 c + fr^2 - r^2 (x - b)$, und der körperliche Raum CN$= fr^2 - r^2 (x - b)$, alſo

$m^2 c + r^2 f - r^2 (x - b) : r^2 f - r^2 (x - b) = h : h - x$,

oder

$$\frac{m^2 c}{r^2} + f + b - x : f + b - x = h : h - x.$$

Vergleicht man dieſe Proportion mit der Belidorſchen, ſo ſiehet man wohl, daß beyde überein kommen, wenn man z ſtatt $f + b$, c ſtatt $\frac{m^2 c}{r^2}$, und a ſtatt h ſchreibt: allein auf ſolche Art muß z die Summe der Höhe der Saugröhre und der wahren, nicht der reducirten Höhe des ſchädlichen Raums, und c die auf die Weite des ſchädlichen Raums nicht der Saugröhre reducirte Höhe des Kolbenzuges bedeuten: alſo die wahre Höhe deſſelben, wenn der Raum des Kolbenzuges und der ſchädliche Raum gleich weit ſind, die Saugröhre mag eben ſo weit oder enger ſeyn. Die erwähnte Proportion giebt die Gleichung

$(m^2 c + r)(b + f - x)(h - x) = r^2 (b + f - x) h$,

woraus

$$x^2 - \left(\frac{m^2 c}{r^2} + b + f\right) x = - \frac{m^2 c}{r^2_2} h,$$

alſo

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2 c}{r^2} + b + f\right) \pm \surd \left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{m^2 c}{r^2} + b + f\right) - \frac{m^2 c}{r^2} h\right.$$

 folgt.

folgt. Im 281 §. war $BN = s$, alſo iſt nun $x = b + s$, und $s = x - b$. Setzt man aber $x - b$ ſtatt s in der für s gefundenen Gleichung im 281 §., ſo kommt die jetzt gefundene Gleichung heraus, daß alſo beyde Rechnungen überein kommen. Wird z ſtatt $b + f$, c ſtatt $\frac{m^2 c}{r^2}$, und a ſtatt h geſetzt, ſo hat man

$$x = \tfrac{1}{2}(z + c) \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}(z + c)^2 - ac\right)}$$

eben ſo, wie Belidor a. a. O. den Werth für x findet, obgleich derſelbe, vermöge der eben vorgetragenen Erinnerungen, davon eine unrichtige Anwendung macht. Weil allemal $x > b$ seyn muß, vermöge der Vorausſetzung, ſo muß vor der Wurzelgröße das Zeichen (+) gebraucht werden, wenn $\frac{1}{2}(z + c) < b$ iſt, obgleich Belidor ſagt, man müſſe allemal das Zeichen (−) brauchen, ſo lange die Wurzelgröße möglich iſt. Dieſe und die übrigen ſchon erwähnten Unrichtigkeiten haben daher ihren Urſprung, weil Belidor ſich durch die Aehnlichkeit dieſer Pumpe der mittlern Art mit der Pumpe der unvollkommenſten Art hat verführen laſſen, was von der letztern gilt, ohne die nöthige Einſchränkung auf die erſte anzuwenden, und weil er nicht bedacht hat, daß hier bey gegenwärtiger Unterſuchung der ſchädliche Raum eigentlich das werde, was bey der Unterſuchung über die Pumpe der unvollkommenſten Art die Saugröhre war.

Parent und Belidor unterſcheiden übrigens ganz richtig die beyden Fälle von einander, wenn $c + f > b$ iſt, oder nicht: und geben die Vorſchrift, daß wenn von dieſen dreyen Stücken c, f, b, zwey gegeben ſeyn, und das dritte gefundene werden ſolle, die Rechnung

nach

nach den Regeln des 280 §. angeſtellt werden müſſe. Belidor ſagt im 927 §. a. a. O., daß in der Verſchiedenheit dieſer Fälle eben der Knoten der Parentſchen Theorie ſtecke: allein er ſelbſt erkläret ſich nicht mit der nöthigen Deutlichkeit über den Grund der Verſchiedenheit dieſer Fälle, der hier im 281 §. deutlich vor Augen gelegt iſt. Beyde geben übrigens für den Fall, wenn $c + f > b$ iſt, auch die an ſich richtige Regel, daß das Saugwerk nun alsdenn nur ſeine Vollkommenheit habe, wenn die Wurzelgröße in der zuletzt gefundenen Gleichung unmöglich, alſo $\frac{1}{4}(c+f+b)^2 > hc$, oder $c+f+b > 2\sqrt{ch}$ ſey, und ſie leiten daraus die Auflöſung der folgenden drey Aufgaben her.

284 §.

Die Höhen des ſchädlichen Raums f, und des Kolbenzuges c, ſind gegeben, man ſucht die Höhe b der Saugröhre.

Aufl. Man ſuche den Quotienten $\frac{ch}{c+f}$, und vergleiche denſelben mit der Summe $c + f$. Wenn der erwähnte Quotient nicht kleiner als $c + f$ iſt, ſo wird erfordert, daß $b < \frac{ch}{c+f}$ ſey (280 §.) Dafern aber der gedachte Quotient kleiner iſt, als $c+f$, ſo muß $c+f+b < 2\sqrt{ch}$ ſeyn, alſo muß man $b < 2\sqrt{ch} - c - f$ nehmen. Parent giebt folgendes Exempel: Es ſey die Höhe des reducirten Kolbenzuges 8 Fuß, des ſchädlichen Raums 12 Fuß, das Verhätniß der Querſchnitte des Stiefels und der Saugröhre iſt nicht angegeben. Man nehme an,

es ſey wie 2 : 1, ſo ſind die wahren Höhen des Kolbenzuges und ſchädlichen Raums 4 Fuß und 6 Fuß, dafern beyde gleich weit ſind, und man ſtelle nun zuförderſt nach der Regel des 280 §. die Prüfung an, wie groß die Höhe der Saugröhre höchſtens ſeyn könne. Die Regel giebt $\frac{8 \times 32}{8+12} = \frac{256}{20} = 12\frac{4}{5}$. Weil dieſe Zahl größer als $6 + 4$, alſo hier größer als $b + f$ iſt; ſo genügt es, die Höhe der Saugröhre etwas kürzer, als $12\frac{4}{5}$ Fuß zu nehmen. Parent und Belidor ſehen dies Exempel ſo an, als wenn es zum zweyten Fall gehörte, weil beyde reducirte Höhen zuſammen die Zahl $12 + 8 = 20$ geben, welche größer als $12\frac{4}{5}$ iſt. Deswegen ſuchen ſie b aus der Formul $b < 2\sqrt{ch} - c - f$, und ſetzen $c = 8$ Fuß, $f = 12$ Fuß. Die Rechnung giebt $ch = 256$, $2\sqrt{ch} = 32$, und $2\sqrt{ch} - c - f = 12$. Dies Reſultat iſt von dem vorigen zwar nicht ſonderlich verſchieden, indeſſen iſt jene Rechnung richtiger und kürzer, als dieſe. In dem reducirten Saugwerk muß die Saugröhre kleiner als 12 Fuß ſeyn. Denn wenn ſie 12 Fuß wäre, ſo würde das Waſſer in der Höhe von $\frac{1}{2}(c + f + b)$, d. i. 16 Fuß, alſo 4 Fuß hoch über dem Ventil ſtehen bleiben. In dem natürlichen Saugwerk kann die Saugröhre volle 12 Fuß hoch ſeyn, weil $\frac{1}{2}(c + f + b) = 11$ iſt, und $s = \frac{1}{2}(c + f - b) = -1$ negativ ſeyn würde.

285 §.

Die Höhen der Saugröhre b und des Kolbenzuges c ſind gegeben, man ſucht die Höhe des ſchädlichen Raums f.

Aufl.

Aufl. Man ſuche den Quotienten $\frac{c(h-b)}{b}$, addire dazu die Höhe des Kolbenzuges c und vergleiche die Summe mit der Höhe der Saugröhre b. Dafern dieſe Summe nicht gröſſer als b iſt; ſo iſt der gefundene Quotient $\frac{c(h-b)}{b}$ die Gränze, welche f nicht übertreffen muß: widrigenfalls muß $c+f+b < 2\sqrt{ch}$, alſo $f < 2\sqrt{ch}-b-c$ ſeyn. Es ſey $c =$ 4 Fuß, $b = 12\frac{4}{5}$, $m^2 = r^2$, und $\frac{m^2}{n^2}$ 2, ſo erhält man $\frac{r^2 f}{n^2} = \frac{m^2 f}{n^2} = 12$, alſo $f = 6$. Weil nun $6+4=10 < 12\frac{4}{5}$ iſt, ſo hat man in der That ſchon die Auflöſung der Frage, wenn man $f < 6$ Fuß nimmt. Weil aber $12+8 > 12\frac{4}{5}$ iſt, ſo rechnen Parent und Belidor dieſe Aufgabe zum zweyten Fall. Wenn man eben ſo mit ihnen verfährt, ſo erhält man $2\sqrt{ch}=32$, $b+c=20\frac{4}{5}$, und $f < 32 - 20\frac{4}{5}$, oder $f < 11\frac{1}{5}$. Dies Verfahren giebt alſo hier ſowohl die Höhe des ſchädlichen Raums, als auch im vor. §. die Höhe der Saugröhre, kleiner als nöthig iſt.

286 §.

Die Höhen der Saugröhe und des ſchädlichen Raums ſind gegeben, man ſucht die Höhe des Kolbenzuges.

Aufl. Man ſuche den Quotienten $\frac{r^2 fb}{h-b}$ (280 §.). Fals nun die Summe dieſes Quotien-

ten und der Höhe des ſchädlichen Raums nicht größer als b iſt, ſo muß die Höhe des Kolbenzuges größer als der gedachte Quotient ſeyn. Fals aber das Gegentheil ſtatt hat, ſo muß $c + f + b < 2\sqrt{ch}$ ſeyn, alſo $c^2 + 2(f+b)c + (f+b)^2 < 4hc$, und $c^2 - (4h - 2f - 2b)c < -(f+b)^2$. Dies giebt $c < 2h - f - b \pm \sqrt{((2h-f-b)^2 - (f+b)^2)}$, oder $c < 2h - f - b \pm \sqrt{2h} . \sqrt{2(h-f-b)}$.

Weil allemal $f + b < h$ iſt, ſo iſt die Wurzelgröße allemal möglich: und weil die Wurzelgröße kleiner iſt, als $2h - f - b$; ſo ſind beyde gefundene Gränzen von c poſitiv. Mit dieſen beyden Gränzen hat es nun eigentlich folgende Bewandniß. Es muß $c - (2h - f - b) < \pm\sqrt{((2h-f-b)^2 - (f+b)^2)}$ ſeyn. Das ſind zwey Sätze, und der eine iſt dieſer: $c - (2h - f - b) < -\sqrt{((2h-f-b)^2 - (f+b)^2)}$. Da nun allemal $c < h$ iſt, und $f + b < h$, ſo ſind dieſe beyde Werthe negativ, wie erfordert wird: aber eben deswegen iſt wirklich $c - (2h - f - b) > -\sqrt{((2h-f-b)^2 - (f+b)^2)}$, und $c > 2h - f - b - \sqrt{((2h-f-b)^2 - (f+b)^2)}$. Man vergleiche hiemit den 20 §. der A. R. Der andere von den obgedachten Sätzen iſt:

$$c - (2h - f - b) < + \sqrt{((2h-f-b)^2 - (f+b)^2)}.$$

Hier mag die voranſtehende Größe poſitiv oder negativ ſeyn, ſo folgt allemal, es ſey

$$c < 2h - f - b + \sqrt{((2h-f-b)^2 - (f+b)^2)}.$$

Demnach giebt dieſe Rechnung ein paar Gränzen, zwiſchen welchen c genommen werden muß, und Parent hat ganz recht, wenn er ſagt, daß jede Zahl, die

die zwiſchen dieſen Gränzen fällt, der Frage ein Genüge leiſte, obgleich Belidor a. a. O. 938 §. das Gegentheil ſagt, und nur den kleinſten von beyden Werthen, als den eigentlich geſuchten gelten laſſen will. Es hat zwar ſeine Richtigkeit, daß wegen andrer Urſachen, die von der übrigen mechaniſchen Einrichtung der Pumpe abhängen, gewöhnlich ein Werth genommen wird, welcher der kleinſten Gränze am nächſten kommt: allein davon iſt hier die Frage noch nicht, und beyde Gränzen geben eigentlich die vollſtändige Auflöſung der gegenwärtigen Aufgabe. Ja man darf ſchlechterdings nicht die Höhe des Kolbenzuges der kleinſten Gränze gleich ſetzen, dafern das Saugwerk nicht ſtocken ſoll, wie aus der Vergleichung mit dem 281 §. erhellet; und Belidor hätte nicht ſagen ſollen, daß man wohl thue, wenn man *c* etwas gröſſer nehme, ſondern vielmehr, daß man *c* etwas gröſſer nehmen müſſe. Uebrigens aber behält es hier ebenfalls bey den gegen alle beyde ſchon im 282. und 283 §. gemachten Erinnerungen ſein Bewenden. Durch *c* und *f* müſſen nicht auf die Weite der Saugröhre reducirte Höhen, ſondern die wahren Höhen des Kolbenzuges und ſchädlichen Raums verſtanden werden, wenn beyde gleich weit ſind. Wären aber beyde ungleich weit, ſo muß man durch *c* die auf die Weite des ſchädlichen Raums, nicht aber der Saugröhre, reducirte Höhe des Kolbenzuges verſtehen.

Es ſey z. E. die auf die Weite der Saugröhre reducirte Höhe des ſchädlichen Raums = 12 Fuß, die Höhe der Saugröhre = $12\frac{4}{5}$ Fuß; ſo findet man den Quotienten $\frac{12 \times 12\frac{4}{5}}{32 - 12\frac{4}{5}} = 8$. Falls nun der

Raum

Raum des Kolbenzuges, und der ſchädliche Raum gleich weit ſind, die Saugröhre aber nur halb ſo weit iſt, ſo muß die wahre Höhe des Kolbenzuges gröſſer als 4 Fuß ſeyn, und die wahre Höhe des ſchädlichen Raums iſt 6 Fuß. Weil nun $6 + 4 = 10 < 12\frac{4}{5}$ iſt, ſo bedarf es keiner weitern Rechnung, um die Höhe des Kolbenzuges zu finden. Wären aber alle drey Theile des Saugwerks gleich weit, und die Höhe von 12 Fuß die wahre Höhe des ſchädlichen Raums, ſo müſte man mit Parent ſo rechnen:

$$2(h-f-b) = 14{,}4$$
$$\sqrt{2(h-f-b)} = 3.8$$
$$\sqrt{2h} = 8$$
$$\sqrt{2h}\cdot\sqrt{2(h-f-b)} = 30{,}4$$

$$h-f-b = 7{,}2$$
$$h = 32$$
$$2h-f-b = 39{,}2$$
$$\mp 30{,}4$$

die eine Gränze 8,8
die andre Gränze 69,6

Der XVIII. Abſchnitt.

Unterſuchungen über die Geſchwindigkeit des Waſſers im Stiefel und deſſen Druck gegen den Kolben.

287 §.

Bey der bisherigen Unterſuchung über die Beſchaffenheit eines Saugwerks iſt angenommen worden, daß das Waſſer noch im anfänglichen Hinauf-

ſteigen

ſteigen in der Saugröhre begriffen ſey, und den Kolben noch nicht erreicht habe. Sobald es bis an denſelben gelangt iſt, wird es ihm hiernächſt beſtändig folgen. Woſern nämlich die gröſte Kolbenhöhe nicht über 31 Pariſer Fuß angenommen wird, ſo kann die Atmoſphäre es ſicher bis zur höchſten Kolbenhöhe hinauftreiben. Geſchicht dies würklich bey jedem Kolbenzuge, ſo wird die Pumpe bey jedem Hub ſoviel Waſſer geben, als den körperlichen Raum des Kolbenzuges ausfüllet. Die Abſicht der ganzen Einrichtung eines Saugwerks gehet dahin, daß dies würklich geſchehen ſoll: allein man ſiehet wohl, daß es vornämlich auf die Geſchwindigkeit ankommen werde, womit der Kolben ſteigt, wenn man dieſen Erfolg erwarten will. Stiege der Kolben von ſeiner niedrigſten Stelle bis zur höchſten in jedem Augenblick mit eben derſelben Geſchwindigkeit, womit die höchſte Fläche des Waſſers im Stiefel aufwärts ſteigt; ſo erhellet, daß das Waſſer demſelben beſtändig unmittelbar nachfolge, ohne zwiſchen dem Kolben und ſeiner eigenen höchſten Fläche einen Zwiſchenraum zu laſſen. Falls der Kolben ſchneller ſtiege, als das Waſſer folgen kann, ſo würde zwiſchen beyden ein leerer Raum bleiben, und in dem Augenblick, da der Kolben in ſeiner höchſten Stelle ſchon wieder umkehrt, würde der Raum des Kolbenzuges noch nicht mit Waſſer angefüllet ſeyn: alſo würde auch nicht auf jeden Kolbenzug ſoviel Waſſer gehoben werden, als die Vollkommenheit der Pumpe erfordert. Stiege der Kolben nicht ſo geſchwinde, als das Waſſer ſteigen kann, ſo würde zwar jeder Kolbenhub ſoviel Waſſer geben, als der Raum des Kolbenzuges faſſen kann: allein es würde mehr Zeit darüber hingehen,

gehen, als nöthig wäre, wenn der Kolben mit dem Waſſer gleich ſchnell ſtieg.

288 §.

Weil in dieſem zuletzt erwehnten Fall das Waſſer ſchneller zu ſteigen ſtrebt, als der Kolben ausweicht, ſo entſteht daher ein Druck gegen den Kolben, der denſelben aufwärts treibt. Je langſamer der Kolben ſteigt, deſto ſtärker iſt dieſer Druck, und im Gegentheil deſto geringer, je ſchneller der Kolben ſteigt: dies läßt ſich ohne weitläuftige Rechnung überſehen. Wenn eine Kraft an der Kolbenſtange vertical aufwärts ziehet, ſo kommt der erwehnte Druck dieſer Kraft zu Hülfe, daß alſo weniger Kraft den Kolben zu bewegen erfordert wird, wenn derſelbe langſamer ſteigt wie das Waſſer, als wenn man ihn in eine mit dem Waſſer gleich ſchnelle, oder wohl gar ſchnellere Bewegung ſetzen wollte. Was man aber auf der einen Seite in Abſicht der Kraft gewinnet, das verliert man in Anſehung der Zeit: denn wenn der Kolben eben ſo ſchnell als das Waſſer ſtiege, ſo würde das Saugwerk ohne Zweifel in eben der Zeit mehr Waſſer ergieſſen, als es bey einer langſamern Bewegung des Kolbens ergieſſen könnte. Dies veranlaſſet die Unterſuchungen über die Frage: wie ſchnell der Kolben ſteigen müſſe, damit man den gröſten Vortheil erhalte, welche ich nunmehr anſtellen werde.

289 §.

54 Fig. Es ſind alle Abmeſſungen eines Saugwerks gegeben: man ſucht den Widerſtand, welchen eine bey *G* an der Kolbenſtange vertical aufwärts ziehende Kraft im erſten Augen-

genblick, da ſie den Kolben hebt, zu überwinden hat.

Aufl. Wenn man den Kolben P in einer gegebenen Stelle ruhend betrachtet, und dabey annimmt, daß über demſelben bis an die Gußröhre ſchon eine Waſſerſäule in der Höhe $= h$ ſtehe; ſo wird der Kolben von dem Gewicht dieſer Säule unterwärts gedruckt; und hiezu kommt noch der Druck der Atmoſphäre, den ich hier dem Druck einer Waſſerſäule auf einer der Mündung des Stiefels gleichen Grundfläche in der Höhe Π gleich ſetze. Demnach iſt der geſammte Druck nach unten $= \Pi + h$. Wenn nun f die Höhe der untern Grundfläche des Kolbens über den Waſſerpaß YZ iſt, ſo drückt das unter demſelben befindliche Waſſer gegen ſeine untere Grundfläche aufwärts mit einer Gewalt, die dem Gewicht einer Waſſerſäule auf eben dieſer Grundfläche in der Höhe von $\Pi - f$ gleich iſt. Alſo iſt der geſammte Druck, womit der Kolben unterwärts gepreſt wird, $= \gamma m(h+f)$, wenn γ das Gewicht eines Cubicfuſſes Waſſer iſt, welches ich hier $= 1$ ſetze. Hiezu kommt noch das eigene Gewicht des Kolbens und der Kolbenſtange. Wenn man alſo dies ein für allemahl mit zu dem Widerſtand rechnet, ſo iſt übrigens der geſuchte Widerſtand $= m(h+f)$.

Ich werde in der Folge annehmen, daß die Ausgußröhre unmittelbar über dem Kolben, wenn er in ſeiner höchſten Stelle ſteht, angebracht ſey. Steht alsdenn der Kolben an ſeiner niedrigſten Stelle; ſo iſt h mit der Höhe des Kolbenzuges einerley, ſo wie $h+f$ die Höhe iſt, auf welche das Waſſer von dem Saugwerk gehoben wird. Hinführo werde ich dieſe ganze Höhe durch f verſtehen, und ſo iſt der geſuchte

Wider-

Widerſtand des Kolbens $= mf$. In ſolchen Fällen, wo das Gußrohr beträchtlich hoch über dem Kolben angebracht iſt, behält die Pumpe nicht blos die Natur eines Saugwerks, ſondern ſie wird zugleich ein Druckwerk, wovon die Theorie unten beſonders vorgetragen wird.

290 §.

Sobald der Kolben würklich in Bewegung kommt, muß die Kraft, welche ihn hinauf zieht, einen gröſſern Widerſtand überwinden. Nun drückt ihn nämlich das unter demſelben befindliche Waſſer nicht mehr mit der Gewalt $m(\Pi - f)$ aufwärts, ſondern dieſer Druck iſt kleiner, und bleibt deſto weniger beträchtlich, je mehr die Geſchwindigkeit des Kolbens wächſt: er verſchwindet ganz, wenn der Kolben eben ſo ſchnell, oder gar ſchneller, als das Waſſer ſteigt. Demnach würde in dieſen zuletzt erwähnten Fällen die an dem Kolben angebrachte Kraft den ganzen Druck der Atmoſphäre zu überwinden haben, und der Widerſtand wäre $= m \,.\, \Pi$. Dafern aber der Kolben noch nicht ſo ſchnell, als das Waſſer ſteigt, und das Waſſer nun gegen den Kolben mit der Gewalt $m(\Pi - k)$ drückt, ſo iſt $k > f$. Die Atmoſphäre drückt mit der Gewalt $= m\Pi$ unterwärts: wird alſo jener Druck von dieſem abgezogen, ſo erhält man $m \,.\, k$ für den Druck, womit der Kolben niederzugehen ſtrebt, und das iſt nun der Widerſtand, welchen die an G angebrachte Kraft zu überwinden hat.

Gewöhnlich iſt die Saugröhre grade und vertical, und daſſelbe iſt auch bey den bisherigen Rechnungen im vorigen Abſchnitt vorausgeſetzt worden. Wenn indeſſen die Saugröhre auch ſonſt eine jede belie-

beliebige Geſtalt hätte, ſo würden die eben vorgetragenen Sätze, welche den Widerſtand des Kolbens betreffen, dennoch ihre Anwendung finden.

291 §.

Ein vertical ſtehendes cylindriſches oder prismatiſches Gefäß *ABEO* ſey mit einer graden cylindriſchen Röhre *opqr*, die gegen die Verticallinie unter dem Winkel η geneigt iſt, vermittelſt einer dritten Röhre *OmnR*, die eine willkührliche Geſtalt hat, verbunden. Im Gefäß *ABEO* ſtehe das Waſſer anfangs bis an *AB*, und erſtrecke ſich durch die Röhre *OmnR* in die cylindriſche *opqr* bis an $\alpha\beta$. Auf *AB* drücke eine gegebene Kraft, welche das Waſſer forttreibt, ſo daß *AB* in der Zeit t in *CD*, und zugleich $\alpha\beta$ in *pq* rückt. Wenn nun das Waſſer auch durch einen Druck gegen *pq* verzögert wird, ſo frägt ſich, wie groß die Geſchwindigkeit des Waſſers am Ende der Zeit t ſey. 34 Fig.

Aufl. Man muß aus dem 235 §. die Gleichung

$$q - \frac{\omega^2 q}{y^2} + \frac{\omega dq}{dw} \int \frac{ds}{z} = x - u + \Pi - \pi$$

auf den gegenwärtigen Fall ſo anwenden. Durch den unterſten Punct K der centriſchen Linie ſey K*l* horizontal, und *kl* ſey vertical. Wenn nun auch GL horizontal iſt, ſo hat man im gegenwärtigen Fall KD $= x$, KL $= u$: und wenn man $kl = \beta$, $kc = \varepsilon$, $cG = w$ ſetzt, ſo wird $u = \beta + (\varepsilon + w) \cos \eta$. Man ſetze ferner alle Querſchnitte des Gefäſſes AOEB $= h$,

und die Querſchnitte des Cylinders $opqr = m$, ſo muß man hier h und m ſtatt y und ω ſchreiben. Ueberdem wird $AD = \frac{mw}{h}$, und wenn $KA = a$ iſt, ſo giebt dies $x = a - \frac{mw}{h}$. Um das Integral $\int \frac{ds}{z}$ zu haben, erwege man, daß daſſelbe für den Cylinder $opqr$ von pq bis or genommen $= \frac{\varepsilon + w}{m}$ ſey. Für die Röhre $OmnR$, von mn bis OR genommen, ſey es $= H$; ſo kommt zu dieſen beyden Theilen für das Gefäß ABEO bis CD genommen, noch das Stück $\frac{x}{h} = \frac{a}{h} - \frac{mw}{hh}$ hinzu. Dies alles in obige Gleichung geſetzt, giebt

$$\frac{h^2 - m^2}{h^2} q + \frac{mpq}{dw} \left(\frac{\varepsilon + w}{m} + H + \frac{a}{h} - \frac{mw}{hh} \right)$$

$$= \Pi - \pi + a - \frac{mw}{h} - \beta - (\varepsilon + w) \cos\eta,$$ da dann durch Π und π die Höhe einer Waſſerſäule über CD und pq als Grundflächen zu verſtehen iſt, deren Gewicht ſo groß iſt, als der Druck, dem dieſe Flächen ausgeſetzt ſind. Um das Integral dieſer Gleichung zu finden, kann man ein völlig ähnliches Verfahren, wie im 237 §., anbringen. Man drücke ſie ſo aus:

$$\left(1 - \frac{m^2}{h^2}\right) q dw + \left(\varepsilon + mH + \frac{ma}{h} + \left(1 - \frac{m^2}{h^2}\right) w\right) dq$$

=

$$=(\Pi-\pi+a-\beta-\varepsilon\cos\eta)dw-\left(\frac{m}{h}+\cos\eta\right)wdw;$$

ſetze $\left(1-\frac{m^2}{h^2}\right)=\mu$, und $\frac{\varepsilon}{\mu}+\frac{mH}{\mu}$

$+\frac{ma}{\mu h}+w=z$, ſo wird $\mu(qdz+zdq)=$

$$(\Pi-\pi+a-\beta-\varepsilon\cos\eta)dw-\left(\frac{m}{h}+\cos\eta\right)wdw;$$

und daraus ergiebt ſich q durch eine leichte Integration. Es wird nämlich $\mu qz=$

$$(\Pi-\pi+a-\beta-\varepsilon\cos\eta)w-\left(\frac{m}{h}+\cos\eta\right)\tfrac{1}{2}w^2,$$

ohne Hinzuſetzung einer beſtändigen Gröſſe, weil w und q zugleich verſchwinden müſſen.

292 §.

Der Stiefel eines Saugwerks ſtehet, wie gewöhnlich, vertical, aber die Saugröhre iſt, wie man will, geſtaltet; überdem ſind alle Abmeſſungen des Saugwerks gegeben, auch iſt die Kraft bekannt, welche den Kolben vertical aufwärts zieht: man ſucht die Geſchwindigkeit des Waſſers im Stiefel, nachdem es um eine gegebene Höhe w über den niedrigſten Kolbenſtand geſtiegen iſt.

Aufl. Man muß ſich den Waſſerbehälter, worin die Saugröhre ſteht, als ein Gefäß vorſtellen, das mit dieſer Röhre zuſammen hängt, etwa ſo, wie man im 262 §. die Röhre EF mit dem Ge-

fäß ABCD zuſammen hängend betrachtete, ſo iſt dieſe Aufgabe nur ein beſonderer Fall von der Aufgabe des vor. §. Weil nun die Behälter, woraus man das Waſſer mit Hülfe der Pumpen zieht, in Vergleichung mit der Saugröhre und dem Stiefel, gewöhnlich ſehr weit ſind, ſo kann man hier h in Vergleichung mit m unendlich groß annehmen. Dieſer Vorausſetzung gemäß verändern ſich die Formuln des vorigen §. in folgende. Es wird $\mu = 1$, $z = \varepsilon$, $+ mH + w$, und $\cos\eta = 1$, weil $\eta = 0$ iſt. Ferner iſt Π die Höhe, welche dem Druck der Atmoſphäre zugehört: und π iſt eben das für den Druck des Waſſers gegen den Kolben. Die Kraft, welche den Kolben aufwärts zieht, ſey dem Gewicht einer Waſſerſäule in der Höhe k auf der Grundfläche m gleich; ſo drückt der Kolben mit der Gewalt $\Pi - k$ nach unten. Demnach hat man $\pi = \Pi - k$, und wenn alle dieſe Werthe in die am Ende des vor. §. gefundene Gleichung geſetzt werden, ſo verwandelt ſie ſich in folgende:

$$q(\varepsilon + mH + w) = (k + a - (\beta + \varepsilon))w - \tfrac{1}{2}w^2,$$

woraus

$$q = \frac{(k + a - (\beta + \varepsilon))w - \frac{1}{2}w^2}{\varepsilon + mH + w} \text{ folgt.}$$

In dieſer Gleichung iſt a die Höhe des Waſſers im Behälter über die untere Oefnung der Saugröhre, die ſich deswegen bey jedem Kolbenzug nicht merklich ändert, weil die Querſchnitte des Behälters in Vergleichung mit den Querſchnitten der Röhre ſehr groß angenommen ſind. Ferner iſt hier $\varepsilon = kc$ (34 Fig.) vertical und $kl = \beta$, alſo $\beta + \varepsilon - a$ die

Höhe

Höhe des Kolbens in ſeinem niedrigſten Stande über das aus der Tiefe zu hebende Waſſer. Man ſetze $\beta + \varepsilon - a = f$, ſo wird $q = \frac{(k-f)w - \frac{1}{2}w^2}{\varepsilon + m\mathrm{H} + w}$.

Wenn die Saugröhre durchgängig gleich weit iſt, und man ihre Länge $= l$, jeden Querſchnitt aber $= n$ ſetzt; ſo hat man $\mathrm{H} = \frac{l}{n}$, alſo in dieſem Fall,

$$q = \frac{(k-f)w - \frac{1}{2}w^2}{\varepsilon + ml:n + w}.$$

293 §.

Bey eben den Vorausſetzungen des vor. §. den Druck zu finden, womit das hinaufſteigende Waſſer an jeder Stelle gegen die Steigröhre preſt.

Aufl. Wenn man die allgemeine für p im 234 §. gefundene Gleichung auf den gegenwärtigen Fall anwenden will, ſo muß man zuforderſt die dortigen Winkel η, φ, ψ, u. ſ. f. $= 90°$, alſo ihre Sinus $= 1$ ſetzen. Dies giebt

$$p = \pi - x + u - \frac{m^2 \upsilon}{z^2} + \frac{m^2 \upsilon}{\omega^2} + \frac{m^2 d\upsilon}{ydr} \int \frac{ds}{z}.$$

Man ſetze ferner, wie im 234 §. n. I. $\omega dw = ydr$, und $m^2 \upsilon = \omega^2 q$, ſo wird

$$p = \pi - x + u - \frac{\omega^2 q}{z^2} + q + \frac{\omega dq}{dw} \int \frac{ds}{z},$$

weil hier ω unveränderlich iſt, da dann, wie im vor. §., m ſtatt ω geſchrieben werden kann. Wenn man

überdem aus dem vor. §. den Werth $u = \beta + \varepsilon + w = a + f + w$ und $\pi = \Pi - k$ ſubſtituirt, ſo wird

$$p = \Pi - k - x + a + f + w - \frac{m^2 q}{z^2} + q + \frac{mdq}{dw} \int \frac{ds}{z}.$$

Man ſetze das unbeſtimmte Stück der centriſchen Linie KZ $= \xi$, ziehe ZY vertical, und ſtelle ſich durch Z einen unbeſtimmten Querſchnitt MN $= z$ vor; ſo iſt YZ $= x$, GZ $= s = \varepsilon + w + l - \xi$, und w iſt als unveränderlich zu betrachten. Dies giebt

$\int \frac{ds}{z} = C - \int \frac{d\xi}{z}$, und weil dies Integral $= \frac{\varepsilon + w}{m} + H$ ſeyn muß für $\xi = 0$, ſo nehme man $\int \frac{d\xi}{z}$ ſo daß es für $\xi = 0$ verſchwindet, damit $\int \frac{ds}{z} = \frac{\varepsilon + w}{m} + H - \int \frac{d\xi}{z}$ werde.

Dies in die Gleichung für p geſetzt, giebt

$$p = \Pi - k - x + a + f + w - \frac{m^2 q}{z^2} + q + \frac{(\varepsilon + w + mH)dq}{dw} - \frac{mdq}{dw} \int \frac{d\xi}{z}.$$

Aus der für q im 291 §. gefundenen Differential-Gleichung aber folgt

$$\frac{(\varepsilon + w + mH)dq}{dw} = k - f - w - q,$$

alſo

alſo wird

$$p = \Pi + a - x - \frac{m^2 q}{z^2} - \frac{m\,dq}{dw} \int \frac{d\xi}{z}.$$

Wenn man in dieſe Gleichung die Werthe von q und dq aus dem vor. §. ſetzt, ſo hat man p durch x, w, ξ und z ausgedrückt.

Für die unterſte Stelle der Saugröhre iſt $x = 0$, $\xi = 0$, alſo wird daſelbſt $p = \Pi + a - \frac{m^2 q}{z^2}$, da dann durch z ihr unterſter Querſchnitt zu verſtehen iſt. Für die höchſte Stelle iſt $x = \beta = a + f - \varepsilon$, und $\int \frac{d\xi}{z} = \mathrm{H}$, alſo $p = \Pi + \varepsilon - f - \frac{m^2 q}{z^2} - \frac{m\mathrm{H}\,dq}{dw}$, und man muß durch z den höchſten Querſchnitt verſtehen.

Alle Stellen der Saugröhre, die ſich unter dem Waſſer befinden, leiden von auſſen einen Druck, dem die Höhe $\Pi + a - x$ zugehört, alſo wird jede dieſer Stellen ſtärker von auſſen nach innen, als von innen nach auſſen gepreßt. Alle übrige Stellen, die ſich über dem Waſſer befinden, leiden von auſſen den Druck, dem die Höhe Π zugehört. Weil nun für alle dieſe Stellen x gröſſer, als a iſt, ſo werden ſie ebenfalls insgeſammt von auſſen nach innen ſtärker, als von innen nach auſſen, gepreßt. Demnach iſt von dem inwendig hinaufſteigenden Waſſer kein Zerſprengen der Röhren zu fürchten: wohl aber könnte die äuſſere Luft hineindringen, wenn ſie dagegen nicht zulänglich verwahrt wären.

294 §.

Wenn die Saugröhre ein grader und vertical ſtehender Cylinder iſt, ſo hat man im 292 §. $l = \beta$, und wenn alle ihre Querſchnitte $= n$ ſind, ſo wird $H = \frac{l}{n} = \frac{\beta}{n}$. Dies giebt $q =$

$\frac{(k-f)w - \frac{1}{2}w^2}{\varepsilon + m\beta : n + w}$. Setzt man aber $\beta + \varepsilon + w - a = x$, ſo iſt x die jedesmalige Höhe des Kolbens über die Oberfläche des aus der Tiefe zu hebenden Waſſers, und man erhält $w = x + a - \beta - \varepsilon = x - f$; alſo wird $q =$

$$\frac{(k-f)(x-f) - \frac{1}{2}(x-f)^2}{a + (m-n)\beta : n + x} = \frac{h(x-f) - \frac{1}{2}(x^2 - f^2)}{a + (m-n)\beta : n + x}.$$

Wäre die Saugröhre mit dem Stiefel von gleicher Weite, ſo hätte man $m = n$, alſo $q =$

$\frac{(k-f)w - \frac{1}{2}w^2}{\varepsilon + \beta + w}$, oder $q = \frac{k(x-f) - \frac{1}{2}(x^2 - f^2)}{a + x}$.

Dafern die Kraft, welche den Kolben aufwärts zieht, ſo ſtark iſt, als der Druck der Atmoſphäre auf den Kolben, ſo hat man $k = \Pi$. Alsdenn fällt der Kolben dem hinaufſteigenden Waſſer gar nicht hinderlich; und es iſt nun eben ſoviel, als wenn das Waſſer im leeren Raum in der Röhre hinauf ſtiege.

Wenn gar keine Kraft den Kolben aufwärts zieht, ſo hat man $k = 0$, alſo wird in dem Fall, wenn die Röhre cylindriſch, grade und vertical iſt,

$$q = \frac{-f \cdot w - \frac{1}{2}w^2}{\varepsilon + \beta + w} = \frac{(a - \beta - \varepsilon)w - \frac{1}{2}w^2}{\varepsilon + \beta + w},$$

oder

oder auch $q = \frac{\frac{1}{2}(f^2 - x^2)}{a + x}$. Dies iſt der Fall, wenn beyde Flächen des Waſſers dem völligen Druck der Atmoſphäre ausgeſetzt ſind, und dabey muß man überlegen, wie dieſer beſondere Fall erfordere, daß $a > \beta + \varepsilon$ ſey, und daher f negativ werde. Es muß die anfängliche Höhe des Waſſers im Behälter größer ſeyn, als die anfängliche Höhe des Waſſers in der Röhre iſt, und eine Art das Waſſer unter die Umſtände zu verſetzen, wäre folgende.

295 §.

Man nehme eine etwas weite Glaßröhre von etwa 2 bis 3 Fuß Länge, ſo wie ſie zu einem guten Barometer müßte gebraucht werden, die an beyden Enden offen iſt. Das eine Ende derſelben verſchließe man mit dem Finger, und tauche das offene Ende bey verticaler Stellung der Röhre in ein etwas tiefes Gefäß, das mit Waſſer, (oder auch Queckſilber) angefüllt iſt; ſo wird das Waſſer zwar unten bis auf eine gewiſſe Höhe in die Röhre hineintreten, allein die eingeſchloſſene Luft wird verurſachen, daß es in geringerer Höhe ſtehen bleibt, als die Höhe des Waſſers im Gefäß iſt. Man öfne nun auf einmal das obere Ende der Röhre; ſo wird das Waſſer in derſelben augenblicklich zu ſteigen anfangen, und weil nun nicht allein das Waſſer im Gefäß, ſondern auch in der Röhre dem völligen Druck der Atmoſphäre ausgeſetzt iſt; ſo wird dies der Fall ſeyn, wobey die letzten Gleichungen des vor. §. ihre Anwendung finden. Wenn man $\beta + \varepsilon = b$ ſetzt, ſo wird für dieſen

Fall $q = \frac{(a-b)w - \frac{1}{2}w^2}{b+w}$. Joh. Bernoulli hat dieſe Aufgabe im P. I. Hydraul. §. XXIV. Oper. T. IV. p. 421. und er findet eben die Auflöſung. Auch kommt Daniel Bernoulli auf eben dieſe Aufgabe in der Hydrodynam. Sect. VII. §. 16. p. 136. und man erhält ſeine Formul, wenn man hier $a + x = \xi$ und $a - f = \alpha$ ſetzt. Dies giebt $x = \xi - \alpha$, und $f = a + \alpha$, folglich $q =$

$$\frac{\frac{1}{2}(a+\alpha)^2 - \frac{1}{2}(\xi-\alpha)^2}{\xi} = a\left(1 - \frac{\alpha}{\xi}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{\alpha\alpha}{\xi}\right).$$

296 §.

Ich habe dieſe Unterſuchungen, wenn ich den ſpeciellen im vor. §. erwähnten Fall ausnehme, bey keinem mir bekannten Schriftſteller gefunden. Dem Herrn Belidor ſind bey Verfertigung ſeines vortreflichen Werks über die Waſſerbaukunſt, welches im Jahr 1737 zu Paris herausgekommen iſt, die von den beyden Herrn Bernoulli um eben die Zeit neu erfundenen Theorien der Hydraulik noch nicht bekannt geweſen: ſonſt wäre ſein Vortrag über die Theorie der Saugwerke Architect. Hydraul. III. B. III. Cap. 906 u. f. §. §. ohne Zweifel beſſer gerathen. Weil er bisher noch der vornehmſte Schriftſteller iſt, der ſich über dieſen Gegenſtand, ausführlich eingelaſſen hat, ſo kann ich nicht umhin, von ſeinen Bemühungen Nachricht zu geben. Seine Unterſuchungen ſind auf den Fall eingeſchränkt, wenn die

Saugröhre ein grader vertical ſtehender Cylinder iſt: er betrachtet zuerſt den Fall, wo Stiefel und Saugröhre gleich weit ſind, und ſucht mit welcher Geſchwindigkeit das Waſſer ſteigen würde, wenn es durch den Kolben gar nicht aufgehalten würde. Er ſucht alſo eigentlich die Auflöſung der folgenden Aufgabe.

297 §.

Die cylindriſche oben bey Q verſchloſſene und unten bey R offene Röhre iſt von Luft leer: ihr offenes Ende ſteht bis an YZ im Waſſer, und die ganze Röhre ſteht vertical. Nun wird der Druck der Atmoſphäre das Waſſer in die Röhre hineintreiben, und man ſucht die Geſchwindigkeit des Waſſers für jede Höhe $ZM = x$, die es in der Röhre erreicht hat. 57 Fig.

Wenn $\sqrt{q}$ die geſuchte Geſchwindigkeit iſt, ſo hatte man ſonſt gewöhnlich $\sqrt{q} = \sqrt{\Pi - x})$ angenommen, und Belidor meldet a. a. O. im 907 §., daß er ſelbſt dieſe Beſtimmung lange Zeit für die richtige gehalten habe, bis er endlich bey Berechnung einer von ihm erfundenen, und im Anfange des vierten Buchs beſchriebenen Maſchine den Fehler eingeſehen und verbeſſert habe. Allein ſeine Auflöſung dieſer Aufgabe iſt eben ſo wenig richtig, als die alte von ihm mit Recht getadelte Auflöſung. Er findet $\sqrt{q} = \sqrt{\Pi} - \sqrt{x}$, alſo $q = \Pi - 2\sqrt{\Pi x} + x$, und Muſſchenbröck trägt in der Introd. ad Phil. Natural. T. II. §. 2148-2152. p. 878-880. ebenfalls dieſe Belidorſche Theorie vor, wobey ich nur bemerke, daß Π hier eben das iſt, was es im 289 u. f. §. §. war.

war: Dieſe Beſtimmung hat mit der åltern drey Hauptfehler gemein. Einmal hångt keine derſelben von der anfånglichen Höhe des Waſſers in der Röhre ab, da es doch gewiß nicht einerley iſt, in welcher Höhe das Waſſer ſeine Bewegung von der Ruhe anfångt. Fürs zweyte müßte nach beyden Beſtimmungen $\sqrt{q} = 0$ ſeyn, wenn $x = \Pi$ iſt. Daß aber dies falſch ſey, davon kann man ſich durch eine leichte Erfahrung überzeugen, wenn man den im 295 §. angeführten Verſuch mit einer Glasröhre anſtellt. Man wird alsdenn wahrnehmen, daß daſſelbe nicht etwa nur mit dem äußern Waſſer auf gleiche Höhe ſteigt, und alsdenn ruhig ſtehen bleibt; ſondern vielmehr, daß es ſich um eine ziemliche Höhe über die Oberfläche des Waſſers im Gefäß erhebt, alsdenn wieder zurück fällt, wieder hervorkommt, und dieſe ſchwankende Bewegung ziemlich oft wiederhohlt, bis es endlich in eben der Höhe, wie das äuſſere Waſſer ruhig ſtehen bleibt. Das Waſſer in der vorhin betrachteten Röhre QR befindet ſich unter ähnlichen Umſtänden. Weil die Querſchnitte des Behälters ſehr groß angenommen werden, ſo würde das Waſſer in der Röhre, wenn ſtatt des Drucks der Luft über ZY noch 32 Fuß hoch Waſſer ſtünde, eben ſo ſteigen, wie es jetzt thut, da auf ZY die Luft drückt. Man vergleiche hiemit den 264 §. Endlich müßte noch fürs dritte die Geſchwindigkeit des ſteigenden Waſſers im erſten Anfang der Bewegung am größten ſeyn, nämlich entweder $= \sqrt{(\Pi - ZC)}$ nach der åltern, oder $= \sqrt{\Pi} - \sqrt{ZC}$ nach der Belidorſchen Beſtimmung, und hiernächſt beſtändig abnehmen, wenn ZC die anfängliche Waſſerhöhe wäre; deſſen zu geſchweigen, daß hiebey die Länge

der Röhre von Z bis an ihre untere Oefnung auch nicht in Betrachtung kommt.

Die richtige Auflöſung iſt im 294 §. ſchon gefunden: es iſt nämlich $q = \frac{\Pi(x-f) - \frac{1}{2}(x^2 - f^2)}{a+x}$, wenn $ZC = f$, $RZ = a$, und $ZM = x$ iſt.

298 §.

Für die Beſtimmung dieſer Geſchwindigkeit des in dem Stiefel hinauf ſteigenden Waſſers bey ungleichen Mündungen des Stiefels und der Saugröhre, in der Vorausſetzung, daß der Kolben der Bewegung des Waſſers gar nicht hinderlich falle, giebt Belidor ebenfalls eine Regel, die von dem Reſultat des 294 §. weit abweicht. Er ſetzt a. a. O. im 910. u. 911 §. voraus, wenn gleich der Stiefel weiter als die Saugröhre ſey, ſo habe doch das Waſſer in der Saugröhre für jede Höhe x eben die Geſchwindigkeit, die es haben würde, wenn der Stiefel eben ſo weit als die Saugröhre wäre. Hiemit verbindet er den Satz des 6 §.; daß übrigens für jeden Augenblick die Geſchwindigkeiten des Waſſers im Stiefel und in der Saugröhre ſich umgekehrt, wie ihre Querſchnitte verhalten müſſen, und hierin folgt ihm Muſſchenbröck Introd. in Phil. Nat. T. II §. 2153. p. 881. Dieſen Vorausſetzungen gemäß wäre $\sqrt{q} = \frac{n}{m}(\sqrt{\Pi} - \sqrt{x})$, und $q = \frac{n^2}{m^2}(\Pi - 2\sqrt{\Pi x} + x)$. Aber die Vergleichung mit dem vorigen §. ergiebt, daß dieſe Gleichung keinesweges beſtehen könne. Denn einmal ſtehen dieſer

Be-

Beſtimmung der Geſchwindigkeit wieder eben die Erinnerungen entgegen, welche im 297 §. bereits vorgetragen ſind: und fürs zweyte iſt es auch unrichtig, daß das Waſſer in der Saugröhre für jede Höhe x eben die Geſchwindigkeit habe, die es haben würde, wenn der Stiefel eben ſo weit, als die Saugröhre wäre. Vermöge des 294 §. iſt $q =$
$\frac{\Pi(x-f)-\frac{1}{2}(x^2-f^2)}{a+(m-n)\beta:n+x}$, und dieſe Höhe gehört der Geſchwindigkeit des Waſſers im Stiefel; folglich gehört der Geſchwindigkeit des Waſſers in der Saugröhre die Höhe $= \frac{m^2}{n^2} q = \frac{m^2\Pi(x-f)-\frac{1}{2}m^2(x^2-f^2)}{n^2 a+n(m-n)\beta+n^2 x}$.
Für $m = n$ aber wäre dieſe Höhe $=$
$\frac{\Pi(x-f)-\frac{1}{2}(x^2-f^2)}{a+x}$.

299 §.

Herr Belidor macht von ſeiner Theorie folgende Anwendung auf die Saugwerke. Er nimmt an, das Sauwerk habe ſeine gehörige Vollkommenheit, wenn ſich 1) bey jedem Kolbenhub der ganze Raum des Kolbenzuges mit Waſſer füllet, und wenn 2) der Kolben grade ſo ſchnell und nicht langſamer ſteigt, als dieſe Abſicht erfordert, damit keine Zeit umſonſt verlohren gehe. Weil nun nach ſeiner Theorie das Waſſer vom niedrigſten bis zum höchſten Kolbenſtande mit abnehmender Geſchwindigkeit ſteigt, ſo ſetzt er feſt: der Kolben müſſe mit eben derjenigen Geſchwindigkeit ſteigen, womit das Waſſer im höchſten Kolbenſtande anlangen würde, wenn der Kolben es nicht aufhielte. Vorausgeſetzt, daß Hr. Belidors Theorie

Theorie der Wahrheit gemäß ſey, ſo hat es auch ſeine Richtigkeit, daß nun das Waſſer dem Kolben beſtändig folgen würde: auch würde keine Zeit umſonſt hingehen. Ohne nun jetzt ſchon zu entſcheiden, ob hiedurch bey jeder Mechaniſchen Einrichtung der größte Vortheil erhalten werde, wobey man auch mit auf die möglichſte Erſparung der Kraft ſehen müſte (288 §.), bemerke ich hiebey folgendes. Es iſt falſch, daß das Waſſer gleich vom Anfange der Bewegung mit abnehmender Geſchwindigkeit ſteige: es ſteigt vielmehr anfangs mit zunehmender Geſchwindigkeit. Dies will ich nachher noch ausführlicher zeigen, und ich beziehe mich jetzt nur auf die Gleichung $q = \frac{(k-f)w - \frac{1}{2}w^2}{\varepsilon + mH + w}$ des 292 §. Dies ergiebt, daß

beynahe $q = \frac{(k-f)w}{\varepsilon + mH}$ ſey, ſo lange w ſehr klein iſt, alſo wächſt q mit w anfangs beynahe gleichförmig, wollte man demnach mit Hr. Belidor die Vollkommenheit eines Saugwerks blos nach dieſer Maxime beurtheilen, daß daſſelbe bey jedem Kolbenhub ohne Zeitverluſt ſo viel Waſſer ergieſſen ſoll, als der Raum des Kolbenzuges faſſet; ſo müßte man, um die erforderliche Geſchwindigkeit des Kolbens zu finden, mit der nun ſchon erwieſenen richtigen Theorie von der Geſchwindigkeit des in dem Stiefel frey und ungehindert hinauf ſteigenden Waſſers folgende Schlüſſe verbinden.

300 §.

Ohne Zweifel würde nach der angenommenen Maxime das Saugwerk am vollkommenſten ſeyn, wenn der Kolben beſtändig mit eben derſelben Geſchwin-

ſchwindigkeit ſtiege, womit das Waſſer im Stiefel ſich ſelbſt überlaſſen aufwärts ſteiget. Aber vermittelſt der gewöhnlichen mechaniſchen Einrichtungen, welche den Kolben zu bewegen dienen, kann man denſelben nicht wohl in eine ſolche Bewegung ſetzen, daß ſeine Geſchwindigkeit allemal mit der Geſchwindigkeit des hinaufſteigenden Waſſers einerley bleibt. Die Bewegung des Kolbens iſt bey den gewöhnlichſten Einrichtungen beynahe gleichförmig. Ich ſage mit Fleiß nur beynahe, denn man ſiehet leicht, daß der Kolben ſowohl in ſeinem höchſten als niedrigſtem Stande auf einen Augenblick ruhen müſſe, weil er wieder umkehren, und ſich nach entgegen geſetzter Richtung bewegen muß. Seine Geſchwindigkeit wird alſo, nachdem er ſich entweder dieſen Gränzen nähert, oder wieder davon entfernt, abnehmen oder wachſen. Hiezu kommen bey dieſer oder jener beſondern mechaniſchen Einrichtung noch andere Umſtände, wobey keine völlige Gleichförmigkeit der Bewegung des Kolbens beſtehen kann, ob man es gleich, ſo viel möglich iſt, dahin zu bringen ſucht. Bey dieſer Vorausſetzung alſo, daß der Kolben in eine wenigſtens beynahe gleichförmige Bewegung geſetzt werde, muß die Einrichtung ſo gemacht werden, daß der Kolben in eben der Zeit die Höhe des Kolbenzuges durchlaufe, worin das Waſſer im Stiefel um eben dieſe Höhe ſteigt, wenn man mit Hrn. Belidor allein auf die möglichſte Erſparung der Zeit ſiehet. Zwar wird alsdenn beym erſten Anfang der Bewegung des Kolbens zwiſchen demſelben und dem unter ihm befindlichen Waſſer ein leerer Raum entſtehen, weil anfangs bey dieſer Vorausſetzung der Kolben ſchneller, als das Waſſer

ſteigt.

ſteigt. Allein in dem Augenblick, da der Kolben ſeine höchſte Stelle erreicht, wird das Waſſer den Kolben eingehohlet haben, und der ganze Raum des Kolbenzuges angefüllet ſeyn.

Auf dieſe Betrachtungen würden nun die Regeln beruhen, wornach die ganze Einrichtung des Saugwerks gemacht werden müßte, wenn man dabey blos auf die Erſparung der Zeit ſehen wollte. Bey einerley Weite des Stiefels würde dabey allemal einerley Kraft erfordert werden, wenn gleich die Höhe, worauf das Waſſer gehoben werden ſoll, verſchieden wäre. Die Kraft müßte nämlich allemal den ganzen Druck der Atmoſphäre überwinden. Ich werde zuförderſt zeigen, was dieſe Vorausſetzung für eine Einrichtung des Saugwerks erfordern würde: hiernächſt aber, wie bey allen Maſchienen nothwendig iſt, auch auf die möglichſte Erſparung der Kraft mit Rückſicht nehmen.

301 §.

Die Höhe zu finden, worauf das Waſſer im Stiefel ſteigen könnte, wenn der Stiefel von unbeſtimmter Höhe wäre, und der Kolben ſo ſchnell ſtiege, daß derſelbe die Bewegung des Waſſers nicht hinderte.

Aufl. Das Waſſer wird ſo lange ſteigen, bis $q = 0$ wird. Man ſetze demnach $q =$

$$\frac{(k-f)w - \frac{1}{2}w^2}{\varepsilon + mH + w}$$ (292 §.) $= 0$, und $k = \Pi$ (290 §.) ſo erhält man $w^2 - (\Pi - f)\,w = 0$, und beyde Wurzeln dieſer Gleichung ſind $w = 0$, und $w = 2(\Pi - f)$. Es mußte aber, vermöge der Vorausſetzung, im Anfang der Bewegung $q = 0$ ſeyn.

Daher kömmt der eine Werth $w = 0$. Der andere ergiebt, daß das Waſſer bis auf die Höhe $2(\Pi - f)$ über den niedrigſten Kolbenſtand hinauf ſteigen werde. Man vergleiche hiermit Guerikens Verſuch mit der 20 Ellen hohen Röhre. Exper. nova Magd. Libr. III. Cap. XIX. XX.

So lange w zwiſchen dieſen Gränzen $w = 0$, und $w = 2(\Pi - f)$ bleibt; ſo lange iſt q poſitiv, und q wächſt anfangs mit w, nimmt aber hiernächſt wieder ab. Dies ergiebt ſich am deutlichſten aus der Differentialgleichung des 291 §., wenn man ſie auf den gegenwärtigen Fall anwendet, alſo $\frac{m}{h} = 0$, und $\cos\eta = 1$ ſetzt. Man erhält nämlich $dq = \frac{\Pi - (f + w) - q}{\varepsilon + m\text{H} + w} dw$, und dieſer Ausdruck iſt poſitiv, ſo lange $\Pi - (f + w) > q$ iſt, folglich wächſt q ſo lange, als die Vorausſetzung ſtatt hat, und nimmt wieder ab, wenn $q > \Pi - (f + w)$ wird. Die Geſchwindigkeit des Waſſers muß alſo am größten ſeyn, wenn $\Pi - (f + w) = q$ iſt (343 §. Mechan.). Es iſt nämlich nun $dq = 0$.

302 §.

Bey eben der Vorausſetzung des vor. §. die größte Geſchwindigkeit zu finden, die das im Stiefel hinaufſteigende Waſſer erreichen kann, nebſt der Höhe, auf welche es ſteigen muß, bevor die Geſchwindigkeit am größten wird.

Aufl. Es iſt die größte Geſchwindigkeit $q = \Pi - (f + w)$, und der unbeſtimmte Werth von q iſt $= \frac{(\Pi - f)w - \frac{1}{2}w^2}{\varepsilon + m\text{H} + w}$. Man ſetze beyde Werthe

ein

einander gleich, und ſchreibe Kürze halber B ſtatt $\varepsilon + mH$; ſo erhält man die Gleichung

$$(\Pi - f)(B + w) - (B + w)w = (\Pi - f)w - \tfrac{1}{2}w^2,$$

$$\text{oder } (\Pi - f)B - Bw - \tfrac{1}{2}w^2 = 0,$$

und daraus folgt

$$w = -B \pm \sqrt{(B^2 + 2(\Pi - f)B)}.$$

Der negative Werth kann hier nicht gebraucht werden, ſondern der poſitive iſt eigentlich der geſuchte. Und wenn derſelbe ſtatt w in die Gleichung $\sqrt{q} = \sqrt{(\Pi - f - w)}$ geſetzt wird, ſo ergiebt ſich die geſuchte größte Geſchwindigkeit.

Weil $\sqrt{(B^2 + 2(\Pi - f)B)} < B + \Pi - f$ iſt, ſo iſt allemal $w < \Pi - f$. Je kleiner indeſſen $\Pi - f$ ſelbſt in Vergleichung mit B iſt, deſto näher kommt die Wurzelgröße dem Werth $B + \Pi - f$, folglich kommt zugleich w dem Werth $\Pi - f$ deſto näher. Bey der gewöhnlichen Einrichtung der Saugwerke findet dieſe Vorausſetzung allemal ſtatt, daß B in Vergleichung mit $\Pi - f$ ziemlich groß iſt, daher wird das in dem Stiefel hinaufſteigende Waſſer auch gewöhnlich ſo lange mit zunehmender Geſchwindigkeit ſteigen, bis es mehrentheils 31 bis 32 Fuß hoch über der Oberfläche des Waſſers erhaben iſt, worin die Saugröhre ſtehet.

303 §.

Hiedurch wird alſo dasjenige zugleich beſtätiget, was im 299 §. behauptet worden. Es iſt falſch, daß das Waſſer gleich von Anfang mit abnehmender Geſchwindigkeit ſteige: vielmehr erfolgt grade das Gegentheil, es ſteigt mit zunehmender Geſchwin-

digkeit. Nur in dem einzigen Fall, wenn Stiefel und die ganze Saugröhre gleich anfangs von Luft und Waſſer leer wären, ſo würde die Geſchwindigkeit des hineintretenden Waſſers aufs ſchnelleſte, und faſt augenblicklich bis zur größten anwachſen, und hiernächſt wieder beſtändig abnehmen. Die größte Geſchwindigkeit ſelbſt wäre alsdenn $= \sqrt{(\Pi + a)}$. Man muß nemlich erwegen, daß für dieſen Fall die Länge der im Anfang der Bewegung ſchon mit Waſſer gefüllten Röhre $\varepsilon + \lambda = 0$, alſo das Integral $\frac{\varepsilon}{m} + H = 0$ ſey. Dies giebt den Werth von $w = 0$, welcher der größten Geſchwindigkeit zugehört, und die der größten Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $q = \Pi + a$; denn es iſt auch die anfängliche Höhe des Waſſers über die untere Oefnung der Saugröhre $\beta + \varepsilon = 0$, alſo $f = -a$.

Man muß ſich bey dieſer Rechnung erinnern, daß die bisher gebrauchten Formuln aus der im 291 §. gefundenen Gleichung in der Vorausſetzung hergeleitet ſind, daß $\frac{m}{h} = 0$ ſey.

Eigentlich aber hat man aus dem 291 §. die Gleichung

$$\mu q z = (k - f) w - \left(\frac{m}{h} + 1\right) . \tfrac{1}{2} w^2,$$

wenn man, wie hier erfordert wird, $\cos\eta = 1$ ſetzt. Nun laſſe man nur dasjenige weg, was in $\frac{m^2}{h^2}$ multiplicirt iſt, ſo bleibt $\mu = 1$, und es wird $z = \varepsilon + mH + \frac{ma}{h} + w$. Dies giebt

q =

$$q = \frac{h(k-f)\mathrm{w} - (m+h)\frac{1}{2}\mathrm{w}^2}{\varepsilon h + mh\mathrm{H} + ma + h\mathrm{w}}.$$

Wenn nun $\varepsilon + \lambda = 0$, und $\beta + \varepsilon = 0$, alſo auch $\varepsilon + m\mathrm{H} = 0$ iſt, und man nimmt überdem $k = \Pi$ an; ſo wird $q = \frac{h(\Pi + a)\mathrm{w} - \frac{1}{2}(m+h)\mathrm{w}^2}{ma + h\mathrm{w}}$.

Dieſe Gleichung giebt $q = 0$ für $\mathrm{w} = 0$, wie erfordert wird; ſobald aber nur ein ſehr kleiner Werth ſtatt w geſetzt wird, iſt ſehr nahe $q = \Pi + a$.

Wenn nun ferner um die größte Geſchwindigkeit zu finden, in der Differentialgleichung des 291 §. $dq = 0$, $\cos\eta = 1$, und $\frac{m^2}{h^2} = 0$ geſetzt wird, ſo erhält man $q = k - f - \frac{m\mathrm{w}}{h} - \mathrm{w}$; und dieſer Werth von q dem vorigen gleich geſetzt, giebt

$$(k-f)(ma + (\varepsilon + m\mathrm{H})h) - (m+h)(\varepsilon + m\mathrm{H})\mathrm{w}$$
$$- \frac{ma(m+h)}{h} \cdot \mathrm{w} - \frac{1}{2}(m+h)\mathrm{w}^2 = 0.$$

Daraus folgt

$$\mathrm{w}^2 + 2\,\frac{h(\varepsilon + m\mathrm{H}) + ma}{h}\mathrm{w} = \frac{2(k-f)(ma + (\varepsilon + m\mathrm{H})h)}{m+h}.$$

Die poſitive Wurzel aus dieſer Gleichung giebt denjenigen Werth von w, welcher dem größten Werth von q zugehört.

Wenn alſo $\varepsilon + m\mathrm{H} = 0$, folglich auch $\beta + \varepsilon = 0$, alſo $k - f = \Pi + a$ iſt; ſo wird

$$w^2 + \frac{2ma}{h} w = \frac{2(\Pi + a)ma}{m + h}, \text{ und}$$

$$w = -\frac{ma}{h} + \surd\left(\frac{2(\Pi+a)ma}{m+h} + \frac{m^2a^2}{h^2}\right).$$

Dieſer Werth von w iſt ungemein klein, wenn h ſehr groß iſt, und für $h = \infty$, würde $w = 0$ ſeyn.

304 §.

Es bleiben alle gegebene Stücke wie im 292 §.: man ſucht die Zeit, worin das Waſſer im Stiefel um eine gegebene Höhe = w ſteigt

Aufl. Es iſt $dt = \frac{dw}{\surd q}$ (117 §. Mech.) und

es war $\surd q = \surd \frac{(k-f)w - \frac{1}{2}w^2}{\varepsilon + mH + w}$ (292 §.), alſo

erhält man $dt = \frac{dw \surd(\varepsilon + mH + w)}{\surd(k-f)w - \frac{1}{2}w^2}$. Um das Integral hievon ohne weitläuftige Rechnung ſo genau zu finden, als bey ſolchen practiſchen Unterſuchungen, wie die gegenwärtige iſt, genügen kann, darf man nur erwegen, daß in der Anwendung auf das Saugwerk allemal $\varepsilon + mH$ beträchtlich größer ſey, als w, weil w nicht leicht über 2 bis 3 Fuß ſeyn wird, die Länge der Saugröhre aber, auch wenn ſie grade und vertical iſt, gewöhnlich auf 20 Fuß und darüber beträgt. Setzt man nun Kürze halber $\varepsilon + mH = B$, ſo iſt beynahe $\surd(B + w) = \surd B$. Eigentlich iſt $\surd(B+w) > \surd B$, aber $\surd(B+w) < \surd B + \frac{w}{2\surd B}$ (89 §. A. R.)

Man

Man nehme alſo zuerſt $\sqrt{(B + w)} = \sqrt{B}$, und ſetze $k - f = c$; ſo wird $dt = \frac{dw\sqrt{2B}}{\sqrt{(2cw - w^2)}}$.

Ferner hat man

$$\frac{dw}{\sqrt{(2cw - w^2)}} = \frac{dw : c}{\sqrt{\left(\frac{2w}{c} - \frac{w2}{cc}\right)}}\text{, alſo } t$$

(332 §. Mech.) $= A\int v \frac{w}{c} \times \sqrt{2B}$, wo keine conſtans nöthig iſt, weil t und w zugleich verſchwinden müſſen. Dieſer Werth von t iſt alſo etwas zu klein. Um zu finden, wie viel der Fehler höchſtens betragen könne, ſetze man nun

$$dt = \frac{dw\sqrt{2B}}{\sqrt{(2cw - w^2)}} + \frac{wdw}{\sqrt{2B}\sqrt{(2cw - w^2)}};$$

und ſuche das Integral

$$\int \frac{wdw}{\sqrt{2B}\sqrt{(2cw - w^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2B}} \cdot \int \frac{wdw}{\sqrt{(2cw - w^2}}.$$

In ſolcher Abſicht ſetze man $2cw - w^2 = z$, ſo iſt $2cdw - 2wdw = dz$, und $wdw = cdw - \frac{1}{2}dz$. Dies giebt

$$\frac{wdw}{\sqrt{(2cw - w^2)}} = \frac{cdw}{\sqrt{(2cw - w^2)}} - \tfrac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz,$$

$$\text{alſo } \int \frac{wdw}{\sqrt{(2cw - w^2)}} = cA\int v \frac{w}{c} - \sqrt{(2cw - w^2)}.$$

Wenn nun $A\sin v. \frac{w}{c} = \alpha$ geſetzt wird, ſo iſt $\frac{w}{c}$

 =

$= \text{ſin}v \,.\, \alpha$, alſo $1 - \frac{w}{c} = \text{coſ}\alpha$, und

$$\surd\left(1 - \left(1 - \frac{w}{c}\right)^2\right) = \surd\left(\frac{2w}{c} - \frac{w^2}{c^2}\right) =$$

$\text{ſin}\alpha$, folglich $\surd(2cw - w^2) = c\,\text{ſin}\alpha = c\,\text{ſin}A$

$\text{ſin}v\,\frac{w}{c}$. Dies ſubſtituire man in dem gefundenen

Integral; ſo erhält man

$$t = A\int v\frac{w}{w} \times \surd 2B + \frac{c}{\surd 2B}\left(A\int v\frac{w}{c} - \text{ſin}A\int v\frac{w}{c}\right),$$

wo wiederum keine conſtans weiter zugeſetzt wird. Weil nun dieſer Werth von t ſchon größer iſt, als der geſuchte, ſo hat man zwo Gränzen, zwiſchen welchen t fallen muß. Man ſieht aber zum voraus, daß der zwente Theil des zuletzt gefundenen Integrals ſehr klein ſeyn werde, beſonders alsdenn, wenn $\frac{c}{\surd 2B}$ ein ſehr kleiner Bruch iſt.

In dem Fall des 294 §. hat man $H = \frac{\beta}{n}$. Iſt nun überdem $k = \Pi$, ſo wird für dieſen beſondern Fall $B = \varepsilon + \frac{m\beta}{n}$, $c = \Pi - f$, und $\varepsilon = b - \beta$, wenn wie im 295 §. $\beta + \varepsilon = b$ geſetzt wird. Dies giebt auch $B = b + \frac{m-n}{n}\beta$; und weil $f = \beta + \varepsilon - a = b - a$ iſt (292 §.), ſo wird $c = \Pi + a - b$.

305 §.

305 §.

Bey eben den gegebenen Stücken, wie im vor. §. die Geſchwindigkeit zu finden, womit der Kolben bewegt werden muß, damit die Pumpe bey jedem Hub ohne Zeitverluſt ſoviel Waſſer gebe, als den ganzen Raum des Kolbenzuges füllen kann.

Aufl. Die Geſchwindigkeit des Kolbens muß ſo groß ſeyn, daß er in eben der Zeit um die Höhe des Kolbenzuges $= w$ ſteigt, binnen der das Waſſer im Stiefel, in der Vorausſetzung, daß der Kolben es nicht aufhält, eben dieſe Höhe erreicht (300 §.) Man ſuche alſo in der Vorausſetzung, daß $k = \Pi$ ſey nach dem vor. §. die Zeit, binnen der das Waſſer vom niedrigſten bis zum höchſten Kolbenſtande ſteigt, und ſetze dieſe $= t$: ſo iſt der Weg, welchen der Kolben in eben der Zeit zurückleget, $= w$. Seine Geſchwindigkeit ſey $= v$, ſo muß $w = vt$ ſeyn, (6 §. Mech.) weil hier angenommen wird, daß bey den gewöhnlichen Mechaniſchen Einrichtungen, welche den Kolben zu bewegen dienen, ſeine Bewegung wenigſtens beynahe gleichförmig erhalten werde (300 §.). Demnach erhält man $v = \frac{w}{t}$ für die geſuchte Geſchwindigkeit des Kolbens.

Um dieſe Rechnung auf ein Exempel anzuwenden, ſetze man die am Ende des vor. §. angenommenen Vorausſetzungen zum Grunde. Ferner ſey $\beta = 21\frac{1}{2}$ Fuß, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ Fuß, alſo $b = 22$ Fuß, $w = 2$ Fuß, der Durchmeſſer der Mündung des Stiefels = 6 Zoll, der Mündung der Saugröhre = $2\frac{1}{8}$ Zoll, alſo $m:n$

$= 36 : \frac{169}{36} = 1296 : 169$, und $\frac{m-n}{n} = \frac{1127}{169}$

$= 6{,}668639$. Demnach wird $b + \frac{m-n}{n}\beta =$

$165{,}375738 = B$, und $\sqrt{2B} = 18{,}1865$. Wenn nun die Höhe einer Waſſerſäule, deren Gewicht dem Druck der Atmoſphäre gleich iſt, 31 Fuß beträgt, und die Saugröhre 6 Fuß unter Waſſer ſteht, ſo muß man $\Pi + a = 37$ Fuß ſetzen. Dies giebt

$\Pi + a - b = c = 15$, und $\frac{w}{t} = \frac{2}{15} = 0{,}1333333$.

Dieſer Querſinus gehört zum Winkel von 29° 56′. Es iſt aber nach dem 469 §. G.

A 1° = 0,017453	A 1′ = 0,0002909
29	56
157077	17454
34906	14545
A 29° = 0,506137	A 56′ = 0,0162904
	0,506137
	A 29° 56′ = 0,522427

Setzt man nun voraus, daß das gebrauchte Maaß das franzöſiſche ſey, ſo iſt $g = 15{,}1$ Fuß, und $2\sqrt{g} = 7{,}7717$. Demnach wird

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g}} \, \text{Aſv} \, \frac{w}{c} \times \sqrt{2B} = 1{,}223 \text{ Secunden,}$$

ſo daß dieſe Zeit noch nicht völlig $1\frac{1}{4}$ Secunde beträgt. Wollte man ſich davon verſichern, daß dieſe Rechnung die Zeit genau genug gebe, ſo müſte man noch den Ausdruck

$$\frac{c}{2\sqrt{g}\sqrt{2B}}\left(A\mathit{ſv}\,\frac{w}{c} - \mathrm{ſin}\,A\,\mathrm{ſinv}.\frac{w}{c}\right)$$ berechnen;

Man findet aber

$$A\mathrm{ſinv}.\frac{w}{c} = 0{,}522427$$

$$\mathrm{ſin}A\,\mathrm{ſinv}.\frac{w}{c} = 0.498992$$

$$A\mathrm{ſinv}.\frac{w}{c} - \mathrm{ſin}\,A\mathit{ſv}\frac{w}{c} = 0{,}023435$$

Die übrige Rechnung ergiebt für den erwehnten Ausdruck 0,00248, ſo daß der Fehler in Beſtimmung dieſer Zeit nach der erſten Formul nicht $\frac{3}{1000}$ einer Secunde betragt. Man muß indeſſen wegen der Friction und andrer Hinderniſſe der Bewegung dieſe Zeit etwas weniges gröſſer annehmen, als die Rechnung giebt; und man kann ſie im gegenwärtigen Exempel auf $1\frac{1}{4}$ Secunden Schätzen. Dies würde alſo für die Geſchwindigkeit des Kolbens $1\frac{3}{5}$ Fuß, oder 1 Fuß $7\frac{1}{5}$ Zoll in einer Secunde geben.

306 §.

Es iſt dies Exempel aus Belidors Architectura Hydraulica III Buch III Cap. 911 §. genommen, woſelbſt aber auſſer den Querſchnitten des Stiefels und der Saugröhre, keine andre data angegeben ſind, als die gröſte Kolbenhöhe von der Oberfläche des Waſſers, welches das Saugwerk herauf ziehen ſoll, = 18 Fuß, und die Höhe des Kolbenzuges = 2 Fuß. Belidor braucht nach ſeiner Theorie nicht mehr data, und nach derſelben wäre die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Saugröhre in dem Augenblick, da

es

es die Höhe von 18 Fuß erreicht, = 10,3 Fuß in einer Secunde, und die Geſchwindigkeit des Waſſers im Stiefel = $\frac{10,3 \times 169}{1296}$ = 1,34 Fuß, alſo 1 Fuß 4 Zoll, und ſo groß ſoll nach ſeiner Regel (a. a. O.) die Geſchwindigkeit des Kolbens ſeyn. Nach der alten von Belidor getadelten Regel würden 3,6 Fuß für die Geſchwindigkeit heraus kommen, und ſo groß müſte die Geſchwindigkeit des Kolbens ſeyn. Wenn man aber nach der richtigen Formul des 294 §. $q = \frac{(\Pi + a - b)w - \frac{1}{2}w^2}{b + w + (m - n)\beta : n}$ die Geſchwindigkeit berechnet, womit das Waſſer den höchſten Kolbenſtand erreicht; ſo findet man 3,18 Fuß. Hieraus ergiebt ſich, daß Belidor jene ſonſt gebräuchlich geweſene Regel für die Beſtimmung der Geſchwindigkeit des Kolbens mit Recht tadele, weil ſich würklich bey einer ſo groſſen Geſchwindigkeit des Kolbens der Raum des Kolbenzuges nicht ganz mit Waſſer würde anfüllen können. Seine eigene Regel giebt zwar auch eine unrichtige Beſtimmung der Geſchwindigkeit des Waſſers im Stiefel. In Abſicht der andern Anwendung aber, welche er davon macht, um die Geſchwindigkeit des Kolbens zu beſtimmen, kommt ſie der Sache ungemein viel näher. Sie giebt gewöhnlich die Geſchwindigkeit des Kolbens noch etwas kleiner, als nöthig iſt, da ſie im Gegentheil nach der andern Regel ſehr viel zu groß würde gefunden werden.

307 §.

Es ſind alle Abmeſſungen eines Saugwerks gegeben, nebſt der Geſchwindigkeit des

Kolbens, die Mündungen des Stiefels und der Saugröhre, die hier ein grader und vertical ſtehender Cylinder ſeyn ſoll, ausgenommen: man ſucht, wie groß das Verhältniß dieſer Mündungen ſeyn müſſe, damit das Saugwerk ohne Zeitverluſt auf jeden Hub ſo viel Waſſer gebe, als der ganze Raum des Kolbenzuges faſſet.

Aufl. Wenn die bisher gebrauchten Buchſtaben ihre Bedeutungen behalten, nur daß man Kürze halber A ſtatt $\Pi + a$ ſchreibt, und wenn überdem v die Geſchwindigkeit des Kolbens iſt, ſo hat man

$$w = v \frac{1}{2\sqrt{g}} A \int v \frac{w}{A-b} \times \sqrt{\left(2b + \frac{2(m-n}{n} \beta\right)}.$$

(304. 305 §.), alſo

$$b + \frac{m-n}{n}\beta = \frac{4gww}{2vv\left(A\int v \frac{w}{A-b}\right)^2}.$$

Dies giebt

$$\frac{m}{n}\beta = \frac{4gww}{2vv\left(A\int v \frac{w}{A-b}\right)^2} + \beta - b,$$

alſo

$$\frac{m}{n} = \frac{2gww}{\beta vv\left(A\int v \frac{w}{A-b}\right)^2} - \frac{b-\beta}{\beta}.$$

Dafern alſo eine dieſer Mündungen gegeben iſt, ſo läſt ſich die andre, vermittelſt dieſer Formul, fin-

den

den, wenn die übrigen Abmeſſungen des Saugwerks nebſt der Geſchwindigkeit des Kolbens ebenfalls gegeben ſind.

Eben die Gleichung giebt

$$\beta = \left(\frac{2gww}{vv\left(A\int v \frac{W}{A-b}\right)^2} - b \right) \times \frac{n}{m-n}.$$

wodurch die Höhe der Saugröhre beſtimmt wird, wenn alle übrige Abmeſſungen nebſt der Geſchwindigkeit des Kolbens gegeben ſind, und wie hier noch vorausgeſetzt wird, $k = \Pi$ iſt.

Man wird ſich aus dem 300 §. erinnern, daß die bisherigen Lehren eigentlich zur Abſicht gehabt haben, des Hrn. Belidors Vortrag zu berichtigen, und zu zeigen, was man bey Anordnung eines Saugwerks beobachten müſte, wenn man allein auf die möglichſte Erſparung der Zeit ſehen wollte. Dies iſt aber, wie bekannt, bey Anordnung einer Maſchine allein nicht hinlänglich, wenn man den möglichſt gröſten Effect erwarten will. Es iſt Kraft nöthig, den Kolben zu bewegen, und nachdem die Kraft vermittelſt dieſer oder einer andern mechaniſchen Einrichtung in den Kolben würkt, wird der Effect bald gröſſer bald kleiner ſeyn. Die folgenden Unterſuchungen ſollen nun alle dabey zu erwägende Umſtände näher ins Licht ſetzen.

308 §.

Wenn die Kolben zweyer Saugwerke, die übrigens gleiche Abmeſſungen haben, ſo mit einander verbunden ſind, daß ſie wechſelsweiſe ſteigen und ſinken, alſo

alſo der eine binnen der Zeit niedergeht, daß der andre das Waſſer herauf ſaugt, ſo heiſt die ganze Einrichtung ein doppeltes Saugwerk. Es können noch mehr, als ein paar Saugwerke ſo mit einander verbunden werden, daß binnen der Zeit die eine Hälfte das Waſſer ſaugt, da die Kolben der übrigen abwärts gehen: und man kann füglich überhaupt alsdenn den Namen eines zuſammengeſetzten Saugwerks brauchen.

309 §.

Alle Abmeſſungen eines doppelten Saugwerks ſind gegeben, nebſt der Kraft, welche die Kolben aufwärts zieht, und für beyde Kolben gleich groß angenommen wird: man ſucht die Menge Waſſer, die das Saugwerk in gegebener Zeit T hebt.

Aufl. Man kann beyde Stiefel zuſammen als eine einzige Pumpe betrachten, die beſtändig ihr Waſſer ergieſt. Wenn nun die Zeit eines Kolbenzuges $= \vartheta$ iſt, und man hier durch b die ganze Höhe des Kolbenzuges verſteht, ſo iſt

$$\vartheta = \frac{1}{2\sqrt{g}} A\int v \frac{b}{k-f} \sqrt{2(\varepsilon + mH)},$$

(304 §.), und in dieſer Zeit hebt das Saugwerk die Menge Waſſer $= mb$. Um alſo die Menge Waſſer zu haben, die das Saugwerk in der Zeit T hebt, ſchlieſſe man $\vartheta : T = mb$: geſuchten Menge. Dieſe ſey $= M$; ſo iſt

$$M = \frac{mb.T}{\vartheta} = \frac{mb.2T\sqrt{g}}{E\int v.(b:(k-f)) \times \sqrt{2.(\varepsilon + mH)}}.$$

Wenn

Wenn alle Querſchnitte der Röhre gleich groß ſind, und ihre Länge $= l$ iſt; ſo hat man $H = \frac{l}{n}$. Weil überdem ε in Vergleichung mit l nur ſehr klein iſt, ſo kann man ε ohne ſonderlichen Fehler aus der Acht laſſen, und $\frac{ml}{n}$ ſtatt $\varepsilon + mH$ ſchreiben. Ich werde dieſe Vorausſetzung bey den folgenden Rechnungen annehmen, und vermöge derſelben wird $M = \frac{\sqrt{g}\sqrt{n}}{\sqrt{l}} \cdot \frac{b.T\sqrt{2m}}{A\int v.(b:(k-f))}$.

310 §.

Es ſey die Zeit gegeben, während welcher der Kolben einmahl auf und nieder ſpielen ſoll, nebſt allen übrigen Abmeſſungen des doppelten Saugwerks: man ſucht die Kraft, welche den Kolben aufwärts ziehen muß.

Aufl. Wenn t die Zeit eines Kolbenſpiels iſt, ſo hat man

$$t = 2\vartheta = \frac{1}{\sqrt{g}} A\int v \frac{b}{k-f} \sqrt{\frac{2ml}{n}} \quad (309\ §.)$$

Daraus folgt $\frac{t\sqrt{n}\sqrt{g}}{\sqrt{2ml}} = A\int v \frac{b}{k-f}$,

folglich wird $\frac{b}{k-f} = \int v . \frac{t\sqrt{ng}}{\sqrt{2ml}}$,

und $k = f + b : \int v \frac{t\sqrt{ng}}{\sqrt{2ml}}$.

Es muß demnach die Kraft, welche die Kolben treiben ſoll, gröſſer ſeyn, als das Gewicht einer Waſſerſäule auf der Grundfläche des Kolbens in derjenigen Höhe auf welche das Waſſer gehoben werden ſoll. Dieſe Höhe iſt hier eigentlich einerley mit der niedrigſten Kolbenhöhe über die Oberfläche des aus der Tiefe zu hebenden Waſſers, die in den bisherigen Formuln $= f$ geſetzt iſt.

311 §.

Damit eben die Kraft in gegebener Zeit die möglichſt gröſte Menge Waſſer hebe, muß man die Saugröhre

1) ſo weit, und

2) ſo kurz machen, als die übrigen Umſtände zulaſſen. Es war nämlich M =

$$\frac{\sqrt{g}\sqrt{n}}{\sqrt{l}} \cdot \frac{b.T.\sqrt{2m}}{A\int v(b:(k-f))}.$$ Wenn alſo alles

übrige einerley iſt, ſo verhält ſich M wie $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{l}}$.

Was den erſten Punct betrifft, ſo iſt dabey zu bemerken, daß eben die Kraft den Kolben ſchneller bewegen werde, wenn die Saugröhre weiter gemacht wird, weil $t = 2\vartheta = \frac{\sqrt{2ml}}{\sqrt{ng}} A\int v \frac{b}{k-f}$ iſt.

Man muß alſo bey Anwendung dieſer Regel wohl prüfen, ob die Kraft, welche bey Maſchinen gewöhnlich veränderlich iſt, und bey gröſſerer Geſchwindigkeit abnimmt, bey einer weitern Röhre auch auf den Kolben noch eben ſo ſtark würken könne.

Je weiter übrigens die Saugröhre, und je kürzer ſie iſt, deſto kleiner iſt die Kraft, welche erfordert wird, wenn der Kolben in gegebener Zeit einmahl auf und nieder ſpielen, alſo in gegebener Zeit eine gegebene Menge Waſſer gehoben werden ſoll. Es war nämlich $k = f + b : fv \frac{t\sqrt{ng}}{\sqrt{2ml}}$, wenn t die Zeit eines Kolbenſpiels, alſo die in der Zeit T gehobene Menge Waſſer $= \frac{2mbT}{t}$ ſeyn ſoll, und es iſt k deſto kleiner, je gröſſer $\sqrt{n}$ und je kleiner $\sqrt{l}$ iſt.

Der XIX. Abſchnitt.

Das Allgemeine der Theorie der Waſſer-Künſte mit Anwendungen auf die Saug-werke.

312 §.

Man iſt gewohnt, alle diejenige Maſchinen Waſſerkünſte zu nennen, welche dazu dienen, das Waſſer aus der Tiefe in die Höhe zu bringen: und die Anwendung der bisherigen allgemeinen Lehren von den Geſetzen der Bewegung des Waſſers auf die Theorie der Waſſerkünſte macht einen ſehr wichtigen Theil der Hydraulik aus. Deswegen müſſen die allgemeinen Lehren vom Maſchinenweſen, welche im XXIII Abſchnitt der Mechanik vorgetragen ſind, mit dieſer Unterſuchung, wenn ſie vollſtändig ſeyn ſoll,

ſoll, noch verbunden werden. Dabey iſt aber gleich anfangs zu bemerken, daß die Vorausſetzungen, worauf ſich jene allgemeine Theorie von Maſchinen-Weſen gründet, hier nicht allemahl genau ſtatt haben. Es iſt nämlich dort angenommen worden, daß das Moment des Widerſtandes, den eine Maſchine zu überwinden hat, beſtändig einerley bleibe, daß alſo der Gang der Maſchine, wenn ſie von einer veränderlichen Kraft getrieben wird, alsdenn einmahl gleichförmig werden müſſe, wenn die Kraft bey zunehmender Geſchwindigkeit der Maſchine abnimmt. Bey den gewöhnlichen Einrichtungen der Pumpenkünſte kann die Bewegung des Kolbens nicht wohl völlig gleichförmig erhalten werden, wie im 300 §. ſchon vorläufig erinnert iſt, und im folgenden ausführlicher erhellen wird. Man muß ſich begnügen, wenn man der Maſchine nur beynahe einen gleichförmigen Gang zuwege bringen kann, wenigſtens in ſo weit, daß alle Kolbenſpiele in gleichen Zeiten erfolgen. Wie man ihr in ſolcher Abſicht bald auf dieſe, bald auf jene Art helfen könne, wird ſich unten bey Beſchreibung der gebräuchlichſten Arten ſolcher Maſchinen am beſten zeigen laſſen. Ich ſetze demnach voraus, man könne die Einrichtung der Maſchine ſo machen, daß das Moment des Widerſtandes, welchen die Maſchine zu bewegen hat, wenigſtens beynahe beſtändig einerley bleibe, damit das allgemeine Geſetz des 372 §. Mech. ſeine Anwendung finde.

313 §.

Es iſt die Zeit eines Kolbenſpiels gegeben, nebſt allen Abmeſſungen eines doppelten oder auch noch mehr zuſammengeſetzten Saug-

werks; überdem iſt die Einrichtung der Maſchine bekannt, welche die Kolben treibt: man ſucht, wie groß das mechaniſche Moment der angebrachten Kraft ſey, wenn ſich alles ſchon im Beharrungsſtande befindet.

Aufl. Es ſey h die Höhe des Kolbenzuges, und t die Zeit eines Kolbenſpiels, ſo iſt $2h$ der Weg, den jeder Kolben in der Zeit t zurück legt. Wenn demnach im Beharrungsſtande die Geſchwindigkeit der Kolben $= \beta$ iſt; ſo hat man $\beta = \frac{2h}{t}$. Der Widerſtand, welchen alle Kolben, die zugleich ſaugen, der Bewegung der Maſchine entgegen ſetzen, ſey $=$ Q, ſo iſt der Effect der Maſchine $= Q\beta = \frac{2Qh}{t}$. Die angebrachte Kraft ſey $=$ P, und ihre Geſchwindigkeit, oder vielmehr die Geſchwindigkeit des angegriffenen Puncts der Maſchine (379 §. M.) ſey im Beharrungsſtande $= \alpha$, ſo hat man $P\alpha = \frac{2Qh}{t}$. Aus den Abmeſſungen des Saugwerks aber findet man Q nach Vorſchrift des 310 §. Wenn nämlich das Saugwerk gedoppelt, und der Durchmeſſer der Mündung eines jeden Stiefels $= \delta$ iſt; ſo wird Q $=$ dem Gewicht einer Menge Waſſer, deren Inhalt $= \frac{1}{4}\pi\delta\delta k$ iſt. Dafern aber die Maſchine n Paar Pumpen treibt, die alle gleiche Abmeſſungen haben; ſo iſt die Anzahl aller Kolben, die zugleich ſaugen, $= n$, und alle dieſe Kolben widerſtehen gleich ſtark. Demnach wird Q $=$ dem Gewicht einer Waſſerſäule, deren Inhalt $= \frac{1}{4}\pi n\delta\delta k$ iſt, und man findet k aus dem 310 §.

Es ſey F eine Menge Waſſer, deren Gewicht $= P$, und K eine Menge Waſſer, deren Gewicht $= Q$ iſt, γ aber das Gewicht eines Cubicfuſſes Waſſer; ſo iſt $P = \gamma . F$, und $Q = \gamma . K$ (105 §. Stat.) Setzt man dieſe Werthe ſtatt P und Q, ſo erhält man $F\alpha = \frac{2Kb}{t}$. Dieſer Ausdruck iſt dem vorigen ganz ähnlich, und man kann F und K als das Gewicht einer Menge Waſſer betrachten, das ſo groß als Kraft und Widerſtand iſt, wenn man annimmt, die eigene Schwere des Waſſers ſey $= 1$ geſetzt. Dies iſt bey Unterſuchungen über den Effect der Hydrauliſchen Maſchinen gewöhnlich. Man drückt ſowohl die Kraft als auch den Widerſtand durch eine Menge Waſſer aus, wovon das Gewicht ſo groß, als Kraft und Widerſtand iſt: will man alsdenn die Kraft oder den Widerſtand auf die ſonſt gewöhnliche Art ausdrücken, ſo muß man mit dem Gewicht eines Cubicfuſſes Waſſer multipliciren.

314 §.

Die Menge Waſſer zu finden, welche die angebrachte Kraft in gegebener Zeit T vermittelſt eines zuſammengeſetzten Saugwerks auf eine gegebene Höhe f heben kann.

Aufl. Wenn k die Bedeutung des 310 §. behält, ſo iſt $K = \frac{1}{4}\pi n\delta\delta k$ (313 §.) Es iſt aber $F\alpha = \frac{2Kb}{t}$, alſo wird $F\alpha = \frac{2.\frac{1}{4}\pi n\delta\delta kb}{t}$. Nun hebt das Saugwerk in der Zeit t die Menge Waſſer $= 2.\frac{1}{4}\pi n\delta\delta.b$, folglich iſt die in der Zeit T gehobene Menge Waſſer $M = \frac{2.\frac{1}{4}\pi n\delta\delta b T}{t}$, und dies giebt

$\frac{2.\frac{1}{4}\pi n\delta\delta b}{t} = \frac{M}{T}$. Man ſetze dieſen Werth in die vorige Gleichung, ſo wird $F\alpha = \frac{Mk}{T}$, alſo $M = \frac{F\alpha.T}{k}$. Aus dem 310 §. weiß man, daß allemahl $k > f$ ſey: ſetzt man alſo $k = \lambda f$, ſo iſt $\lambda > 1$, und man hat $M = \frac{F\alpha.T}{\lambda.f}$.

Es iſt demnach allemahl $M < \frac{F\alpha.T}{f}$, weil nothwendig allemahl $\lambda > 1$ ſeyn muß. Je weniger indeſſen k die Höhe f übertrift, deſto näher kommt die Waſſermenge M dem Werth $\frac{F\alpha.T}{f}$. Man muß demnach den Ausdruck $\frac{F\alpha.T}{f}$ als eine Gränze betrachten, welche die mittelſt eines Saugwerks zu hebende Waſſermenge nie übertreffen kann. Das Werk wird deſto vollkommener ſeyn, je näher die Waſſermenge dieſer Gränze kommt. Ich werde hinführo $\frac{F\alpha T}{f} = M$ ſetzen, ſo iſt alsdenn die würkliche Waſſermenge $= \frac{1}{\lambda} M$.

Beym einfachen Saugwerk iſt dieſe Waſſermenge nur halb ſo groß, und man erhält für die erwehnte Gränze $M = \frac{F\alpha.\frac{1}{2}T}{f}$.

Uebri-

Uebrigens erinnere ich noch, daß bey der Anwendung dieſer Formuln auf beſondre Fälle, durch f die Höhe des niedrigſten Kolbenſtandes über das aus der Tiefe zu hebende Waſſer verſtanden werden müſſe. Denn ſo hoch wird eigentlich das Waſſer durchs Saugen gehoben. Wenn das Gußrohr beträchtlich hoch über dem Kolben angebracht iſt, ſo daß auch noch über dem Kolben, wie im 269 und 289 §. angenommen ward, eine Waſſerſäule ſteht, die der Kolben mit heben muß; ſo wird ein Theil der angebrachten Kraft hiezu verwandt, und die Pumpe bleibt kein bloſſes Saugwerk mehr. Es erfordert eine beſondere Unterſuchung, wie groß der Theil der Kraft ſey, den man auf die Hebung dieſer über dem Kolben ſtehenden Waſſerſäule rechnen muß, die unten vorkommen wird. Deswegen werde ich hier beſtändig annehmen, daß das Gußrohr nahe über dem höchſten Kolbenſtande befindlich ſey, damit kein beträchtlicher Theil der Kraft nöthig ſey, das ſchon über dem Kolben hinauf getretene Waſſer bis zum Gußrohr zu heben.

315 §.

Wenn die Maſchine, worin die Kraft F mit dem Bewegungsmoment $F\alpha$ würkt, ſonſt eine Laſt M im Beharrungsſtande auf die Höhe f in der Zeit T brächte; ſo würden M und F ebenfalls ſo von einander abhängen, wie die Gleichung $Mf = F\alpha . T$ erfordert. Wäre nämlich die Geſchwindigkeit der Laſt $= \beta$, ſo hätte man für den Beharrungsſtand der Maſchine $M\beta = F\alpha$ und $\beta = \frac{f}{T}$, alſo $\frac{Mf}{T} = F\alpha$, oder $Mf = F\alpha . T$. Hieraus folgt, daß ſich

bey Berechnung des Effects, den eine Maſchine die ein Saugwerk treiben ſoll, höchſtens leiſten kann, die Sache ſo betrachten laſſe, als wenn die in gewiſſer Zeit zu hebende Menge Waſſer ſonſt eine Laſt wäre, die vermittelſt der Maſchine in eben der Zeit auf eben die Höhe gehoben werden ſollte.

Ueberhaupt iſt man gewohnt, die Güte einer Maſchine aus der Gröſſe der Laſt zu beurtheilen, die eine gegebene Kraft vermittelſt der Maſchine in gegebener Zeit auf eine gegebene Höhe heben könnte. Je gröſſer dieſe Laſt für eine gegebene Kraft, Zeit und Höhe iſt, deſto beſſer hält man die Maſchine. Nach eben dieſer Maxime wird die Güte einer Waſſerkunſt beurtheilet. Wenn z. E. ein Menſch vermittelſt einer Kunſt zwey Cubicfuß Waſſer, vermittelſt einer andern Kunſt aber vier Cubicfuß Waſſer in einer Minute 10 Fuß hoch bringen könnte, ſo wäre die letzte nochmahl ſo gut, als die erſte.

316 §.

Die Waſſermenge, welche ein Saugwerk in der Zeit T auf die Höhe f hebt, kann zwar nicht völlig $= \frac{F\alpha . T}{f}$ ſeyn, wenn man indeſſen $M = \frac{F\alpha . T}{f}$ nimmt, ſo kann man dieſe Waſſermenge als die möglichſt gröſte betrachten, welche das Saugwerk im Zuſtande der gröſten Vollkommenheit höchſtens heben könnte. Die würklich gehobene Waſſermenge wird alsdenn $= \frac{1}{\lambda} M$ ſeyn. Dafern nun die Gleichung $Mf = F\alpha T$ allgemein für alle Arten der Waſſerkünſte erwie-

erwieſen werden kann, welches bey jeder beſondern Art derſelben beſonders unterſucht werden muß; ſo giebt ſie eine Grundregel an die Hand, wornach ſich die Güte einer jeden Waſſerkunſt prüfen läßt, und dieſe Prüfung muß man nach folgender Vorſchrift anſtellen.

Gewöhnlich wird die Kunſt durch Menſchen, Thiere, Waſſer oder Wind getrieben, und alsdenn iſt allemal die angebrachte Kraft veränderlich, ſo lange ſich die Geſchwindigkeit des angegriffenen Puncts ändert. Aber es giebt eine gewiſſe Geſchwindigkeit α, wobey das Moment der Kraft am größten wird. Dieſe Geſchwindigkeit muß der angegriffene Punct im Beharrungsſtande haben, wenn die Maſchine aufs vortheilhafteſte eingerichtet iſt. Setzt man alſo ſtatt $F\alpha$ das Moment, welches dieſer Geſchwindigkeit zugehört, ſo giebt der Ausdruck $M = \frac{F\alpha T}{f}$ eine Waſſermenge, womit man diejenige vergleichen muß, welche eine würkliche erbauete Maſchine, die man prüfen will, in eben der Zeit T auf die Höhe f bringt. Je weniger die wirklich gehobene Waſſermenge von der Gränze $\frac{F\alpha T}{f}$ unterſchieden iſt, deſto vollkommener iſt die Waſſerkunſt.

317 §.

Dafern ein Menſch die Maſchine treiben ſoll, ſo iſt das Bewegungsmoment $F\alpha$ am größten, wenn $\alpha = 2$ Fuß iſt, und alsdenn iſt ungefähr $F =$ einer Menge Waſſer von 26 Pf. (395 §. Mech.). Wenn man alſo den Cubicfuß Waſſer 70 Pf. ſchwer ſchätzt, ſo iſt $F = \frac{3}{8}$ Cubicfuß; und wenn die Anzahl der an

der Maſchine arbeitenden Menſchen $= m$ iſt, ſo hat man $F = \frac{3}{8}m$ Cub Fuß, folglich $F\alpha = \frac{3}{4}m$. Dies giebt $M = \frac{\frac{3}{4}mT}{f}$: und wenn man für T eine Stunde oder 3600 Secunden annimmt, ſo iſt $M = \frac{2700 . m}{f}$.

Werden ſtatt der Menſchen Pferde gebraucht, ſo iſt $F\alpha$ am größten, wenn $\alpha = 4$ Fuß iſt, da dann für jedes Pferd durch F eine Menge Waſſer zu verſtehen iſt, die etwa 186 Pf. wiegt (395 §. Mech.). Alſo wird $F = 2\frac{2}{3}$ Cub. Fuß, und $F\alpha = \frac{32}{3}$ Cub. Fuß, oder $F\alpha = \frac{32}{3}m$ Cub. Fuß, wenn die Anzahl der arbeitenden Pferde $= m$ iſt. Dies giebt $M = \frac{\frac{32}{3}mT}{f}$ und für eine Stunde wird $M = \frac{38400m}{f}$ C. F.

318 §.

Dieſe Formuln kommen mit Hn. Eulers Rechnung überein in der Abhandlung: Diſcuſſion plus particuliere de diverſes manieres d'elever de l'eau &c. §. 29. 32. in der Hiſtoire de l'Acad. de Berlin T. VIII. p. 164. 166. Weil aber für die Kraft eines Pferdes die Vorausſetzung $F = \frac{8}{3}$ Cub. Fuß vielleicht zu groß iſt; ſo ſetzt Hr. Euler in eben der Abhandlung im 60 §. 182 S. nur $F = \frac{5}{2}$ Cub. F., alſo $F = \frac{5}{2}m$, wenn die Anzahl der arbeitenden Pferde $= m$ iſt. Hieraus folgt $F\alpha = 10m$, und $M = \frac{10mT}{f}$, alſo für eine Stunde $M = \frac{36000m}{f}$ Cub. Fuß.

Um

Um mit Hn. Euler einerley Zahlen zu erhalten, habe ich mit ihm a. a. O. im 28 §. 163 S. den Cub. Fuß Waſſer 70 Pf. ſchwer angenommen. Bey einer genauern Berechnung würde es darauf ankommen, was man für Maaß und Gewicht brauchte (49. 50 §. Hydroſt.). Hier iſt ein ungefährer Ueberſchlag hinlänglich, weil dieſe Beſtimmungen für Menſchen und Thiere noch nicht ſo ganz ſicher ſind.

319 §.

Wird die Maſchine durch ein unterſchlächtiges Waſſerrad getrieben, ſo ſey die Fläche der Schaufeln $= yy$, die Geſchwindigkeit des Aufſchlagewaſſers $= C$; ſo iſt der Effect am größten, wenn der Mittelpunct jeder Schaufel mit der Geſchwindigkeit $\frac{1}{3}C$ läuft, und alsdenn iſt der Druck des Waſſers gegen die Schaufeln $= \frac{1}{9} \cdot \frac{yy}{g} \cdot C^2$ (113 §. das dortige k und $\gamma = 1$ geſetzt). Wenn alſo Rheinländiſch Maaß gebraucht, und $g = 15,625$ geſetzt wird, ſo hat man $F = \frac{4}{9} \frac{1}{62,5} \cdot yy \cdot C^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{125} \cdot yy \cdot C^2$ $= \frac{8}{1125} yy \cdot C^2$. Man ſetze demnach $\alpha = \frac{1}{3}C$, ſo wird $F\alpha = \frac{8}{3375} yy \cdot C^3$, folglich $M = \frac{8 \cdot yy \cdot C^3 \cdot T}{3375 f}$ und für eine Stunde iſt $M = \frac{128}{15 f} yy C^3$, oder beynahe $M = 8\frac{1}{2} \cdot \frac{yy C^3}{f}$.

Wenn man die Menge des in einer Secunde aufſchlagenden Waſſers $= A$, und das der Geſchwindigkeit C zugehörige Gefälle $= a$ ſetzt, ſo daß $a =$

C²

$\frac{C^2}{4g}$ iſt; ſo wird $F\alpha = \frac{4}{27} Aa$, (113 §.) folglich $M = \frac{4 . T . A . a}{27 . f}$, und man hat für jede Stunde die Waſſermenge $M = \frac{1600 Aa}{3f}$. Würde aber ſtatt des unterſchlächtigen Rades ein oberſchlächtiges gebraucht: ſo könnte man $F\alpha = \frac{4}{5} Aa$ ſetzen (145 §.), und man erhielte $M = \frac{4T . A . a}{5f}$, alſo für eine Stunde $M = \frac{2880 A . a}{f}$, wo ebenfalls A die Menge des in einer Secunde aufſchlagenden Waſſers, und a die Höhe des Gefälles bedeutet.

320 §.

Daß die Friction bey allen Maſchinen ein beträchtliches Hinderniß der Bewegung ſey, iſt ſchon zur Genüge aus der Mechanik bekannt. Wenn alſo gleich eine Waſſerkunſt übrigens ſo eingerichtet werden könnte, daß die Waſſermenge $M = \frac{F\alpha . T}{f}$ dadurch gehoben würde, ſo würde doch wegen der Friction die wirklich gehobene Menge merklich kleiner ſeyn. Dafern man im 313 §. annimmt, es widerſtehe die Friction ſo ſtark, als wenn die Laſt Q noch um das Stück q größer wäre: ſo hätte man für den Beharrungsſtand der Maſchine $P\alpha = (Q+q)\beta$, oder $F\alpha = (K + k)\beta$, wenn k eine Menge Waſſer iſt, welche das Gewicht q hat. Man ſetze $\frac{k . \beta}{\alpha} = \varphi$; ſo iſt φ eine Menge Waſſer, de-

ren Gewicht ſo groß iſt, als eine Kraft, die im angegriffenen Punct der Maſchine angebracht, mit der Friction im Gleichgewicht wäre: und man erhält

$$(F-\varphi)\alpha = K\beta = \frac{2Kb}{t} = \frac{Mf}{t} \quad (314 \text{ §.}),$$

alſo $M = \dfrac{(F-\varphi)\alpha T}{f}$. Je kleiner demnach φ iſt, deſto weniger wird die wirklich gehobene Menge Waſſer von derjenigen unterſchieden ſeyn, welche die Maſchiene im möglichſt vollkommenſten Zuſtande geben würde, vorausgeſetzt, daß die übrige Einrichtung ſo beſchaffen ſey, wie die Vorausſetzung, daß das Moment $(F-\varphi)\alpha$ am größten ſey, erfordert.

321 §.

Bey den Pumpenkünſten kommt außer derjenigen Friction, welcher die übrigen Theile der Maſchine unterworfen ſind, vornämlich die zwiſchen dem Kolben und der inwendigen Fläche des Stiefels vorfallende Friction in Betrachtung. Die eigentliche Stärke dieſer Friction läßt ſich nicht wohl aus blos theoretiſchen Gründen herleiten, und es iſt am ſicherſten, ſie in einem oder dem andern beſondern Fall, vermittelſt eines Verſuchs, zu beſtimmen. Wenn man das Kolbenventil einer noch leeren Pumpe öfnet, und ſodann eine Kraft anbringt, die den Kolben bewegt, ſo hat dieſelbe nichts weiter, als den Widerſtand, welchen die Friction verurſacht, zu überwinden, wenn man die etwanige Ueberwucht des Kolbens und der Kolbenſtange beſonders in Betracht ziehet. Demnach läßt ſich durch einen Verſuch die Kraft finden, welche die Friction gerade zu überwinden vermögend iſt. Bey einerley Einrichtung

des

des Kolbens, einerley Zeit des Kolbenzuges, und einerley Waſſermenge, iſt die Friction beynahe dem Durchmeſſer des Stiefels umgekehrt proportional. Wenn δ dieſer Durchmeſſer, und b die Höhe, t die Zeit eines Kolbenzuges iſt; ſo iſt die innere Fläche des Stiefels, woran ſich der Kolben in der Zeit t reibt, $=\pi\delta b$, und man nimmt an, daß die Friction bey einerley Zeit t dieſer Fläche beynahe proportional ſey. Wird nun in der Zeit t die Waſſermenge M gehoben, ſo iſt $M = \frac{1}{4}\pi\delta\delta b$, alſo $\pi\delta b = 4M:\delta$, und es verhält ſich die Friction umgekehrt wie δ, wenn t und M einerley ſind. Man ſehe die Hiſtoire de l' Academie de Berlin A. 1752 p. 226. Die Regel iſt, wie alle andere, welche die abſolute Größe der Friction betreffen, ſo ganz ſicher nicht, indeſſen iſt doch ſoviel gewiß, daß wegen dieſer Friction deſto mehr Kraft erfordert wird, je ſchneller die Bewegung des Kolbens ſeyn ſoll; und ſo würde dies noch ein neuer Grund ſeyn, bey Pumpenkünſten einen niedrigen und langſamen Kolbenzug zu empfehlen.

322. §.

Eine vortheilhafte Einrichtung des doppelten, oder auch noch mehr zuſammengeſetzten Saugwerks anzugeben, wenn feſtgeſetzt iſt, welche Art der Kräfte die Kunſt treiben, und wie hoch das Waſſer gehoben werden ſolle.

Aufl. Man ſuche zuerſt die Menge Waſſer, welche die anzubringende Kraft in willkührlich angenommener Zeit T höchſtens auf die gegebene Höhe

f bringen kann, aus der Gleichung $M = \frac{(F-)\varphi\alpha T}{f}$.
Um φ zu finden, muß man vorher einen ungefähren Ueberſchlag von der Einrichtung der Maſchine machen, weil φ davon abhängt. Ich will Kürze halber F ſtatt $F-\varphi$ ſchreiben, und vorausſetzen, daß der wegen der Friction erforderliche Theil von F ſchon abgerechnet ſey. Die Maſchine wird aber nur die Menge Waſſer $\frac{1}{\lambda}$ M heben, und die Kunſt iſt deſto vollkommener, je kleiner λ iſt. Man ſuche demnach λ aus der Gleichung

$$k = \lambda f = f + b : \sin v \,.\, \frac{t\sqrt{gn}}{\sqrt{2ml}} \quad (310.\ 314\ \S.).$$

Dieſe giebt $\lambda = 1 + b : f\int v \,.\, \frac{t\sqrt{gn}}{\sqrt{2ml}}$: und wenn man den Durchmeſſer des Stiefels $= \delta$, den Durchmeſſer der Saugröhre $= \varepsilon$ ſetzt; ſo wird $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} = \frac{\varepsilon}{\delta}$, und $\lambda = 1 + b : f\int v\ \frac{t\varepsilon\sqrt{g}}{\delta\sqrt{2l}}$. Man ſetze ferner $\lambda = 1 + \frac{1}{\omega}$, alſo $\frac{1}{\omega} = b : f\int v \frac{t\varepsilon\sqrt{g}}{\delta\sqrt{2l}}$, ſo wird $\int v\ \frac{\varepsilon t\sqrt{g}}{\delta\sqrt{2l}} = \frac{b\omega}{f}$, und $\frac{\varepsilon t\sqrt{g}}{\delta\sqrt{2l}} = A\int v \,.\, \frac{b\omega}{f}$. Dieſen Bogen ſetze man $= \psi$, ſo erhält man $\frac{\varepsilon t\sqrt{g}}{\delta\sqrt{2l}} = \psi$, und es wird $t =$

$\delta\psi\sqrt{2l}$

$\frac{\delta\psi\sqrt{2l}}{\varepsilon\sqrt{g}}$. Wenn nun das Saugwerk doppelt iſt, ſo iſt die wirkliche Waſſermenge $\frac{M}{\lambda} = \frac{2mbT}{t}$ (309 §.) $= 2 \cdot \frac{1}{4}\pi\delta\delta b \cdot \frac{T}{t}$, dafern es aber aus n Paar Pumpen zuſammen geſetzt iſt, ſo hat man $\frac{M}{\lambda}$ $= 2 \cdot \frac{1}{4}\pi n\delta\delta b \cdot \frac{T}{t}$ (314 §.), folglich $\frac{1}{4}\pi\delta\delta = \frac{Mt}{2n\lambda bT}$. Die Kraft ſey am Umfang eines Rades angebracht, deſſen Halbmeſſer $= r$ iſt; und die Umlaufszeit deſſelben ſey $= \vartheta$, ſo hat man $\vartheta = \frac{2\pi r}{\alpha}$. Dieſe Zeit ϑ wird alſo durch den Halbmeſſer r beſtimmt, weil α durch die Natur der gegebenen Kraft beſtimmt iſt. Setzt man alſo noch $\frac{\vartheta}{t} = \mu$, ſo wird die Einrichtung der Maſchine durch μ beſtimmt.

Man hat demnach folgende vier Hauptgleichungen

$$1)\ \lambda = 1 + \frac{1}{\omega}, \qquad 2)\ \psi = A\int v \frac{b\omega}{f},$$

$$3)\ t = \frac{\psi\delta\sqrt{2l}}{\varepsilon\sqrt{g}}, \qquad 4)\ \frac{1}{4}\pi\delta\delta = \frac{Mt}{2nb\lambda T},$$

wodurch vier von den ſieben Größen $\lambda, \omega, \psi, b, t, \delta, \varepsilon$, beſtimmt werden, wenn man drey davon willkührlich annimmt. Hiezu kommen noch die zwo Gleichungen

gen $\vartheta = \frac{2\pi r}{\alpha}$ und $\vartheta = \mu t$. Iſt alſo t durch die vorigen Gleichungen beſtimmt, ſo behält man noch die Freyheit von den dreyen Gröſſen ϑ, μ, r, eine willkührlich anzunehmen, denn α iſt ſchon durch die Natur der gegebenen Kraft beſtimmt.

323 §.

Man wählt gern Saugröhren, die enger als die Stiefel ſind, weil weite und dabey etwas hohe Saugröhren das Waſſer leicht fallen laſſen, wenn nicht alles gegen den Zugang der Luft aufs ſorgfältigſte verwahrt iſt. Man kann demnach das Verhältniß $\frac{\varepsilon}{\delta}$ nebſt t willkührlich annehmen, und ψ aus der Gleichung $\psi = \frac{\varepsilon t \sqrt{g}}{\delta \sqrt{2l}}$ ſuchen. Alsdann hat man $\frac{b\omega}{f} = \text{ſinv}\,\psi$ und $b\omega = f \,.\, \text{ſinv} \,.\, \psi$. Nun kann man von b und ω das eine willkührlich annehmen, ſo wird das andre durch dieſe Gleichung beſtimmt. Statt ω muß man nun eine etwas groſſe Zahl nehmen, damit $\lambda = 1 + \frac{1}{\omega}$ ſehr wenig gröſſer als 1 werde. Je gröſſer ε gegen δ, und je gröſſer t iſt, deſto gröſſer wird ψ, und ſo lange alsdenn ψ nicht gröſſer als π wird; ſo lange wächſt das Product $b\omega$. Wenn $\psi = \pi$ iſt, ſo hat man $b\omega = 2f$, und gröſſer kann dies Product nicht werden. Alsdenn iſt $t = \frac{\pi\delta\sqrt{2l}}{\varepsilon\sqrt{g}}$, und es wäre nicht vortheilhaft, t noch gröſſer anzunehmen.

324 §.

Dieſe Formuln ſind ſo allgemein, daß ſie ſich auch anwenden laſſen, wenn gleich das Saugwerk nur einfach wäre. Man kann alsdenn M eben ſo berechnen, als wenn das Saugwerk doppelt oder mehr zuſammen geſetzt wäre, nur muß man alsdenn in der vierten Gleichung $n = \frac{1}{2}$ ſetzen, und die Sache ſo betrachten, als wenn die Maſchine $\frac{1}{2}$ Paar Pumpen triebe, weil überhaupt n die Anzahl der Paare Pumpen bedeutet, welche die Maſchine treibt. Das einfache Saugwerk kann nemlich nur deswegen in der Zeit T höchſtens die Waſſermenge $M = \frac{1}{2} . \frac{F\alpha T}{f}$ heben, weil es nicht ununterbrochen würkt, und die halbe Zeit T umſonſt hingeht. In der That hebt es in der Zeit $\frac{1}{2}$T aufs höchſte die Waſſermenge $\frac{F\alpha . \frac{1}{2}T}{f}$, eben wie das doppelte thun würde. Wenn man alſo nach dieſer Formul M berechnet hat, ſo muß man auch in der n. 4. gefundenen Gleichung $\frac{1}{2}$T ſtatt T brauchen, und übrigens ſo rechnen, als wenn das Saugwerk doppelt wäre. Daſſelbe hat man, wenn $n = \frac{1}{2}$ geſetzt wird.

Der

Der XX. Abſchnitt.

Von den Schwengel-Künſten.

325 §.

Die einfachſte und bekannteſte Art, den Pumpen-Kolben vermittelſt einer Mechaniſchen Einrichtung zu bewegen, iſt folgende. Man bringt oben an der Pumpe einen Winkel-Hebel GQP ſo an, daß am kürzern Arm GQ die Kolbenſtange bey G vermittelſt eines Gewindes befeſtiget iſt, der längere Arm QP aber ſo weit herab hängt, daß ein Menſch demſelben eine Schwung-Bewegung nach Art eines Penduls mittheilen kann. Man ſieht leicht, daß oben an der Röhre bey D ein Geſtelle angebracht ſeyn muß, welches die Unterlage zu dem gebrochenen Hebel abgiebt. Der längere abwärts hängende Arm QP heißt der Pumpen Schwengel, und von ihm führt dieſe Einrichtung der Pumpe den Namen einer Schwengelkunſt. Vollſtändigere Beſchreibungen und Zeichnungen verſchiedener Arten von Schwengelkünſten findet man Leupold im Theatro Machin. Hydraul. T. II. im III Cap. 10 u. f. S. imgleichen beym Belidor in der Architectura Hydraul. III Buch IV Cap. 971 u. f. §§. Ob nun gleich dieſe Einrichtung an ſich ganz gut iſt, ſo iſt doch die Unbequemlichkeit damit verbunden, daß das äuſſere Ende G des Arms QG nicht in einer und eben derſelben Verticallinie, ſondern vielmehr im Kreisbogen ſteigt und ſinkt. Dies verurſacht, daß die Kolbenſtange beym Auf- und Niederſteigen nicht die

53 Fig.

verticale Lage behält, welches deswegen nöthig wäre, damit der Kolben nach keiner andern Richtung, als allein nach der verticalen Richtung auf und abwärts getrieben würde. Jene kreisförmige Bewegung des Puncts G aber verurſacht, daß der Kolben alsdenn, wenn die Stange GH von der Verticallinie abweicht, etwas ſeitwärts getrieben, und gegen die innere Fläche des Stiefels gedruckt wird. Wegen eben dieſes Umſtandes iſt es nöthig, daß der Kolben bey H mit einem Ringe, die Kolbenſtange GH aber unten mit einem Haken verſehen werde, der in den Ring eingreift. Auf ſolche Art wird ſich die Stange GH beym Auf- und Niederſpielen von der Verticallinie etwas ablenken können, ohne den Kolben zugleich mit auf die eine oder die andre Seite zu biegen.

326 §.

Es ſoll ein Menſch die Schwengelkunſt bewegen, und das Waſſer ſoll um die Höhe $= f$ aus der Tiefe gehoben werden: man frägt, wie das ganze Saugwerk eingerichtet werden müſſe, um den vortheilhafteſten Effect zu erhalten.

Aufl. Die Maſchine muß ſo eingerichtet werden, daß ihre Bewegung gleichförmig wird, wenn der angegriffene Punct mit einer Geſchwindigkeit von 2 Fuß in einer Secunde fortgehet: da dann der Menſch mit einer Kraft von etwa 25 bis 26 Pfund in die Maſchine würkt. Nimmt man demnach die Vorausſetzungen des 317 §. zum Grunde; ſo hat man $M = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{4}\Gamma}{f}$, weil ich annehme, daß das

Saug-

Saugwerk nur einfach ſey (314 §.). Weil nun hier der Schwengel keinen ganzen Umlauf, wie ein Rad vollendet, ſo kann das ϑ im 322 §. hier die Zeit eines Hin- und Wieder-Schwunges bedeuten. Des angegriffenen Puncts P Entfernung PQ von der Bewegungs-Axe ſey $= r$, und PQ durchlaufe auf jeden Hin- und Hergang den Winkel η, ſo iſt $\vartheta = \frac{2\eta r}{\alpha}$. Ferner wird $\mu = 1$, und $\vartheta = t$. Setzt man überdem den kürzern Hebelsarm GQ $= \varrho$, ſo wird G in der Zeit $\frac{1}{2}\vartheta$ den Bogen $\varrho . \eta$ beſchreiben, den man hier, wo die größte Schärfe nicht nothwendig, $= b$ ſchätzen kann. (Eigentlich wäre b die zu dem Bogen $\varrho . \eta$ gehörige Sehne). Man ſetze ferner den Durchmeſſer des Stiefels $= \delta$, den Durchmeſſer der Saugröhre $= \varepsilon$, nehme das Verhältniß $\frac{\varepsilon}{\delta}$ willkührlich an, und berechne ψ nach dem 323 §., ſo hat man $b . \omega = f \sin v . \psi$, und kann alsdenn von b und ω eines willkührlich annehmen. Daraus ergiebt ſich $\varrho = \frac{b}{\eta}$, $\lambda = \frac{\omega + 1}{\omega}$, und $\frac{1}{4}\pi\delta\delta = \frac{Mt}{b\lambda T}$, oder $\delta = \sqrt{\frac{Mt}{\frac{1}{4}\pi b\lambda T}}$, da dann zugleich ε aus dem angenommenen Verhältniß $\frac{\varepsilon}{\delta}$ gefunden wird. Dieſe Formuln kann man für die Berechnung der Schwengelkunſt noch bequemer einrichten. Es ſey nemlich die Geſchwindigkeit des Kolbens $= \beta$, ſo iſt $\frac{2b}{t}$

$= \beta$, und $b = \frac{1}{2}\beta t$. Hat man nun $\psi = \frac{et\sqrt{g}}{\delta\sqrt{2l}}$ nach dem 323 §. gefunden, ſo wird $b\omega = \frac{1}{2}\beta t \,.\, \omega = f \,.\, \sin\upsilon \,.\, \psi$, und $\beta \,.\, \omega = \frac{2f \,.\, \sin\upsilon \,.\, \psi}{t}$. Man nehme nun von β und ω das eine willkührlich an, ſo hat man hiernechſt $\varrho = \frac{\beta}{\alpha} \,.\, r$, und man kann ϱ oder r willkührlich annehmen. Uebrigens erhält man $\delta = \sqrt{\frac{M}{\frac{1}{8}\pi\beta\lambda T}}$. Auf dieſe Art wird β ſtatt b in Rechnung gebracht, und das iſt hier deswegen beſſer, weil es ſich ſo genau nicht beſtimmen läßt, wie groß η in den vorigen Formuln ſeyn würde. Man kann dem Arbeiter nicht wohl vorſchreiben, wie groß der Winkel ſeyn ſolle, durch welchen er den Schwengel bewegen müſſe. Indeſſen wird der Bogen ηr, durch welchen der Arbeiter den angegriffenen Punkt, bey jedem Hin- und Hergange ſchwingt, ungefähr 4 Fuß betragen, und dadurch wird $\vartheta = t = \frac{2\eta r}{\alpha}$ beſtimmt.

327 §.

Um nun dieſe allgemeine Auflöſung auf einen beſondern Fall anzuwenden, nehme man an, es ſoll das Waſſer 16 Fuß hoch gehoben werden, vom Waſſerpaß des in der Tiefe befindlichen Waſſers bis an die niedrigſte Kolbenſtelle gerechnet, ſo iſt $f = 16$ Fuß, und wenn man für T eine Minute oder 60 Secunden nimmt, ſo wird $M = \frac{3}{8} \,.\, \frac{60}{16} = 1{,}406$ Cubicfuß. Hiebey bemerke ich aber, daß dasjenige, worauf ſich dieſe Rechnung im 317 §. gründet, ſo

ſicher

ſicher nicht ſey, daß es nicht ſeine Ausnahmen litte. Es ſind noch mehr Erfahrungen nöthig, wenn es ausgemacht werden ſoll: ob die im 388 §. Mechan. angenommene Gleichung $P = p\left(1 - \frac{c}{h}\right)^2$ für die Kraft, womit der Menſch in die Maſchine würkt, ihre völlige Richtigkeit habe, und ob auch nicht ſtatt p und h andre Zahlen, als die dort angenommenen, geſetzt werden müſſen. Wenn der Menſch die Arbeit einige Stunden lang ununterbrochen fortſetzen ſoll, ſo darf man nach den bisherigen Erfahrungen ſtatt p und h nicht gröſſere Zahlen nehmen. Soll aber die Arbeit nur eine kurze Zeit von wenigen Minuten dauren, wie denn der Fall bey ſolchen Pumpen ſtatt hat, die dazu dienen ſollen, das Waſſer aus Brunnen zum öconomiſchen Gebrauch zu ziehen; ſo ſcheint es, daß nicht allein p gröſſer als 60 Pfund angenommen, ſondern auch h gröſſer als 6 Fuß geſetzt werden könne. Hr. Belidor hat verſchiedene mahl bey Erbauung der Schleuſen des Canals de Picardie und anderer Orten angemerkt, wie die Arbeiter die Kurbel einer Waſſerkunſt in einer Minute 55mahl herum gebracht, ungeachtet die Kurbel 16 Zoll Bug hatte, und nach Herrn Belidors Rechnung jede Perſon mit einer Kraft von 35⅓ Pfund in die Kurbel würken muſte. (Architectura Hydraul. II Buch I Cap. 680 §.) Der Umfang der Kurbel war alſo 100 Zoll, und der angegriffene Punct legte in einer Minute 5500 Zoll, alſo in einer Secunde 91 Zoll, oder 7½ Fuß zurück. Weil dies aber nach aller Wahrſcheinlichkeit ausgeſucht ſtarke Leute geweſen ſind, auch Hr. Belidor ſelbſt bemerkt, daß dieſe Arbeit für einen Menſchen zu ſtark ſey, ſo kann

man daraus keine allgemeine Regel machen. Am allerwenigſten darf man dem Arbeiter an einer Pumpe zum öconomiſchen Gebrauch ſo viel zu thun geben, weil allerley Leute, ſtärkere und ſchwächere ſich derſelben bedienen ſollen. Indeſſen ſcheint es, man könne bey einer Arbeit von ſo kurzer Dauer wohl vorausſetzen, daß der Menſch noch mit einer Kraft etwa 32 bis 33 Pfund in den angegriffenen Punct würken könne, wenn demſelben ſchon eine Geſchwindigkeit von 3 Fuß in einer Secunde mitgetheilt iſt. Dieſe Vorausſetzungen würden im 317 §. etwa $F = \frac{1}{2}$ Cub. Fuß, $\alpha = 3$ Fuß, alſo $F\alpha = \frac{3}{2}$ Cub. Fuß, und für einen Menſchen $M = \frac{\frac{3}{2}T}{f}$, alſo für das einfache Saugwerk $M = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{2}T}{f}$ geben. Demnach erhielte man im gegenwärtigen Exempel $M = \frac{3}{4} \cdot \frac{60}{18} = 2{,}812$ Cub. Fuß, alſo nochmahl ſoviel, als vorhin. Dies iſt der äuſſerſte Effect für das einfache Saugwerk, weil angenommen wird, daß die Helfte der Zeit T umſonſt hingeht.

328 §.

Ich will nun dieſe letztere Vorausſetzung $F\alpha = \frac{3}{2}$ Cub. Fuß beybehalten, und darauf die übrige Rechnung gründen. Es ſey demnach $r = 5$ Fuß, welches ohngefehr das Maaß iſt, ſo man den Schwengeln giebt, und man nehme das Verhältniß

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{3}{4} \text{ an, ſo iſt } \psi = \frac{\varepsilon t\sqrt{g}}{\delta\sqrt{2l}} = \frac{3 \cdot t\sqrt{2g}}{2 \cdot 4\sqrt{l}}.$$

Man nehme überdem $t = 3$ Secunden, und $g =$

15,625

15,625, ſo wird $\psi = \frac{9 \cdot 5{,}6}{8 \cdot \sqrt{l}}$, und bey dieſer Vorausſetzung müſſe der Bogen ηr auf $4\frac{1}{2}$ Fuß betragen. Die Saugröhre ſtehe 4 Fuß tief unter Waſſer, ſo iſt $l = 20$, und es wird $\psi = \frac{9 \cdot 5{,}6}{8 \cdot 4{,}5}$ $= 1{,}4$. Dieſer Bogen faſſet $80° 12'$, und man erhält $\sin v\, \psi = 0{,}8298$, alſo $\frac{2f}{t} \sin v\, \psi$ $= 8{,}8 = \beta \cdot \omega$. Man nehme $\beta = \frac{1}{3}\alpha$, ſo wird $\varrho = \frac{1}{3} r = 1$ Fuß, und $\omega = \frac{5}{3} \cdot 8{,}8 = 15$, alſo $\lambda = \frac{16}{15}$. Dies giebt ferner $\frac{1}{\lambda}$ M = 2,636 Cub. Fuß, und $\delta = \sqrt{\frac{2{,}636}{\frac{1}{8}\pi \cdot \frac{3}{5} \cdot 60}} = \sqrt{0{,}186458} =$ 0,432 Fuß = 5 Zoll 2 Linien, folglich $\varepsilon = \frac{3}{4}\delta = 3$ Zoll 10 Linien.

329 §.

Ob nun gleich bey dieſer Einrichtung der Schwengelkunſt die Helfte der Zeit umſonſt hingehet, ſo iſt dies doch bey einem Werk von dieſer Art eben kein Fehler. Es ſoll ein einziger Menſch, und noch dazu wohl ein ſolcher die Arbeit verrichten, der eben nicht der ſtärkſte iſt. Während der Zeit, da der Kolben niederſteigt, wird wenig oder gar keine Kraft am Schwengel erfordert, ſo daß der Menſch zugleich binnen der Zeit etwas ausruhet. Man könnte die Einrichtung ſo machen, daß dieſer Zeitverluſt vermieden würde: man müſte zwey Saugwerke von gleichen Abmeſſungen neben einander ſtellen, und

an der Axe des Schwengels zwey kurze Arme auf entgegen geſetzte Art anbringen, wovon jeder mit der Kolbenſtange eines der beyden Saugwerke verbunden wäre. Auf ſolche Art würde man ein doppeltes Saugwerk erhalten, und man könnte alsdenn beyde Gußröhren in eine gemeinſchaftliche Rinne leiten; ſo würde dieſe Schwengelkunſt in eben der Zeit doppelt ſoviel Waſſer ſchütten, als die vorige, wenn jedes einzelne Saugwerk eben ſo wie das vorige eingerichtet wäre, und man vorausſetzen könnte, daß die angebrachte Kraft ununterbrochen mit gleicher Stärke in den Schwengel würkte. Allein man muß bedenken, daß einem Menſchen die Arbeit bey einem ſolchen Saugwerk auch nochmahl ſo ſchwer werden müſſe, wenn er beſtändig mit gleicher Kraft in den Schwengel würken ſoll. Um ihm die Arbeit zu erleichtern müſte man die Stiefel enger machen, oder er würde den Schwengel nicht ſo ſchnell bewegen können, als im vor. §. angenommen iſt, daß alſo lange nicht doppelt ſoviel Vortheil erhalten würde. Bey Berechnung der ganzen Einrichtung des Saugwerks könnte man das Moment $F\alpha$ nicht auf $\frac{3}{2}$ Cubicfuß annehmen: man dürfte es ſchwerlich viel über $\frac{3}{4}$ Cubicfuß in Anſchlag bringen.

330 §.

Indeſſen wird von einigen Schriftſtellern vorgeſchlagen, man ſolle unten an dem Schwengel einer ſolchen Pumpe einen ſchweren Klotz befeſtigen, in der Meynung dadurch der Kraft zu Hülfe zu kommen, und auf ſolche Art mehr Vortheil zu erhalten. Ob nun gleich der Schwengel mehr Uebergewicht über den Widerſtand des Kolbens bekömmt; ſo muß

man

man doch bedenken, daß der Menſch dieſen ſchweren Klotz mit bewegen muß, daß derſelbe die Friction an den Zapfenlagern der Axe des Schwengels vermehre, und daß derſelbe einen ziemlichen Widerſtand der Luft zu überwinden habe. Deswegen iſt der gehofte Nutzen ſehr gering, und aus eben dieſer Urſache tadelt Leupold im Theatro Machin. Hydraul. II Th. III Cap. 26 §. mit Recht dergleichen Schwengel an einer doppelten Pumpe. Doch läßt er den Gebrauch eines ſolchen Schwengels bey einer einfachen Pumpe zu, weil derſelbe den hinaufſteigenden Kolben heben hilft, und er beym Zurückfallen, weil ihn alsdenn nur ein geringer Widerſtand hindert, für ſich nach den Geſetzen der Schwungbewegung beynahe ſo hoch wieder ſteigen kann, als er gefallen iſt, ohne daß der Menſch die Arbeit des Nachſchiebens nöthig hat. Die genaue Berechnung einer Schwengelkunſt von dieſer Art würde eine ziemlich weitläuftige Unterſuchung erfordern: denn man ſiehet wohl, daß die Menge Waſſer, welche ſie in gegebener Zeit ſchüttet, von der Zeit abhänge, worin der Schwengel als ein zuſammengeſetztes Pendul betrachtet, einen Schwung endigen würde. Bey Berechnung derſelben müſten alle Hinderniſſe der Bewegung in Betrachtung gezogen werden, und bey dem einen Schwung, wozu der Stoß des Menſchen das ſeinige beyträgt, müßte man auſſer dem Gewicht des Schwengels, die Kraft in Rechnung bringen, womit der Menſch in den Klotz würkt: bey dem hiemit abwechſelnden Schwung würde denn keine andre beſchleunigende Kraft, als allein das Gewicht des Penduls in Betrachtung kommen.

Herr Belidor beſchreibt in der Architectura Hydraul. III B. IV Cap. 979 §. eine vom H. Morel angegebene Schwengelkunſt, die ein Menſch durch Treten bewegen ſoll. Es iſt ein doppeltes Saugwerk, und ſo eingerichtet, wie es der 329 § angiebt. An der Axe des Schwengels, der mit dem daran befindlichen Kloß nach Belidors Angabe 200 Pf. ſchwer ſeyn kann, iſt eine ſtarke Bohle, ſo wie an den groſſen Klocken-Wellen auf den Kirchen-Thürmen angebracht, worauf der Menſch treten, und den Schwengel, wie ſonſt eine Klocke im Schwung erhalten kann. Die ſchon angeführten Urſachen aber ergeben, daß kein ſonderlicher Vortheil davon zu erwarten ſey.

Der XXI. Abſchnitt.

Von den Stangenkünſten mit dem krummen Zapfen.

331 §.

Wenn es gleich eben nicht vortheilhaft iſt, mehr als ein Saugwerk vermittelſt eines Schwengels in Bewegung zu ſetzen, den ein Menſch in Schwung bringen, und eine Zeitlang erhalten ſoll; ſo laſſen ſich doch andre mechaniſche Einrichtungen ſo machen, daß ein Menſch noch gar wohl zwey Saugwerke zugleich bewegen kann, wovon das eine binnen der Zeit das Waſſer ergießt, da in dem andern der Kolben niedergeht. Eine bequeme Einrich-

richtung, dieſes zu bewerkſtelligen, beſchreibt Belidor 59 Fig.
in der Architectura Hydraul. III B. IV Cap. 975 u.
f. §§. An der Axe der Kurbel A, welche der Menſch drehen muß, befindet ſich ein Trilling C, der in das Sternrad D eingreift, und die Welle GH dieſes Sternrades iſt bey M, K, I, N, auf eine ſolche Art gebogen, daß ſie eine doppelte Kurbel LMKINO abgiebt. An jeder dieſer Kurbeln hängt eine von den beyden Kolbenſtangen E und F der Saugwerke, welche wechſelsweiſe das Waſſer heben. An der Welle der Kurbel A wird überdem ein Schwungrad B angebracht, um die Bewegung deſto gleichförmiger zu erhalten.

332 §.

Wenn die Kraft, welche die Maſchine treibt, bey einerley Geſchwindigkeit der Maſchine, und einerley Widerſtande, beſtändig mit gleicher Stärke in die Maſchine würkt; ſo iſt der Gebrauch der Kurbel, um Stangen herauf zu ziehen, und abwärts zu ſchieben, einer Unbequemlichkeit unterworfen, die ſich nicht leicht ganz vermeiden läßt, ob man ihr gleich durch eine geſchickte Verbindung mehrerer Kurbeln, wo es die Beſchaffenheit der Maſchine verſtattet, ziemlich abhelfen kann. Dieſe Unbequemlichkeit beſtehet darin, daß das Moment der an der Kurbel hängenden Laſt, womit ſelbige die Kurbel zu drehen ſtrebt, veränderlich iſt. Wenn der Arm LM der Kurbel vertical ſtehet, ſo iſt das Moment der bey M daran hängenden Laſt = 0. Beym fernern Umlauf der Kurbel aber wächſt dies Moment, ſo wie der Abſtand der Richtungslinie der Laſt, von der Umdrehungsaxe wächſt; aber nur ſo lange, bis LM horizontal wird; da dann dies Moment am größten

wird,

wird, und hierauf wieder abnimmt. Dies Moment wird alſo bey jedem Umlauf der Kurbel zweymahl am gröſten, und auch zweymahl = o, weil LM zweymahl in die horizontale und zweymahl in die verticale Lage kommt.

333 §.

Bey dem allen hat doch der Gebrauch ſolcher Kurbeln bey Stangenkünſten wiederum ſeine Vortheile, und andere Einrichtungen haben dagegen andre noch gröſſere Mängel. Daher iſt auch der Gebrauch der Kurbel, oder wie ſie hier auch heiſt, des Krumzapfens, faſt bey allen ſolchen Maſchinen eingeführt, wobey es darauf ankommt, Stangen, und vermittelſt derſelben widerſtehende Laſten, hin und wieder zu ſchieben. Eine andre ſonſt auch wohl gewöhnliche Einrichtung, die Kolbenſtangen zu bewegen, kommt darauf an, daß an der Welle eines Rades noch ein kleines einem Getriebe ähnliches Rad angebracht wird, welches aber nur am halben Umfange mit Zähnen verſehen iſt, die in eine gezähnte lothrecht ſtehende übrigens aber vertical auf- und abwärts bewegliche Latte eingreifen, woran unten die Kolbenſtange befeſtiget iſt. Wenn das Getriebe die Latte heraufziehet, ſo muß ſie oben mit einem Gewicht beſchwert ſeyn, durch deſſen Druck ſie wieder abwärts getrieben wird, binnen der Zeit da das Getriebe den andern halben Umlauf vollendet. M. ſ. Belidors Archit. Hydraul. III B. IV Cap. 985 §. Ob nun gleich bey dieſer Einrichtung das Moment der Laſt in Anſehung der Axe des Getriebes, welches in die Latte greift, beſtändig einerley bleibt, ſo hat ſie doch würklich gröſſere Mängel als der Krumzapfen. Man muß erwegen, daß die Kolbenſtange,

alſo

alſo auch bey der letztern Einrichtung die Latte, bey jedem Umlauf des Krumzapfens oder des Getriebes zweymahl völlig in Ruhe kömmt, alsdenn nemlich, wenn der Kolben ſeinen höchſten und niedrigſten Stand erreicht. Denn der Kolben ſoll jedesmahl wieder umkehren, alſo muß die Bewegung, die er vorhin nach der entgegen geſetzten Richtung hatte, erſtlich völlig aufhören. Wenn alſo die Einrichtung der Maſchine ſo gemacht iſt, daß alle ihre Theile zugleich mit ruhen müſſen, wenn der Kolben völlig ruhig iſt, ſo muß ihr Gang ſehr ungleichförmig werden. Und dies iſt grade der Fall, wenn der Kolben vermittelſt des Getriebes und der Latte bewegt wird. Zwar treibt das Gewicht die Latte abwärts, ohne daß hiezu die Maſchine was beyträgt, die während der Zeit einen andern Pumpen-Kolben auf eben die Art heben kann. Sobald aber das Getriebe die Latte von neuen angreift, wird die Bewegung der Maſchine aufgehalten; und dies verurſacht nicht allein, daß alle Theile der Maſchine einen ſtarken Druck leiden, und daher in dieſem Augenblick der Gefahr des Zerbrechens vorzüglich ausgeſetzt ſind, ſondern auch dieſes, daß ein Theil der Kraft darauf verwandt werden muß, den Kolben wieder in Bewegung zu ſetzen. Beym Krumzapfen fallen dieſe Mängel weg. Derſelbe ſteht beydemahl vertical, wenn der Kolben in ſeiner höchſten und niedrigſten Stelle befindlich iſt: und in dieſem Augenblick hat der äuſſerſte Punct deſſelben, woran die Kolbenſtange hängt, eine horizontale Bewegung, die vom Kolben nicht aufgehalten wird, weil ſich die Kolbenſtange auf die Seite legen kann. Da nun eben dieſer äuſſere Punct des Krumzapfens ſchon einen ziemlich

betrācht-

beträchtlichen Bogen in ſeinem Umlauf zurück legt, bevor der Kolben merklich gehoben wird; ſo theilt die Maſchine demſelben anfangs nur ſehr kleine Grade der Geſchwindigkeit mit, daß alſo weder ihre Bewegung dadurch ſtark gehemmet wird, noch ihre Theile ſonderliche Gewalt leiden. M. ſ. Euler Maximes pour arranger le plus avantageuſement les machines deſtinées à elever de l'eau par le moyen des pompes §. XXXIX. Hiſtoire de l'Acad. de Berlin T. VIII. p. 229. Leupold Theatr. Mach. Hydraul. II Th. V. Cap. 60 §. 30 S.

334 §.

58 Fig. Es ſey ADBE der Umfang des Kreiſes, worin derjenige Punct M der Kurbel umläuft, woran die Laſt Q vertical herab hängt. Wenn man nun CM $= r$ ſetzt, und alsdenn annimmt, es ſey an M eine Kraft P nach der Richtung der Tangente MP angebracht, welche die Kurbel herum treibt, ſo iſt das Moment dieſer Kraft $= r \,.\, P$. Wenn ferner AB vertical und der Winkel ACM $= \alpha$ iſt; ſo iſt des Widerſtandes Q Moment $= r Q \sin\alpha$, und man hat für den Fall des Gleichgewichts $P = Q \sin\alpha$. Dafern alſo der Widerſtand Q des Kolbens beſtändig einerley iſt; ſo kann die Kraft P nicht in jeder Lage des Krumzapfens mit Q im Gleichgewicht ſeyn, dafern P eine beſtändige Gröſſe hat. Aus der Gleichung $P = Q \sin\alpha$ folgt aber auch $P d\alpha = Q d\alpha \sin\alpha$. Es ſey $\alpha = A \sin v\, x$, ſo iſt $d\alpha = \frac{dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$ (332 §. Mech.) $= \frac{d \,.\, \sin v\alpha}{\sin\alpha}$, alſo $d\alpha \sin\alpha = d \,.\, \sin v\alpha$, und $P d\alpha = Q \,.\, d \sin v\alpha$, welches dem allgemei-

meinen Geſetz des 372 §. Mech. gemäß iſt, vermöge deſſen ſich Kraft und Laſt für den Fall des Gleichgewichts gegen einander umgekehrt verhalten müſſen, wie die zugleich durchlaufenen Wege. Es ſteigt nämlich Q um das Element $rd . \sin v\alpha$, indem der Punct M das Element $rd\alpha$ des Bogens AM durchläuft. Da aber dieſe Wege nicht in einem unveränderlichen Verhältniß ſtehen; ſo läßt ſich an M keine unveränderliche Kraft anbringen, die in jeder Stellung des Krumzapfens mit Q das Gleichgewicht hielte.

335 §.

Die Gleichung $Pd\alpha = Qd\alpha \sin\alpha$ giebt $\int Pd\alpha = Q\sin v\alpha$, wenn Q unveränderlich iſt. Wenn man nun annimmt, der Punct M laufe in ſeinem niedrigſten Stande A mit der Geſchwindigkeit $= c$ nach der Richtung AT, an M aber ſey eine Kraft $P = \frac{Q . d \sin v\alpha}{d\alpha} = Q\sin\alpha$ angebracht; ſo wird die Bewegung des Puncts M gleichförmig bleiben, und derſelbe mit der Geſchwindigkeit c umlaufen. In dem Augenblick, da M in dem höchſten Stande B anlangt, hat alſo die Kraft P die Laſt Q um die Höhe $AB = 2r$ gehoben, indem ſie ſelbſt den Weg πr gleichförmig durchlaufen hat; zugleich hat man für dieſen Augenblick $\int Pd\alpha = 2Q$, oder auch $\int P . rd\alpha = 2r . Q$. Setzt man den Bogen $AM = s$, ſo iſt $rd\alpha = ds$ und $\int Pds = 2r . Q$. Mit dem Halbmeſſer $CF = \frac{2}{\pi} r$ ſey der Halbkreis GFH beſchrieben, ſo iſt $GFH = 2r = AB$. Man ſtelle ſich denſelben als den Umfang einer Welle vor, welche vermittelſt der Kurbel umgedrehet werden kann. Wenn nun am Umfang die-

ſer Welle eine Laſt K = Q an einem Seil herabhinge, an M aber eine beſtändige Kraft V nach der Richtung der Tangente zöge, ſo würden V und K im Gleichgewicht ſeyn, wenn $\pi r . V = 2r . K$, alſo $V = \frac{2}{\pi} Q$ wäre: da dann die Geſchwindigkeit der Kraft eben ſo, wie in dem vorigen Fall beſtändig $= c$ bleiben würde, wenn der Punct M ſchon in ſeinem niedrigſten Stande A die Geſchwindigkeit c hätte. Die Laſt K würde nun von der Kraft V in eben der Zeit um eben die Höhe $= 2r =$ AB gehoben werden, worin die Kraft $P = Q \sin \alpha$ die Laſt K = Q um dieſelbe Höhe AB hebt.

336 §.

Auf dieſe Betrachtungen gründen ſich die Regeln, nach welchen Kraft und Laſt am Krummzapfen gegen einander berechnet werden müſſen. Um die Sache zu erleichtern, und weil bey ſolchen practiſchen Unterſuchungen nicht alles in der größten Schärfe genommen werden kann; betrachtet man die Sache ſo, als wenn die Laſt K = Q vermittelſt der Welle GFH gehoben werden ſollte, da dann an der Kurbel die Kraft $V = \frac{2}{\pi} . Q$ ſeyn muß, wenn die Maſchine ſich im Beharungsſtande befindet. Setzt man alſo ſtatt π den gehörigen Werth aus dem 467 §. Geom. ſo wird $V = \frac{2}{3.14159...} Q.$ Weil aber dieſe Rechnung keine völlige Schärfe zuläſt, und der Bug der Kurbel nicht leicht über 2 Fuß groß iſt, ſo ſetzt Belidor $V = \frac{2}{3} Q$. Architect. Hydraul. I. B. I. Cap. 109. 110 §. Eigentlich aber würde aus den biſheri-

herigen Betrachtungen die Regel fließen. Man könne annehmen, daß auch bey der Kurbel das allgemeine Geſetz des Gleichgewichts (372 §. Mechan.) ſeine Anwendung finde, vermöge deſſen ſich die Kraft zur Laſt umgekehrt wie der Weg der Laſt zum Wege der Kraft verhalte, die beyde zugleich durchlaufen. Und daraus ergiebt ſich die fernere Folge, daß man die allgemeine Theorie von den Saugwerken, ſo wie ſie im 312 u. folg. §§. vorgetragen iſt, auch bey Stangenkünſten, die vermittelſt des krummen Zapſens bewegt werden, anwenden könne.

337 §.

Belidor giebt folgende Abmeſſungen der im 331 §. ſchon angeführten Maſchine an. Der Bug der Kurbel A ſey 12 Zoll, der Bug der doppelten Kurbel LMKNIO aber 6 Zoll, der Halbmeſſer des Sternrades D 6 Zoll, der Halbmeſſer des Trillings C 2 Zoll, und der Halbmeſſer des Schwungrades B 3 Fuß. Weil demnach der Halbmeſſer des Sternrades D dreymal größer, als der Halbmeſſer des Trillings C iſt; ſo kommt nur ein Umlauf des Sternrades, und folglich der doppelten Kurbel LMKINO auf drey Umläufe der Kurbel A. Weil ferner die Umlaufszeit der gedoppelten Kurbel hier mit der Zeit eines Kolbenſpiels einerley iſt, ſo wird $\vartheta = \frac{1}{3}t$, folglich $\mu = \frac{1}{3}$ nach den Bezeichnungen des 322 §. Ferner iſt $r = 1$ Fuß, und wenn man $\alpha =$ 2 Fuß nimmt, ſo wird $\vartheta = \frac{2\pi r}{\alpha} = 3{,}14159$ Secunden, (Belidor rechnet für α nur $1\frac{2}{3}$ Fuß) und man erhält $t = 3\vartheta = 9{,}425$ Sec. Das Verhält-

niß zwiſchen den Mündungen des Stiefels und der Saugröhre hat Belidor nicht angegeben: ich will $\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{3}{4}$ annehmen, ſo läſt ſich nun $\psi = \frac{t\varepsilon\sqrt{g}}{\delta\sqrt{2l}}$ berechnen, wenn man weiß, wie groß l ſey. Belidor nimmt an, das Waſſer ſoll 28 Fuß hoch gehoben werden. Ob man nun gleich nicht gern Saugröhren nimmt, die viel über 20 Fuß über dem Waſſer hervorragen, weil alsdenn der Druck der Atmoſphäre nur ein geringes Uebergewicht über den Gegendruck einer ſo hohen Waſſerſäule behält; ſo will ich doch einmal die Rechnung auf die Vorausſetzung gründen, daß die niedrigſte Kolbenſtelle 28 Fuß hoch über das aus der Tiefe zu hebende Waſſer erhaben ſey. Steht alsdenn die Saugröhre unten etwa 4 Fuß tief unter Waſſer, ſo wird $l = 32$ Fuß, wenn ich annehme, daß die Saugröhre grade und vertical ſey. Dies giebt $\psi = \frac{9{,}425 \cdot 3 \cdot \sqrt{g}}{4 \cdot 8} = 3{,}49$, wenn ich $g = 15{,}1$, alſo $\sqrt{g} = 3{,}886$ ſetze. Dieſer Bogen faſſet $199° \; 57'$. Hievon $180°$ abgezogen, läſt $19° \; 57'$, und der zugehörige Querſinus iſt $= 0{,}0600$, alſo $\sin v \psi = 2 - 0{,}0600 = 1{,}94$. Dies giebt $\omega \,.\, b = 28 \,.\, 1{,}94 = 54$, und weil nach den angegebenen Abmeſſungen $b = 1$ Fuß iſt, ſo wird $\omega = 54$, und daraus ergiebt ſich, daß die Abmeſſungen ſehr vortheilhaft angenommen ſind. Um M zu berechnen, kann man nicht $F = \frac{1}{2}$ Cub. Fuß ſetzen, wie im 327 §., weil die Arbeit einige Stunden ununterbrochen fortdauren ſoll, und ohnehin etwas auf die Friction gerechnet werden muß. Höchſtens könnte man nur $F = \frac{3}{8}$ Cub. Fuß, wie im

317 §., rechnen. Belidor a. a. O. ſetzt $F = 25$ Pfund, welches das Gewicht von $\frac{5}{14}$ Cub. Fuß Waſſer iſt. Bey derſelben Vorausſetzung müßte man alſo hier $F = \frac{5}{14}$, und $F\alpha = \frac{5}{7}$ Cub. Fuß ſetzen. Dies giebt $M = \frac{\frac{5}{7} . T}{f}$, alſo für eine Stunde

$$M = \frac{5 \cdot 3600}{7 \cdot 28} = 91{,}8 \text{ Cub. Fuß, und } \frac{1}{\lambda} M =$$

$\frac{54}{55} \cdot 91{,}8 = 90$ Cub. Fuß. Nach Belidors Rechnung würde die Maſchine nur 74 Cub. Fuß in einer Stunde heben, weil er für α nur $1\frac{2}{3}$ Fuß annimmt. Noch iſt übrig, δ zu ſuchen, und man findet $\delta =$

$$\sqrt{\frac{90 . 9{,}425}{\pi . 1800}} = 0{,}387 \text{ Fuß} = 4 \text{ Zoll } 7\tfrac{1}{2} \text{ Linien,}$$

folglich wird $\varepsilon = 3\frac{1}{2}$ Zoll.

Der XXII. Abſchnitt.

Beſchreibung eines Schacht- und Feld-Geſtänges.

338 §.

Wenn ſtatt der Kurbel A die Maſchine durch ein Waſſerrad getrieben wird; ſo läſt ſich damit weit mehr ausrichten, und die Einrichtung kann ſo gemacht werden, daß eine noch größere Anzahl Pumpen dadurch in Bewegung gebracht wird, wovon jedesmal wechſelsweiſe die Hälfte das Waſſer hebt, indem die Kolben der übrigen wieder abwärts gehen. Man hat davon vornämlich in Bergwerken einen

ſehr vortheilhaften Gebrauch gemacht, wo das Waſſer gemeiniglich aus einer ſehr beträchtlichen Tiefe gehoben werden muß. Eine ganz vollſtändige Beſchreibung dieſer zuſammengeſetzten Stangenkünſte verſtattet zwar die Kürze nicht, worin ich mich einſchränken muß: indeſſen werde ich ſoviel davon beyzubringen ſuchen, als nöthig iſt, dasjenige im allgemeinen richtig zu beurtheilen, worauf es bey der Anlegung einer ſolchen Maſchine ankömmt. In ſolcher Abſicht muß man zuerſt die Einrichtung der einzelnen Pumpen kennen lernen, die gewöhnlich dabey gebraucht werden.

339 §.

Es darf an einem Saugwerk die Saugröhre nicht über 24 bis 26 Fuß Höhe über den Waſſerpaß des aus der Tiefe zu hebenden Waſſers haben, damit der Druck der Atmoſphäre ſtark genug bleibe, das Waſſer bis zur gröſten Kolbenhöhe hinauf zu treiben. Allein es iſt nicht nothwendig, daß die Ausgußröhre nahe über dem höchſten Kolbenſtande angebracht ſey. Wenn die Kraft ſtark genug iſt, die den Kolben heben ſoll, ſo kann die Höhe der Pumpe die gröſte Höhe des Kolbens ſehr viel übertreffen: nur muß alsdenn der Kolben auch die gehörige Stärke haben, damit er den Druck einer hohen über ihn ſtehenden Waſſerſäule aushalten kann. Wenn auf der Kolbenröhre keine andere Röhre ſtehet, und das Gußrohr nur wenige Fuß über der höchſten Stelle des Kolbens angebracht iſt; ſo heiſt die Pumpe ein niedriger Satz. Wenn aber über der Kolbenröhre oder dem eigentlich ſo genannten Stiefel noch eine oder mehrere ſogenannte Aufſatzröhren angebracht ſind, alſo das Waſſer noch

noch um eine ſehr beträchtliche Höhe über den Kolben hinaufſteigen muß, bevor es zum Ausguß kommt, ſo heiſt die Pumpe ein hoher Satz. Dafern die Saugröhre ſelbſt nicht aus einem Stück beſtehet, ſondern aus zweyen oder mehrern Röhren zuſammen geſetzt iſt, ſo heiſt diejenige, welche zunächſt mit dem Stiefel verbunden iſt, der Steckelkiel, die übrigen aber Senkelkiele, auch wohl Ansteckelkiele. Vermittelſt eines hohen Satzes läſt ſich das Waſſer 39 bis 42 Ellen hoch heben. Dergleichen hohe Sätze werden ſo über einander angebracht, daß der untere das Waſſer in einen Behälter ergieſt, woraus es der zunächſt folgende wieder 39 bis 42 Ellen hoch in einen andern Behälter ſchüttet. Aus demſelben hebt es der dritte Satz in einen dritten Behälter: da ſich dann vermittelſt dieſer Einrichtung das Waſſer nach Leupolds und Calvörs Bericht bis an 200 Lachter hoch aus der Tiefe herausheben läſt. M. ſ. Leupolds Theatrum Mach. Gen. 24 Cap. 613 §. 179 S. Calvörs Acta Hiſtorico-Chronologico-Mechanica circa metallurgiam in Hercynia Superiori I Theil, II Cap. 2te Abth. 3 §. 37 S. An dem zuletzt angeführten Ort findet man zugleich Nachrichten von den Erfindern der Stangenkünſte, die ungefähr um die Mitte des 16ten Jahrhunderts bekannt geworden ſind.

340 §.

Wenn man das Waſſer ſo nahe hat, daß das 60 Kunſtrad AB über der Grube angebracht werden Fig. kann, woraus die Kunſt ſchöpfen ſoll; ſo hat dieſes Kunſtrad auf jeder Seite einen Krumzapfen, wie es die Figur bey C und D vorſtellet. An der Warze eines jeden Krumzapfens hängt eine Kunſt-Stange,

wie CE, und DF, welche ſo tief als nöthig iſt, bis zur niedrigſten Pumpe herabgehen muß. Dieſe Stangen werden aus geſpaltenen dreyſpännigen Tannenholz gemacht, und aus mehrern Stücken, von etwa 5 Lachter Länge, 6 Zoll Breite, und 3 bis 4 Zoll Dicke zuſammen geſetzt, und hinlänglich ſicher an einander befeſtiget. An einer jeden Kunſtſtange ſind die Zug-oder Kolbenſtangen ſo befeſtiget, wie es die 61 Fig. vorſtellt. Es ſind hier CE und DF die Kunſtſtangen, welche vorhin in der 60 Fig. unmittelbar an den Krumzapfen hiengen, ſtatt deſſen hängen ſie hier am Wagebalken CD, deſſen übrige Einrichtung bald näher ſoll beſchrieben werden. Ferner ſind X, Y, Z, die Waſſerbehälter in Entfernungen von 39 bis 42 Ellen Höhe über einander, und *c, d, e, f, g, h,* ſind die über einander ſtehenden Pumpen. Die zugehörigen Zug- oder Kolbenſtangen hängen bey *k, l, m, n, o, p,* an den ſogenannten **Krumſen** oder **Armen**, und letztere ſind an den Kunſtſtangen feſt. So ſtehen zwo Reihen Pumpen über und neben einander, und man wird ſich nun einen zulänglichen Begriff davon machen können, wie die eine an der Kunſtſtange DF hängende Reihe das Waſſer binnen der Zeit hebt, da die andere Kunſtſtange CE die daran hängenden Kolben wieder abwärts ſchiebt. Genauere Beſchreibungen und Zeichnungen davon findet man beym Leupold und Calvör a. a. O. Leupold hat daſelbſt die Maaße einer zu Freyberg in der Grube zu Tzſcherper hangenden Kunſt mitgetheilt, die ich hier herſetze, eine Probe davon zu geben, was man bey der Anlegung einer ſolchen Maſchine alles in Betrachtung ziehen müſte.

341 §.

Der Durchmeſſer des Kunſtrades AB iſt 24 Ellen, und mit dem Kranze eine Elle weit, auch ſo weit geſchaufelt.

Der Durchmeſſer der Welle iſt 1 Elle, und die Welle 3 Ellen lang.

Der krumme Zapfen iſt 2 Ellen lang, vorn an der Wage 8 Zoll dick, und hat 1½ Ellen Hub.

Das Rad läuft in einer Stunde 338 mal herum, und das Aufſchlagewaſſer iſt ſo ſtark als eine Lotte, ſo im Durchmeſſer 7 Zoll hält.

Ein hoher Satz beſtehet aus einem Ausguß, 3 Aufſatzröhren, 1 Kolbenröhre mit 2 Stücken, und 1 Steckel und 1 Anſteckelkiel, zuſammen 39 Ellen. An jedem Zapfen hangen 5 ſolche hohe Sätze, und jeder Satz gießet jedesmal 45 Maaß aus.

Die Kunſt hebet das Waſſer 195 Ellen tief heraus. Wenn das Rad leer iſt, und nichts daran hängt, kann ſolches von 1 Perſon herumgedrehet werden. Wenn alle 10 Sätze daran hängen ſo erfordert es 5 bis 6 Perſonen.

Die Laſt, ſo daran hängt, und welche die Kunſt zu heben hat, beſtehet in 28 Schachtſtangen, jede mit 4 eiſernen Ringen und 3 Schrauben, jede wiegt 1 Centner

	thut 28 Centn.	— Pf.
10 Zugſtangen a 27 Pfund	— 2 —	50 —
10 Krumſt. a 18 Pf.	— 1 —	70 —
10 Spillen a 21 Pf.	— 1 —	100 —
10 Kappeneiſen a 21 Pf.	— 1 —	100 —
40 Aufſatzröhren u. Ausgüſſe in jeder 46 Maaß a 2 Pf.	— — —	80 —
Summe	36 Centn.	70 Pf.

 Die

Die Kolbenröhre iſt von Eiſen und wiegt 2 Centner, iſt lang $2\frac{1}{4}$ Elle, daran ſind 2 Stücken von Holz, das obere, darin die Aufſatzröhre kommt, iſt 1 Elle, und das andere $\frac{3}{4}$ Elle, jedes Stück hat 4 eiſerne Ringe, und der Kolbenröhre Durchmeſſer iſt 12 Zoll. Die Aufſatzröhren ſind 6 Ellen lang, der Durchmeſſer des Gebohrs iſt 6 Zoll, und hat jede 16 eiſerne Ringe. Der Ausguß iſt vorigen gleich, und hat 8 eiſerne Ringe.

Der Kolben iſt von Eichenholz, 6 Zoll hoch, im Durchmeſſer 11 Zoll, mit 2 eiſernen Ringen und 8 Löchern, jedes 1 Zoll weit. Das Kolbenleder wird von 5 bis 6 Scheiben Kalb- oder Rinsleder geſchnitten, alsdenn mit Bindfaden und Riemen ſtark zuſammen gemacht. Der Durchmeſſer iſt 13 Zoll.

Der Steckelkiel iſt 6 Ellen lang, der Durchmeſſer 3 Zoll und hat 9 eiſerne Ringe. Der Anſteckekiel iſt dem vorigen gleich, hat aber nur 7 eiſerne Ringe. Von den Schacht- oder Kunſtſtangen iſt jede 14 Ellen lang und 6 Zoll ſtark. Eine Zugſtange iſt 27 Ellen lang, und 4 Zoll ſtark.

Wie nun die Berechnung der Kraft und Laſt, imgleichen des Effects dieſer Maſchine angeſtellet werden müſſe, ſolches wird ſich bald vollſtändiger zeigen laſſen. Die hohen Sätze ſind eigentlich nicht bloße Saugwerke, ſondern vereinbarte Saug- und Druckwerke, wovon im folgenden Abſchnitt ausführlichere Unterſuchungen vorkommen werden.

342 §.

Dafern das Aufſchlagewaſſer nicht ſo nahe iſt, daß das Kunſtrad unmittelbar über der Grube oder dem Schacht gehangen werden kann; ſo wird ein anderes ſo genanntes Feldgeſtänge zwiſchen dem

Kunſtrade und dem Schachtgeſtänge angebracht. Folgendes wird davon, ſo weit es hier zulänglich iſt, einen Begriff geben. Statt des Kunſtrades hängt nun über der Grube das ſogenannte Kreuz CHDG, welches um ſeinen Mittelpunct beweglich iſt, und aus zweyen nach rechten Winkeln in einander geſchloſſenen, und mit Strebebändern verſehenen ſtarken Stücken Holz beſtehet. Dasjenige Stück CD, woran zu beyden Seiten die Kunſtſtangen in den Schacht herabhängen, heiſt die Wage, das andere Stück GH aber die Schwinge. An beyden Enden dieſer Schwinge hängt nun das ins Feld ſchiebende Kunſtgeſtänge, welches ſich von dem Kreuz bis an das Kunſtrad *ab* erſtreckt. Wenn daſſelbe auf einem horizontalen Boden fortgeführet iſt, ſo formirt das ganze Geſtänge ein Parallelogram GHLK, wovon die Kreuzſchwinge GH eine Seitenlinie abgiebt, da dann die ihr gegenüberſtehende Seite KL die groſſe Schwinge heiſt. Die übrigen beyden Seiten HL und GK ſind die Kunſtſtangen. Die große Schwinge KL, welche ebenfalls um ihren Mittelpunct beweglich iſt, hängt unten mit dem Bleuel ST zuſammen, welches ein ſtarkes Stück beſchlagenes, ungefähr 30 Fuß langes Holz iſt, und dieſer Bleuel hängt bey S an der Warze des Krummzapfens am Kunſtrade. Die Axe der beyden Schwingen liegt in ihren Lagern bey *q* und *r* auf den Stegen *st*, *vx*, und die letztern auf den Böcken O, P, Q, R. So wie nun durch den Krummzapfen der Bleuel hin und wieder geſchoben wird, theilt derſelbe der großen Schwinge, und dieſe vermittelſt der Kunſtſtangen, die an beyden Schwingen beweglich hangen, dem Kreuz die Bewegung mit, welches alsdenn das

Schacht-

Schachtgeſtänge ſchiebt. Zwiſchen den ins Feld ſchiebenden Kunſtſtangen ſind noch in Entfernungen von etwa 28 Fuß von einander die kleinen Schwingen MM, NN, mit den großen Schwingen parallel angebracht, die eben ſo, wie die großen Schwingen, um eine in ihrer Mitte befindliche Axe beweglich, und mit den Kunſtſtangen auf ähnliche Art, wie die groſſen Schwingen verbunden ſind. Vollſtändigere Beſchreibungen und Zeichnungen vom Feldgeſtänge findet man beym Calvör a. a. O. I Th. II. Cap. 2 Abth. 7 u. f. §§. 42 u. f. S., imgleichen beym Leupold im Theatro Mach. Hydraul. T. II. im V. Cap. 94 u. f. §. 45 u. f. S. Wenn die Beſchaffenheit des Bodens nicht verſtattet, die ins Feld ſchiebenden Kunſtſtangen horizontal fortzuführen, ſo muß das ganze Geſtänge aus verſchiedenen Theilen zuſammengeſetzt, und durch Kreuze gehörig verbunden werden, wovon man bey den angeführten Schriftſtellern ebenfalls Nachricht findet. Dafern ein ſolches Geſtänge geſchickt verbunden, und gehörig eingerichtet iſt, ſo thut es ſeine Dienſte, wenn gleich das Kunſtrad auf 800 bis 1000 Lachter von der Grube oder dem Schacht entfernt iſt.

Der

Der XXIII. Abſchnitt.

Die Theorie der Druckwerke.

343 §.

Wenn das in den Stiefel einer Pumpe hinein getretene Waſſer, durch die Gewalt des Kolbens in andere mit dem Stiefel ſeitwärts, oder auch oberwärts, verbundene Röhren getrieben wird, die es einem andern Behälter zuführen; ſo heiſt dieſe Pumpe ein Druckwerk, auch wohl eine Appreſſionspumpe. Man findet davon ausführliche Beſchreibungen und Zeichnungen in Belidoss Architect. Hydraul. III Buch III Cap. 870 u. f. §. 46. u. f. S. imgleichen in Leupolds Thatro Machin. Hydraul. I Theil XII. Cap. 108 u. f. S. Dafern das Waſſer aus dem Stiefel AIHB ſeitwärts in die 65
Aufſatzröhren hineingetrieben werden ſoll; ſo wird Fig.
an dem Stiefel, der wegen der großen Gewalt, die er auszuſtehen hat, gewöhnlich aus Metall gemacht wird, ſeitwärts bey HK zugleich eine kurze Röhre mit demſelben in einem Stück gegoſſen. An dieſer Röhre wird eine kurze aufwärts gekrümmte Röhre, welche die Gurgel heiſt, mit Schrauben befeſtiget, und mit dieſer Gurgel werden alsdenn die Aufſatzröhren ebenfalls durch Schrauben verbunden. In vielen Fällen iſt das Druckwerk zugleich ein Saugwerk, ſo das gleich unter der Gurgelmündung HK die Saugröhre am Boden des Stiefels angebracht iſt, und alsdenn heiſt die Pumpe, ein vereinbar-

bartes Saug- und Druckwerk. In andern Fällen, wo der Stiefel ſelbſt im Waſſer ſteht, ſchöpft es der Kolben durch das Ventil im Boden des Stiefels eben ſo, wie eine gemeine Waſſerpumpe (269 §.) Bey dieſer Einrichtung des Druckwerks iſt im Kolben kein Ventil nöthig; ſtatt deſſen aber wird in der Gurgel ein Ventil angebracht, welches dem in den Aufſatzröhren befindlichen Waſſer den Rückweg verſchließt. Indem nun der Kolben hinaufgezogen wird, tritt das Waſſer, wie gewöhnlich, unten durchs Ventil in den Stiefel. Beym Zurücktreten des Kolbens aber ſchließt ſich das im Boden des Stiefels befindliche Ventil, da ſtatt deſſen das unter dem Kolben befindliche Waſſer nun das Gurgelventil aufſtößt, und durch daſſelbe in die Aufſatzröhren hinauf ſteigt.

Die in Bergwerken gebräuchlichen hohen Sätze ſind ebenfalls Druckwerke, und ſie unterſcheiden ſich von der vorigen Art nur darin, daß der Kolben, der hier mit einem Ventil verſehen iſt, indem er hinauf ſteigt, zugleich das Waſſer in die Aufſatzröhren hinauf drückt, welches er vorhin im Herunterſteigen bewerkſtelligte. Wenn der Stiefel ſelbſt unter Waſſer ſteht, ſo kann man ihm ebenfalls die Einrichtung geben, daß der mit einem Ventil verſehene Kolben beym Herunterſteigen das Waſſer ſchöpft, und beym Heraufſteigen in die Aufſatzröhren hinaufdrückt, die alsdenn wie bey hohen Sätzen oben auf dem Stiefel ſtehen. M. ſ. Belidor a. a. O. imgleichen Leupold a. a. O. 216. 217 §. 115 u. ſ. S. Man kann dieſe letzte Art Druckwerke als ſolche betrachten, wovon der Stiefel verkehrt ſtehet.

344 §.

Die Wurzel $a+y$ einer Potenz $(a+y)^n$ beſtehet aus zweenen Theilen, man ſoll die Potenz aus den Theilen der Wurzel zuſammen ſetzen, es mag n eine ganze oder gebrochene, poſitive, oder negative Zahl ſeyn.

Aufl. Weil $(a+y)^n = a^n \left(1+\frac{y}{a}\right)^n$ iſt, ſo kommt es nur darauf an, einen allgemeinen Ausdruck für $\left(1+\frac{y}{a}\right)^n$, oder für $(1+x)^n$ zu finden, wenn man x ſtatt $\frac{y}{a}$ ſchreibt. Dieſer geſuchte Ausdruck ſoll allgemein richtig ſeyn, was auch ſtatt x geſetzt wird, und deswegen kann derſelbe als eine Function von x betrachtet werden. Man nehme an, daß dieſe Function eine Reihe ſey, die nach den Potenzen von x geordnet, und unter dem allgemeinen Ausdruck
$(1+x)^n = A+Bx+Cx^2+Dx^3 \ldots Px^m+Qx^{m+1} \ldots$
enthalten iſt; ſo kommt es nur darauf an, die Coefficienten zu ſuchen. Die Rechnung ſelbſt wird ergeben, ob dieſe Vorausſetzung beſtehen könne. Weil nun die angenommene Gleichung allemal richtig ſeyn muß, auch wenn $x=0$ iſt; ſo giebt dieſe Vorausſetzung $A=1$. Man ſchreibe z ſtatt der angenommenen Reihe, ſo hat man $(1+x)^n = z$, alſo wird $n(1+x)^{n-1}\,dx = dz$, und wenn man mit $1+x$ multiplicirt, ſo ergiebt ſich

n

$n(1 + x)^n\, dx = (1 + x)dz$, alſo

$$(1 + x) \frac{dz}{dx} = nz, \text{ oder } (1 + x) \frac{dz}{dx} - nz = 0.$$

Es iſt aber

$$\frac{dz}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 \,.\,.\, + mPx^{m-1}$$

$$+ (m + 1) Q^m \ldots \quad \text{und dies giebt}$$

$$(1+x)\frac{dz}{dx} = B + 2C.x + 3D.x^2 \ldots + mPx^{m-1} + (m+1)Q.x^m \ldots$$

$$+ B. + 2C. \ldots\ldots + mP.$$

$$-nz = -nA - nB. - nC. \ldots\ldots - nP.$$

folglich wird $(1 + x) \frac{dz}{dx} - nz =$

$$B \quad + 2C.x + 3D.x^2 \ldots (m+1)Q.x^m \ldots = 0.$$

$$-nA - (n-1)B - (n-2)C \quad -(n-m)P.$$

Weil nun x unbeſtimmt iſt, ſo kann dieſe Reihe nicht $= 0$ ſeyn, dafern nicht alle ihre Coefficienten $= 0$ ſind. Um dies kurz und allgemein zu überſehen, drücke man die Reihe ſo aus: $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots = 0$, ſo giebt die Vorausſetzung $x = 0$, auch $\alpha = 0$, alſo $\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots = 0$, oder $\beta + \gamma x + \delta x^2 \ldots = 0$, folglich wird, wie vorhin, $\beta = 0$ u. ſ. f. Demnach erhält man die Gleichungen $B - n = 0$, weil $A = 1$ iſt; $2C - (n - 1)B = 0$; $3D - (n - 2)C = 0 \ldots (m + 1)Q - (n - m)P = 0$. Daraus folgt:

$B = n$; $C = \frac{n-1}{2} . B = \frac{n . n-1}{1 . 2}$; $D = \frac{(n-2)C}{3} = \frac{n . n-1 . n-2}{1.2.3}$ . . . .

und überhaupt

$$Q = \frac{(n-m)P}{m+1} = \frac{n.n-1.n-2\ldots(n-m+1)(n-m)}{1.2.3.4\ldots m.m+1}.$$

In dieſem allgemeinen Ausdruck iſt allemahl m eine ganze Zahl: wenn demnach auch n eine ganze Zahl iſt, ſo kommt man allemahl auf ein verſchwindendes Glied, deſſen Coefficient $= 0$ iſt, und der allgemeine Ausdruck ergiebt, daß alsdenn alle folgende Glieder auch verſchwinden. Stellt man den Werth $\frac{y}{a}$ ſtatt x wieder her, und multiplicirt mit a^n, ſo findet man

$$(a+y)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} y + \frac{n . n-1}{1 . 2} a^{n-2} y^2 + \frac{n . n-1 . n-2}{1 . 2 . 3} a^{n-3} y^3 \ldots .$$

Dieſer allgemeine Ausdruck heiſt gewöhnlich der Binomiſche Lehrſatz, und er findet in der höhern theoretiſchen Mathematik ſeine mannigfaltige Anwendung. Die Erfindung deſſelben wird gewöhnlich dem Herrn Newton zugeſchrieben, und es war nicht ſchwer einen völlig ſcharfen Beweis für den Fall zu finden, wenn der Exponent eine poſitive ganze Zahl iſt. Man fand aber nicht ſobald Mittel dem Beweiſe die völlige Allgemeinheit zu geben für

die Fälle, wenn n eine gebrochne oder auch negative Zahl iſt. Den hier vorgetragenen Beweis, der ſich durch ſeine Kürze und Bündigkeit vorzüglich empfielet, hat H. H. Käſtner gefunden. M. ſ. die von ihm zu Göttingen 1758 bekannt gemachte kleine Schrift: Theorema binomiale univerſaliter demonſtrat &c. A. G. Kæſtner.

345 §.

Es iſt die Stärke der Kraft gegeben, welche den Kolben eines Druckwerks gegen das im Stiefel befindliche Waſſer preſt: man ſucht, wie groß die Geſchwindigkeit des Waſſers ſey, nachdem der Kolben einen gegebenen Weg zurück gelegt hat: man ſucht überdem, wie ſtark für dieſen Augenblick der Druck des Waſſers gegen die Steigröhre ſey.

65 Fig. Aufl. Es ſey ABHI der Stiefel, und KHPQ ſey die Gurgel mit den Aufſatz-Röhren; ſo kann man beyde zuſammen als eine einzige in einem fortgehende Röhre betrachten. Im Anfang der Bewegung ſtehe die untere Fläche des Kolbens in AB, und wenn ſie in der Zeit t aus AB in CD gerückt iſt; ſo ſey $g\gamma = AC = BD = r$, und die Geſchwindigkeit desjenigen Waſſers $= \surd v$, welches in dem Augenblick, da die untere Fläche des Kolbens in CD ankommt, durch einen willkührlich angenommenen Querſchnitt m des Stiefels läuft. Jeder unbeſtimmte Querſchnitt MN oder mn ſey $= z$, und CD $= y$, das unbeſtimmte Stück Gg' der centriſchen Linie $Gg'V\gamma$ ſey $= s$, die Fläche der äuſſerſten Oefnung PQ $= n$; ſo fällt nun leicht in die Augen, daß die gegenwärtige Aufgabe nur ein beſondrer Fall der allge-

allgemeinen Aufgabe des 159 §. ſey. Wenn demnach der Druck gegen CD ſo groß iſt, als das Gewicht einer Waſſerſäule auf der Grundfläche CD in der Höhe $= \Pi$, ſo hat man für die geſuchte Geſchwindigkeit aus dem 159 §. die Gleichung

$$\Pi - k = b - x + \frac{m^2 v}{n^2} + \frac{m^2 dv}{ydr} \int \frac{ds}{z} - \frac{m^2 v}{y^2},$$

da dann $b =$ EG und $x =$ Fγ iſt. Ueberdem bezeichnet k die Höhe einer Waſſerſäule, deren Gewicht ſo groß, als der Druck gegen PQ iſt. Das iſt nun hier der Druck der Atmoſphäre, und eben dieſem Druck iſt auch der Kolben noch auſſer derjenigen Kraft ausgeſetzt, die ihn gegen das Waſſer treibt. Wenn nun PQ ſehr viel höher als CD liegt, ſo drückt zwar die Atmoſphäre nicht völlig ſo ſtark gegen PQ als gegen CD: indeſſen iſt der Unterſcheid ſo ſehr beträchtlich nicht, daß es eben nöthig wäre ihn hier in Betrachtung zu ziehen. Man kann alſo annehmen, daß beyde Preſſungen der Atmoſphäre gegen CD und PQ einander aufheben, ſo wird $\Pi - k$ die Höhe einer Waſſerſäule auf der Grundfläche CD ſeyn, deren Gewicht ſo groß iſt, als die Gewalt, womit der Kolben gegen das Waſſer preſt, den Druck der Atmoſphäre beyſeit geſetzt. Ich werde ſtatt deſſen hinführo k ſchreiben. Nun erwege man zuerſt, daß alle Querſchnitte des Stiefels gleich groß ſind, alſo $y = m$ ſey. Ferner ſetze man von nun an EG $= f$, ſo muß man f ſtatt b ſchreiben, und man erhält die Gleichung

$$k = f - x + \frac{m^2 v}{n^2} - v + \frac{m dv}{dr} \int \frac{ds}{z}.$$

66 Fig. Eben dieſe Gleichung findet ihre Anwendung, wenn der Stiefel des Druckwerks umgekehrt ſteht, wie in der 66 Fig. nur mit dem einzigen Unterſcheid, daß alsdenn $F\gamma = V\gamma = x$ negativ wird: denn die gefundene Gleichung gründet ſich auf die Vorausſetzung, daß die Horizontalfläche EF durch den unterſten Punct V der Steigröhre gelegt ſey. Dieſerwegen muß man nun vor x das entgegen geſetzte Zeichen nehmen. Um beydes auszudrücken will ich

$$k = f \mp x + \frac{m^2 v}{n^2} - v + \frac{m dv}{dr} \int \frac{ds}{z}$$ ſetzen.

Wenn ich weiter von nun an vorausſetze, daß alle Querſchnitte der Steigröhre ſowohl, als des Stiefels Kreiſe ſind, und den Durchmeſſer der Querſchnitte des Stiefels $= a$, den Durchmeſſer der oberſten Mündung PQ der Aufſatz-Röhren $= h$ ſetze; ſo wird $\frac{m^2}{n^2} = \frac{a^4}{h^4}$. Wird demnach auch von nun an durch z der Durchmeſſer eines unbeſtimmten Querſchnitts mn verſtanden, ſo muß man $\frac{a^2}{z^2}$ ſtatt $\frac{m}{z}$, alſo

$$\frac{a^2 dv}{dr} \int \frac{ds}{z^2} \text{ ſtatt } \frac{m\,dv}{dr} \int \frac{ds}{z}$$ ſchreiben.

Endlich ſetze man noch $Fg = b$, ſo iſt $x = b - r$, und es wird

$$k = f \mp (b - r) + \frac{a^4 v}{h^4} - v + \frac{a^2 dv}{dr} \int \frac{ds}{z^2}.$$

Das Integral $\int \frac{ds}{z^2}$ muß für die ganze Länge der

cen-

centriſchen Linie $Gg'V\gamma$ geſucht werden. Man ſetze, es ſey die ganze Länge der Steigröhre $Gg'V = l$, und $VR = w$, ſo muß man $s = l + w$ ſetzen, wenn man durch z die Durchmeſſer der Querſchnitte MN des Stiefels verſteht, und in dieſer Vorausſetzung iſt $z = a$, alſo $\frac{ds}{zz} = \frac{dw}{aa}$, und $\int \frac{ds}{zz} = C + \frac{w}{aa}$. Es ſey dies Integral $= H$, wenn $s = l$, alſo $w = 0$ iſt, ſo wird $C = H$, und $\int \frac{ds}{zz} = H + \frac{w}{aa}$, da dann nunmehro nach der Integration $w = Fg = b - r$ geſetzt werden muß. Man ſetze alſo dieſen Werth ſtatt $\int \frac{ds}{zz}$ in die obige Gleichung, ſo wird

$$k = f \mp (b-r) + \frac{a^4 v}{h^4} - v + \frac{Haadv}{dr} + \frac{(b-r)dv}{dr},$$

oder

$$(Haa + b - r)\,dv + \left(\frac{a^4}{h^4} - 1\right) v dr = (k - f \pm (b-r))\,dr.$$

Ein unbeſtimmter Querſchnitt $mn = z$ der Steigröhre leide einen Druck, der ſo groß iſt als das Gewicht einer Waſſerſäule auf der Grundfläche mn in der Höhe p; ſo findet man p aus der Gleichung

$$p = b - x + \frac{m^2 v}{n^2} + \frac{m^2 dv}{ydr} \int \frac{ds}{z} - \frac{m^2 v}{n^2}$$

(159 §.) das dortige k iſt hier $= 0$, weil der Druck der Atmoſphäre gegen PQ beyſeit geſetzt wird. Dieſe Gleichung wird auf den gegenwärtigen Fall folgendergeſtalt angewandt. Man ſchreibe wie vorhin f

ſtatt b, $\frac{a^4}{h^4}$ ſtatt $\frac{m^2}{n^2}$, $\frac{1}{4}\pi a^2$ ſtatt $m = y$, und $\frac{1}{4}\pi z^2$ ſtatt z, ſo erhält man

$$p = f - x + \frac{a^4 v}{h^4} + \frac{a^2 dv}{dr} \int \frac{ds}{z^2} - \frac{a^4 v}{z^4},$$

da dann $x = eg'$ iſt, und $Gg' = s$. Es ſey wie vorhin $G\gamma'V = l$, und nunmehro $Vg' = w$, ſo iſt $s = l - w$, alſo $ds = - dw$, und $\int \frac{ds}{zz} = C - \int \frac{dw}{zz}$. Dies Integral ſey wie vorhin $= H$, wenn $w = 0$ iſt, und man nehme $\int \frac{dw}{zz}$ ſo, daß es für $w = 0$ verſchwindet; ſo hat man $C = H$, und $\int \frac{ds}{zz} = H - \int \frac{dw}{zz}$. Folglich wird

$$p = f - x + \frac{a^4 v}{h^4} + \frac{Ha^2 dv}{dr} - \frac{a^2 dv}{dr} \int \frac{dw}{zz} - \frac{a^4 v}{z^4}.$$

Aber die für v vorhin gefundene Gleichung giebt

$$f + \frac{a^4 v}{h^4} + \frac{Ha^2 dv}{dr} = k \pm (b - r) + v - \frac{(b - r)\, dv}{dr},$$

und wenn dieſer Werth in die für p gefundene Gleichung geſetzt wird, ſo erhält man

$$p = k \pm (b - r) + v - \frac{(b-r)\,dv}{dr} - x - \frac{a^2 dv}{dr}$$

$$\int \frac{dw}{zz} - \frac{a^4 v}{z^4}, \text{ oder}$$

$$p = k - x \pm (b - r)\left(1 \mp \frac{dv}{dr}\right) - \frac{a^2 dv}{dr} \int \frac{dw}{zz}$$

$$+ v\left(1 - \frac{a^4}{z^4}\right).$$

Dieſe Formuln ſind völlig einerley mit denjenigen, die Hr. Euler für eben dieſe Aufgabe gefunden hat. M. ſ. ſeine Abhandlung: Sur le mouvement de l'eau par les tuyaux de conduite, in der Hiſtoire de l'Academie de Berlin pour l'Année 1752. p. 124. 125. Nur iſt zu merken, daß bey ihm g, y, s das ſey, was hier f, x, w heiſt. Die Druckwerke mit dem umgekehrten Stiefel hat Hr. Euler nicht beſonders betrachtet.

Um nun die für v gefundene Gleichung zu integriren, ſetze man Kürze halber $\frac{a^4}{h^4} - 1 = n$, und $Haa + b - r = Z$, ſo wird $dr = - dZ$, und $b - r = Z - Haa$. Dies in die Gleichung für v geſetzt giebt

$$Zdv - nv dZ = -(k - f \pm (Z - Haa))\, dZ.$$

Man multiplicire mit Z^{-n-1}, ſo wird

$$Z^{-n} dv - nv Z^{-n-1} dZ = -(k - f \pm (Z - Haa)) Z^{-n-1} dZ,$$

und die Integration giebt

$$Z^{-n}v = C + (k - f \mp Haa)\frac{Z^{-n}}{n} \pm \frac{Z^{-n+1}}{n-1}.$$

Wenn $r = 0$ iſt, ſo wird $Z = Haa + b$, und $v = 0$; wenn alſo $Haa + b = A$ geſetzt wird, ſo erhält man

$$C = \mp \frac{A^{-n+1}}{n-1} - (k - f \mp Haa)\frac{A^{-n}}{n},$$

und es wird

$$Z^{-n}v = (k - f \mp Haa)\frac{Z^{-n} - A^{-n}}{n}$$

$$\pm \frac{Z^{-n+1} - A^{-n+1}}{n-1}, \text{ alſo } v =$$

$$\frac{1}{n}(k - f \mp Haa)\left(1 - \frac{A^{-n}}{Z^{-n}}\right)$$

$$\pm \frac{Z}{n-1}\left(1 - \frac{A^{-n+1}}{Z^{-n+1}}\right), \text{ oder } v =$$

$$\frac{1}{n}(k - f \mp Haa)\left(1 - \frac{Z^{n}}{A^{n}}\right)$$

$$\pm \frac{Z}{n-1}\left(1 - \frac{Z^{n-1}}{A^{n-1}}\right).$$

Es war aber $Haa = A - b$, und $Z = A - r$; demnach läſt ſich dieſe Gleichung auch ſo ausdrücken:

$v =$

$$v = \frac{1}{n}(k - f \pm b \mp A)\left(1 - \frac{Z^n}{A^n}\right)$$

$$\pm \frac{A - r}{n - 1}\left(1 - \frac{Z^{n-1}}{A^{n-1}}\right).$$

346 §.

Weil $\frac{Z}{A} = \frac{Haa + b - r}{Haa + b} = 1 - \frac{r}{A}$ iſt, ſo wird

$$\frac{Z^n}{A^n} = 1 - \frac{n}{1} \cdot \frac{r}{A} + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{rr}{A^2},$$

u. ſ. f. (344 §.) und

$$\frac{Z^{n-1}}{A^{n-1}} = 1 - \frac{n - 1}{1} \cdot \frac{r}{A} + \frac{n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{rr}{A^2}$$

u. ſ. f., alſo

$$1 - \frac{Z^n}{A^n} = \frac{nr}{A} - \frac{n \cdot (n - 1) r^2}{2 A^2} \text{ u. ſ. f. und}$$

$$1 - \frac{Z^{n-1}}{A^{n-1}} = \frac{(n - 1) r}{A} - \frac{(n - 1)(n - 2) r^2}{2 A^2}$$

u. ſ. f. Demnach findet man für das Druckwerk mit dem aufrecht ſtehenden Stiefel

 $\frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n}(k-f+b)\left(1-\frac{Z^n}{A^n}\right)=(k-f+b)\left(\frac{r}{A}\right.$$

$$\left.-\frac{n-1}{2}\cdot\frac{r^2}{A^2}+\frac{n-1\,.\,n-2}{2\,.\,3}\cdot\frac{r^3}{A^3}\ldots\right)$$

$$-\frac{1}{n}A\left(1-\frac{Z^n}{A^n}\right)=A\left(-\frac{r}{A}\right.$$

$$\left.+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{r^2}{A^2}-\frac{n-1\,.\,n-2}{2\,.\,3}\cdot\frac{r^3}{A^3}\ldots\right)$$

$$+\frac{A}{n-1}\left(1-\frac{Z^{n-1}}{A^{n-1}}\right)=A\left(\frac{r}{A}\right.$$

$$\left.-\frac{n-2}{2}\cdot\frac{r^2}{A^2}+\frac{n-2\,.\,n-3}{2\,.\,3}\cdot\frac{r^3}{A^3}\ldots\right)$$

$$-\frac{r}{n-1}\left(1-\frac{Z^{n-1}}{A^{n-1}}\right)=A\left(-1\,.\,\frac{r^2}{A^2}\right.$$

$$\left.+\frac{n-2}{2}\cdot\frac{r^3}{A^3}\ldots\right).$$

Man addire alles auf beyden Seiten, ſo ergiebt ſich

$$v=(k-f+b)\cdot\frac{r}{A}$$

$$-\frac{(k-f+b)(n-1)}{2}\cdot\frac{r^2}{A^2}+\frac{(k-f+b)(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}\cdot\frac{r^3}{A^3}\ldots$$

$$-\tfrac{1}{2}A \qquad +\frac{(n-2)A}{2\,.\,3}.$$

Für das Druckwerk mit dem verkehrt ſtehenden

Stie-

Stiefel bekommt b in der erſten Reihe, und alle Glieder der drey letzten Reihen das entgegen geſetzte Zeichen; und es wird

$$v = (k - f - b) \cdot \frac{r}{A}$$

$$- \frac{(k-f-b)(n-1)}{2} \cdot \frac{r^2}{A^2} + \frac{(k-f-b)(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{r^3}{A^3}$$

$$+ \quad \tfrac{1}{2} A \qquad - \frac{(n-2) A}{2 \cdot 3}.$$

Die Glieder der Reihe, welche auf ſolche Art für v gefunden wird, ſind Producte aus beſtändigen Coefficienten in Potenzen von $\frac{r}{A}$, und in jedem folgenden Gliede iſt der Exponent der Potenz von $\frac{r}{A}$ um 1 gröſſer. Wenn alſo r gegen A ſehr klein, folglich $\frac{r}{A}$ ein ſehr kleiner Bruch iſt, ſo wird jedes folgende Glied ſehr viel kleiner, als das vorhergehende. Obgleich A auch in den Coefficienten als ein Factor vorkommt, ſo ſteigt doch A daſelbſt nicht höher, als auf die erſte Potenz, ſo daß dem ungeachtet die Glieder dieſer Reihe bey der angenommenen Vorausſetzung ſehr ſchnell abnehmen. Dieſe Vorausſetzung findet ſtatt, wenn ein Druckwerk das Waſſer durch ſehr lange Steigröhren auf eine groſſe Höhe hinauf treiben ſoll. Alsdenn iſt f ſehr groß, und die Länge der Steigröhre iſt wenigſtens eben ſo groß, ja in manchen Fällen noch viel länger. Es

hängt

hängt aber das Integral H von der Länge der Steigröhre ſo ab, daß es deſto gröſſer ſeyn muß, je gröſſer dieſe Länge iſt. Demnach iſt in dieſen Fällen $A = Haa + b$ gegen r ſehr groß, weil r kleiner als b bleibt, und b nicht leicht über 3 bis 4 Fuß beträgt. Soll alſo das Waſſer in der Steigröhre auf 100 und mehrere Fuß hoch getrieben werden, ſo kann man ohne beträchtlichen Fehler die Glieder der Reihe, welche nach dem erſten folgen, weglaſſen, alſo

$v = (k - f + b) \cdot \frac{r}{A}$ für das Druckwerk der erſten Art,

und $v = (k - f - b) \cdot \frac{r}{A}$ für das Druckwerk der zweyten Art annehmen. Weil endlich auch f ſowohl als Haa durch b nicht beträchtlich vermehrt oder vermindert werden, ſo kann man $A = Haa$, und $v = \frac{(k - f) r}{Haa}$ ſetzen, da dann dieſe Gleichung für beide Arten der Druckwerke gilt.

Wäre r in Vergleichung mit f nicht ſo ſehr klein, ſo könnte man doch, dafern der Bruch $\frac{r}{A}$ nur nicht viel über $\frac{1}{10}$ betragen kann, ohne ſehr beträchtlichen Fehler diejenigen Glieder der für v gefundenen Reihe, welche nach den beyden erſten folgen, weglaſſen. Man erhält alsdenn für das Druckwerk der erſten Art

$$v = (k - f + b) \cdot \frac{r}{A} - \left(\tfrac{1}{2} A + \frac{(k - f + b)(n - 1)}{2} \right) \cdot \frac{r^2}{A^2},$$

d. i. $v = \frac{k - f + b}{Haa + b} \cdot r - \left(\frac{1}{2 (Haa + b)} \right.$

+

$$+\frac{(k-f+b)(n-1)}{2(Haa+b)^2}\Big)r^2.$$

Für das Druckwerk der zweyten Art wird alsdenn

$$v=\frac{k-f-b}{Haa+b}r+\Big(\frac{1}{2(Haa+b)}$$

$$-\frac{(k-f-b)(n-1)}{2(Haa+b)^2}\Big)r^2.$$

Nun erinnere man ſich, daß oben $n=\frac{a^4}{h^4}-1$ geſetzt ſey (am Ende des 345 §.). Herr Euler ſetzt $\frac{a^2}{h^2}=n$, alſo $\frac{a^4}{h^4}-1=n^2-1$. Nimmt man dieſe Euleriſche Bezeichnung, ſo muß man in den herausgebrachten Gleichungen n^2-2 ſtatt $n-1$ ſchreiben. Wenn man alsdenn ferner in der erſten Gleichung $\frac{k-f}{Haa+b}+\frac{b}{Haa}$ ſtatt $\frac{k-f+b}{Haa+b}$ ſchreibt, und im erſten Gliede $\frac{1}{Haa+b}$ beynahe $=\frac{1}{Haa}-\frac{b}{H^2a^4}$ ſetzt, (welches durch die Diviſion gefunden wird,) im Coefficienten von rr aber b wegläſt, ſo erhält man Hrn. Eulers Ausdruck

$$v=\frac{(k-f)r}{Haa}+\frac{(2b-r)r}{2Haa}-\frac{(k-f)br}{H^2a^4}$$

$$-\frac{(k-f)(nn-2)rr}{2H^2a^4},\text{ oder}$$

v =

$$v = \frac{r}{Haa}\left(k-f+b-\frac{(k-f)b}{Haa}\right)$$

$$-\frac{rr}{2Haa}\left(1+\frac{(nn-2)(k-f)}{Haa}\right);$$

a. a. O. 16 §. 128 S. Nimmt man mit der zweyten Gleichung eine ähnliche Veränderung vor, ſo erhält man

$$v = \frac{(k-f)r}{Haa} - \frac{(2b-r)r}{2Haa} - \frac{(k-f)br}{H^2a^4}$$

$$-\frac{(k-f)(nn-2)rr}{2H^2a^4}, \text{ oder}$$

$$v = \frac{r}{Haa}\left(k-f-b-\frac{(k-f)b}{Haa}\right)$$

$$+\frac{rr}{2Haa}\left(1-\frac{(k-f)(nn-2)}{Haa}\right).$$

Dieſe Gleichungen ergeben, daß der Kolben beynahe mit gleichförmig beſchleunigter Bewegung fortrücke. Seine Geſchwindigkeit wird am größten, wenn er ſeine niedrigſte (oder oberſte) Stelle erreicht hat, woſelbſt $r = b$ iſt. Man erhält für dieſe Geſchwindigkeit $v = \frac{(k-f)b}{Haa} \pm \frac{bb}{2Haa}$

$$-\frac{(k-f)bb}{H^2a^4} - \frac{(k-f)(nn-2)bb}{2H^2a^4},$$

oder $v = \frac{2(k-f)b \pm bb}{2Haa} - \frac{nn(k-f)bb}{2HHa^4}$.

Je

Je größer alſo das Integral H iſt, deſto kleiner iſt die Geſchwindigkeit des Kolbens, wenn alles übrige einerley bleibt. Es wird aber H deſto größer, je länger die Steigröhre iſt, und je kleiner ihre Querſchnitte ſind. Weil überdem nun $n = \frac{a^2}{h^2}$ iſt, ſo erhellet, daß auch v deſto kleiner ſey, je kleiner die oberſte Mündung der Steigröhre in Vergleichung mit der Mündung des Stiefels iſt.

347 §.

Wenn das Druckwerk das Waſſer ſehr hoch treibt, ſo kann man auch in der für p gefundenen Gleichung (345 §.) das in $b - r$ multiplicirte Glied weglaſſen, und man erhält für beide Arten der Druckwerke

$$p = k - x - \frac{a^2 dv}{dr} \int \frac{dw}{zz} + v\left(1 - \frac{a^4}{z^4}\right).$$

Weil nun beynahe $v = \frac{(k-f)r}{Haa}$ geſetzt werden kann, ſo iſt auch beynahe $\frac{dv}{dr} = \frac{k-f}{Haa}$. Dieſe Werthe in die Gleichung für p geſetzt, geben

$$p = k - x - \frac{k-f}{H} \int \frac{dw}{zz} + \frac{(k-f)(1 - a^4 : z^4)r}{Haa},$$

wo man auch noch das letzte Glied in Vergleichung mit den übrigen weglaſſen, und $p = k - x - \frac{k-f}{H} \int \frac{dw}{zz}$ ſetzen kann. Demnach iſt der Druck auf einerley Stelle der Röhre allemahl bey-

nahe

nahe einerley, wo auch der Kolben ſich während ſeines Spiels befindet.

Schärfer läßt ſich v für beyde Druckwerke zuſammen ſo ausdrücken

$$v = \frac{(k-f)r}{Haa} \pm \frac{(2b-r)r}{Haa} - \frac{(k-f)br}{H^2a^4}$$

$$- \frac{(k-f)(nn-2)rr}{2H^2a^4}$$, und alsdenn wird

$$\frac{dv}{dr} = \frac{(k-f) \pm (b-r)}{Haa} - \frac{(k-f)b}{H^2a^4}$$

$$- \frac{(k-f)(nn-2)r}{H^2a^4}.$$

Man ſubſtituire dieſe Werthe in der Gleichung für p mit Weglaſſung der höhern Dimenſionen von $b-r$, b und r, ſo erhält man

$$\frac{(b-r)dv}{dr} - v = \frac{(k-f)(b-2r)}{Haa},$$

$$\frac{a^2dv}{dr} = \frac{k-f \pm (b-r)}{H} - \frac{(k-f)b}{H^2a^2}$$

$$- \frac{(k-f)(nn-2)r}{H^2a^2}, \quad \frac{va^4}{z^4} = \frac{aa(k-f)r}{Hz^4};$$

folglich wird $p = k - x \pm (b-r) - \frac{(k-f)(b-2r)}{Haa}$

$$- \frac{aa(k-f)r}{Hz^4} - \frac{1}{H}\left(k-f \pm (b-r)\right.$$

$$\left. - \frac{(k-f)b}{Haa} - \frac{(k-f)(nn-2)r}{Haa}\right) \int \frac{dw}{zz}$$

Um

Um den Druck für den erſten Anfang der Bewegung zu haben, muß man $r = 0$ ſetzen. Dies giebt

$$p = k \pm b - x - \frac{(k-f)b}{Haa} - \frac{1}{H}\left(k - f \pm b - \frac{(k-f)b}{Haa}\right)\int \frac{dw}{zz}.$$

Im Augenblick aber, da der Kolben ſeine unterſte (oberſte) Stelle erreicht, wird $r = b$, alſo für beide Arten der Druckwerke ohne Unterſcheid

$$p = k - x + \frac{(k-f)b}{Haa} - \frac{aa(k-f)b}{Hz^4} - \frac{1}{H}\left(k - f - \frac{(nn-1)(k-f)b}{Haa}\right)\int \frac{dw}{zz}.$$

Es ſey der niedrigſte Querſchnitt der Steigröhre $HK = c$, ſo findet man den Druck auf der Stelle, wenn man $x = 0$, $z = c$, und $\int \frac{dw}{zz} = 0$ ſetzt. Dies giebt

$$p = k \pm (b - r) - \frac{(k-f)(b-2r)}{Haa} - \frac{aa(k-f)r}{Hc^4},$$

oder $p = k \pm (b-r) - \frac{k-f}{Haa}\left(b - 2r + \frac{a^4}{c^4} r\right)$,

alſo für den Anfang der Bewegung

$$p = k \pm b - \frac{(k-f)b}{Haa}, \text{ und}$$

wenn der Kolben die niedrigſte (oberſte) Stelle erreicht hat,

 $p =$

$$p = k + \frac{(k-f)b}{Haa} - \frac{aab(k-f)}{Hc^4}.$$

Wenn b und r in Vergleichung mit den übrigen Gröſſen ſehr klein ſind, ſo iſt an dieſer Stelle beynahe beſtändig $p = k$.

348 §.

Bey eben den Vorausſetzungen des 346 §. die Zeit t zu finden, worin der Kolben einen gegebenen Weg $AC = r$ zurück legt.

Aufl. Wenn v die der Geſchwindigkeit des Kolbens zugehörige Höhe iſt, ſo hat man $\frac{dr}{dt} = 2\sqrt{gv}$, wenn g die Beſchleunigung der Schwere iſt (32 §. Mech.) alſo $dt = \frac{dr}{2\sqrt{g}\sqrt{v}}$. Es iſt aber $\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{a\sqrt{H}}{\sqrt{(k-f)r}} = \frac{a\sqrt{H}}{\sqrt{(k-f)}} r^{-\frac{1}{2}}$, folglich wird $dt = \frac{a\sqrt{H}}{2\sqrt{g}\sqrt{(k-f)}} r^{-\frac{1}{2}} dr$, alſo $t = \frac{a\sqrt{H}}{\sqrt{g}\sqrt{(k-f)}} r^{\frac{1}{2}}$, weil t und r zugleich verſchwinden müſſen; oder auch $t = \frac{\sqrt{Haar}}{\sqrt{g(k-f)}}$.

Es ſey die Zeit, welche der Kolben braucht, bis zur niedrigſten Stelle zu gelangen, $= \vartheta$, ſo hat man $\vartheta = \frac{\sqrt{Haab}}{\sqrt{g(k-f)}}$, wenn man $r = b$ ſetzt. Binnen dieſer Zeit alſo hebt das Druckwerk eine Menge Waſſer $= \frac{1}{4}\pi aab$.

349 §.

Wenn die Kolben zweyer Druckwerke, die übrigens völlig gleiche Abmeſſungen haben, ſo mit einander verbunden ſind, daß ſie wechſelsweiſe ſteigen und ſinken, alſo der eine das Waſſer binnen der Zeit in dem einen Stiefel ſchöpft, da es aber der andre hinauf drückt; ſo heiſt die ganze Einrichtung ein doppeltes Druckwerk. Es können beyde Stiefel mit einer und eben derſelben gemeinſchaftlichen Steigröhre zuſammen hängen, da dann nur nöthig iſt, daß jeder Stiefel mit ſeiner eigenen Gurgel und Ventil verſehen ſey, damit beyde Gurgeln eine ſo genannte Gabel bilden, durch welche das Waſſer aus den Stiefeln in die gemeinſchaftliche Steigröhre treten kann. Alsdenn hat dieſe Einrichtung ebenfalls die Natur eines doppelten Druckwerks. Dafern noch mehr als ein Paar Pumpen ſo mit einander verbunden ſind, daß die eine Hälfte binnen der Zeit daß Waſſer ſchöpft, da es die andre hinauf drückt; ſo kann die ganze Einrichtung füglich überhaupt ein zuſammengeſetztes Druckwerk heiſſen.

350 §.

Alle Abmeſſungen eines doppelten Druckwerks ſind gegeben, nebſt der Kraft, welche die Kolben abwärts preſt, und für beyde Kolben von gleicher Gröſſe angenommen wird: man ſucht die Menge Waſſer, die das Druckwerk in gegebener Zeit T hebt.

Aufl. Man kann beyde Stiefel zuſammen als eine einzige Pumpe betrachten, die beſtändig ihr Waſſer ergieſt. Wenn nun die Zeit eines ganzen

Kolbenſſpiels $= t$ iſt, ſo wird $t = 2\vartheta = \frac{2\sqrt{Haab}}{\sqrt{g(k-f)}}$ (348 §.) und in dieſer Zeit hebt das Druckwerk die Menge Waſſer $= \frac{1}{2}\pi aab$, folglich in der Zeit T die Menge $\frac{\frac{1}{2}\pi aab.T}{t}$. Wenn man nun dieſe Menge $= M$ ſetzt, und ſtatt den obigen Werth ſchreibt, ſo wird $M = \frac{\frac{1}{2}\pi aab T\sqrt{g(k-f)}}{2\sqrt{Haab}}$, oder $M = \frac{\frac{1}{4}\pi T\sqrt{aabg(k-f)}}{\sqrt{H}}$.

Dafern man Rheinländiſch Maaß braucht, ſo iſt $g = 15{,}625$, alſo $\sqrt{g} = \frac{\sqrt{15625}}{\sqrt{1000}} = \frac{125}{31{,}62}$, und wenn man für T eine Stunde annimmt, ſo wird $\frac{1}{4}\pi T\sqrt{g} = 0{,}7854 \cdot 3600 \cdot \frac{125}{31{,}62} = 11176$, und man erhält für eine Stunde die Waſſermenge $M = 11176\sqrt{\frac{aab(k-f)}{H}}$.

Dafern die Steigröhre durchgängig gleiche Querſchnitte hat, alſo $z = c = h$ iſt; ſo hat man $\int \frac{dw}{zz} = \frac{w}{cc}$, weil dies Integral $= 0$ ſeyn muß, wenn $w = 0$ iſt. Die ganze Länge der Steigröhre ſey nun $= l$, ſo iſt $H = \frac{l}{cc}$, alſo wird $M =$

$\frac{1}{4}\pi Tac\sqrt{\frac{bg(k-f)}{l}}$, und für eine Stunde iſt

$M = 11176ac\sqrt{\frac{b(k-f)}{l}}$.

Wenn K die Menge Waſſer bedeutet, deren Gewicht ſo groß iſt, als die Kraft, welche den Kolben treibt; ſo hat man $K = \frac{1}{4}\pi aak$, alſo $k = \frac{K}{\frac{1}{4}\pi aa}$, und $k - f = \frac{K - \frac{1}{4}\pi aaf}{\frac{1}{4}\pi aa}$. Dies giebt

$$M = \frac{1}{4}\pi Tac\sqrt{g}\cdot\sqrt{\frac{b(K - \frac{1}{4}\pi aaf)}{\frac{1}{4}\pi aal}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\pi Tc\sqrt{g}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{b}{l}(K - \frac{1}{4}\pi aaf)};$$

und wenn man für T eine Stunde annimmt, ſo darf man nur den Coefficienten $\frac{1}{4}\pi T\sqrt{g} = 11176$ durch $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0,8862$ dividiren, um die Waſſermenge für eine Stunde zu erhalten. Dieſe iſt alsdenn

$$= 12611\sqrt{\frac{b}{l}(K - \frac{1}{4}\pi aaf)}.$$

351 §.

Alle Abmeſſungen eines doppelten Druckwerks ſind gegeben, nebſt der Kraft, welche die Kolben unterwärts drückt, und für beyde gleich groß iſt: man ſucht die Zeit eines ganzen Kolbenſpiels, nebſt dem Druck, den die Steigröhre leidet, die nunmehro durchgängig von gleicher Weite angenommen wird.

Aufl. Wenn man alle vorige Bezeichnungen beybehält, alſo durch M die Menge Waſſer verſteht, die das Druckwerk in die Zeit T hebt, ſo hat man $t = \frac{\frac{1}{2}\pi aab \,.\, T}{M}$ (350 §.) In dieſem Ausdruck ſetze man ſtatt M den zuletzt im vor. §. gefundenen Werth, ſo wird $t = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{aa\sqrt{bl}}{c\sqrt{(K - \frac{1}{4}\pi aaf)}}$, da dann der Coefficient $\sqrt{\frac{\pi}{g}} = 0{,}4484$ wird, wenn man Rheinländ. Maaß brauchte.

Im 345 §. iſt beynahe $p = k - x - \frac{k-f}{H}\int\frac{dw}{zz}$ gefunden, und für den gegenwärtigen Fall hat man $H = \frac{l}{cc}$, $z = c$, und $\int\frac{dw}{zz} = \frac{w}{cc}$, alſo wird $p = k - x - \frac{(k-f)w}{l}$. Ueberdem iſt $k = \frac{K}{\frac{1}{4}\pi aa}$, und $k - f = \frac{K - \frac{1}{4}\pi aaf}{\frac{1}{4}\pi aa}$, folglich wird $p = \frac{K}{\frac{1}{4}\pi aa} - x - \frac{(K - \frac{1}{4}\pi aaf)w}{\frac{1}{4}\pi aal}$. Daraus ergiebt ſich der Druck an der unterſten Stelle im Querſchnitt HK, wenn man $x = 0$, und $w = 0$ ſetzt, ſo daß daſelbſt $p = \frac{K}{\frac{1}{4}\pi aa} = k$ iſt.

352 §.

Es ſey die Zeit eines Kolbenſpiels gegeben, nebſt allen übrigen Abmeſſungen des doppel-

ten

ten Druckwerks: man ſucht die Kraft, welche die Kolben unterwärts preſſen muß, nebſt dem Druck, den die Steigröhre an ihrer unterſten Stelle leidet.

Aufl. Aus der Gleichung $t = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{aa\sqrt{bl}}{c\sqrt{(K - \frac{1}{4}\pi aaf)}}$ folgt $cctt\,(K\,\frac{1}{4}\pi aaf) = \frac{\pi a^4 bl}{g}$, alſo $K = \frac{1}{4}\pi aaf + \frac{\pi}{g} \cdot \frac{a^4 bl}{cctt}$, welches die geſuchte Kraft iſt. Ferner hat man $p = k = \frac{K}{\frac{1}{4}\pi aa}$ (351 §.), alſo wird $p = f + \frac{4}{g} \cdot \frac{aabl}{cctt}$, oder $p = f + \frac{0{,}256 \,.\, aabl}{cctt}$, wenn man $g = 15{,}625$ ſetzt, woraus der Druck gegen die Steigröhre an ihrer unterſten Stelle gefunden wird.

Weil $M = \frac{\frac{1}{2}\pi aabT}{t}$ iſt (349 §.), ſo wird $aab = \frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi T}$, und dies in den Ausdruck für p geſetzt, giebt $p = f + \frac{4}{g} \cdot \frac{Ml}{\frac{1}{2}\pi cctT}$. Nimmt man für T eine Stunde, und braucht den Werth $g = 15{,}625$, ſo wird $p = f + \frac{0{,}256 \,.\, Ml}{5654cct}$.

Dieſe Formuln ergeben, daß die Kraft, welche die Kolben treiben ſoll, gröſſer ſeyn müſſe, als das Gewicht einer Waſſerſäule auf der Grundfläche des Kolbens in derjenigen Höhe, auf welche das Waſſer

gehoben werden ſoll, wie auch leicht vorauszuſehen iſt. Ueberdem aber iſt auch der Druck, den die Steigröhre an ihrer unterſten Stelle leidet, grüſſer, als derjenige, welcher der Höhe f zugehört.

353 §.

Unerfahrne Brunnen- und Kunſtmeiſter pflegen bey Berechnung der Kraft und Laſt an einer Waſſerkunſt gegen einander, für die Laſt, welche der Kolben überwinden muß, blos das eigentliche Gewicht des in der Steigröhre enthaltenen Waſſerkörpers zu rechnen. Und daher kommt es, daß manche vermeinte Verbeſſerungen der Stangen- und Pumpen-Künſte in der Ausübung ſo ſchlecht befunden ſind. Leupold verſichert, daß er hievon ſelbſt Erfahrungen habe im Theatr. Machin. Hydraul. I Th. XII Cap. 202 §. Wer einigermaſſen in der Theorie der Hydroſtatik geübt iſt, wird ſich zwar für dieſen Fehler wohl hüten; er wird wiſſen, daß die Kraft, welche den Kolben mit der in der Steigröhre befindlichen Waſſerſäule im Gleichgewicht erhalten ſoll, $= \frac{1}{4}$ πaaf ſeyn müſſe, die Steigröhre mag eben ſo weit, als der Stiefel, oder enger ſeyn. Aber dieſe Regel iſt allein nicht hinlänglich, wenn die Frage iſt, wie groß die Kraft ſeyn müſſe, welche den Kolben bewegen und in gegebener Zeit durch den Raum des Kolbenzuges treiben ſoll; und ſolche Schriftſteller, welche eine gute Theorie mit ihren practiſchen Kenntniſſen verbinden, unterlaſſen nicht, dieſes zu erinnern. Sobald die Kraft den Gleichgewichtsſtand aufheben ſoll, iſt es nicht mehr gleichgültig, wie weit die Steigröhre ſey, es muß vielmehr die Kraft deſto gröſſer ſeyn, je enger die

Steig-

Steigröhre iſt. Dies hat ohne groſſe theoretiſche Einſicht bemerkt werden können. Leupold hält es daher ſchon für einen groſſen Fehler, wenn man bey ſchnellen Hub enge Steigröhren braucht, a. a. O. XII Cap. 218 §. ich finde aber nicht daß er verſucht hätte, zu berechnen, um wie viel die Kraft der engern Steigröhre halber ſtärker ſeyn müſſe. Belidor hingegen hat in der Architectura Hydraul. III Buch III Cap. 901 u. ſ. f. §§. darüber ſchon Unterſuchungen angeſtellt, wiewohl ſeine Theorie noch mangelhaft iſt, und ihn eben deswegen a. a. O. im 903 §. auf eine Regel geleitet hat, die von derjenigen ſehr verſchieden iſt, worauf die Gleichung des vor. §. führt. Bey der Belidorſchen Regel kommt überdem die Länge der Steigröhre nicht in Betrachtung, wovon die Gleichung

$$K = \tfrac{1}{4}\pi a a f + \frac{\pi}{g} \cdot \frac{a^4 bl}{cctt} - (352\ \S.)$$

das Gegentheil beweiſet. Herr G. C. Silberſchlag erwehnt in ſeinen im J. 1768 bekannt gemachten Cloſter-Bergiſchen Verſuchen, und zwar im ſechſten Verſuch 180 u. f. S. der Druckwerke. Er drückt ſich auf der 184 S. ſo aus, daß es mir vorkömmt, als wenn er bey Berechnung der Kraft, die das Waſſer im Druckwerk heben ſoll, das alles angewandt wiſſen will, was freylich, ſo lange der Gleichgewichtsſtand währet, ſeine Richtigkeit hat. Nachdem er ſich auf den bekannten Verſuch mit dem anatomiſchen Heber berufen hat, fährt er ſo fort: „Daraus folgt denn freylich, daß „die Weite und Länge der Steigröhre völlig „gleichgültig ſey, und bey Beſtimmung der Gröſſe

„des von dem Waſſer zu erwartenden Widerſtandes „und der Gröſſe der Kraft, die zu deſſen Hebung „erfordert wird, gar nicht in Beobachtung kommen „könne.“ Ich würde hier beſtimmter geredet, die ganze Sache blos auf den Stand des Gleichgewichts (wie auch der angeführte Verſuch nur beweiſen kann) eingeſchränkt, und erinnert haben, daß es bey der würklichen Hebung des Waſſers damit eine ganz andere Bewandniß habe.

354 §.

Ueberhaupt ſcheint es, daß dem Herrn Silberſchlag die Euleriſchen Unterſuchungen über die Theorie der Druckwerke wohl nicht bekannt geweſen ſind: ſonſt hätte er an eben dem angeführten Orte ſich wohl nicht ohne alle Einſchränkung über den Druck des Waſſers gegen die Röhren folgendergeſtalt herausgelaſſen: „Was die Stiefel-Röhren betrift, ſo muß „die Weite und Dicke derſelben im Metall einmahl „vor allemahl nach Erfordern derjenigen ſenkrechten „Höhe, zu welcher das Waſſer hinauf getrieben wer„den ſoll, eingerichtet werden, und alsdenn wer„den ſie wohl unverletzt bleiben.“ Dieſe Regel hat man ſonſt gewöhnlich angenommen, und dabey vorausgeſetzt, daß in den Röhren fortlaufende Waſſer drücke ſie eben ſo, als wenn es darin ruhig ſtünde. Wenn indeſſen Belidor lehren will, wie der Druck gegen den Stiefel gefunden werde; ſo giebt er ſchon die richtige Regel, daß für die Höhe der auf ihn drückenden Waſſerſäule diejenige genommen werden müſſe, deren Gewicht der auf den Kolben drückenden Kraft gleich wäre, wenn ſie die Mündung des Stiefels zur Grundfläche hätte. Archit. Hy-

Hydraul. III B. III C. 950. 952 §. Für die Steigröhre aber behält er die vorhin gedachte Regel bey. Man wird jedoch durch die bisher vorgetragene Theorie überzeugt ſeyn, daß an der unterſten Stelle der Steigröhre, die dem Druck gemäſſe Höhe noch einerley ſey mit derjenigen, welche dem Druck auf den Stiefel zugehört, und alſo die Steigröhre nur in dem Fall ſchwächer als der Stiefel gemacht werden könne, wenn ſie enger als der Stiefel iſt. (223 §.) Der für dieſe Höhe gefundene Ausdruck

$$p = f + \frac{0{,}256\, a^2 bl}{cctt}$$ iſt allemahl gröſſer als f,

und p übertrift f um deſto mehr, je länger die Steigröhre, und je enger ſie iſt, und je ſchneller der Kolben ſpielt. Daß dieſer Ueberſchuß etwas ſehr beträchtliches ausmachen könne wird folgendes Beyſpiel einer würklich erbaueten Maſchine ergeben, welches aus der im 325 §. ſchon angeführten Euleriſchen Abhandlung §. XLIII. genommen iſt. Bey derſelben war

$a = \frac{4}{3}$ Fuß $l = 3000$ Fuß
$b = 4$ • $f = 60$ •
$c = \frac{3}{4}$ • $t = 6$ Secund.

Dies giebt $p = 60 + \frac{0{,}256 \cdot \frac{16}{9} \cdot 4 \cdot 3000}{\frac{9}{16} \cdot 36}$,

alſo $p = 330$ Fuß, ſo daß die Steigröhre einen mehr als fünfmahl gröſſern Druck leidet, als derjenige iſt, worauf man ſonſt zu rechnen gewohnt war. Man findet überdem $K = \frac{1}{4}\pi aap = 461$ Cub. Fuß Waſſer, und $M = \frac{5654 aab}{t} = 6701$ Cub. F., als die Waſſermenge für eine Stunde.

355 §.

355 §.

Damit eben die Kraft, welche die Kolben treibt die möglichſt gröſſeſte Menge Waſſer vermittelſt des Druckwerks hebe, muß man die Steigröhre

1) ſo weit, und

2) ſo kurz machen, als die übrigen Umſtände zulaſſen. Es war nemlich

$$M = 12611 . c\sqrt{\frac{b}{l}} (K - \tfrac{1}{4}\pi aaf) \quad (350 §.)$$

Wenn alſo alles übrige einerley iſt, ſo verhält ſich M wie $\frac{c}{\sqrt{l}}$. Was den erſten Punct betrift, ſo iſt dabey zu bemerken, daß weitere Röhren auch mehr Feſtigkeit haben müſſen, und eine nochmahl ſo weite Röhre nochmahl ſo dick ſeyn müſſe. (226 §.) An der unterſten Stelle der Steigröhre bleibt nemlich $p = \frac{4K}{\pi aa}$, und dieſer Ausdruck hängt von c nicht ab. Ueberdem iſt zu bemerken, daß eben die Kraft den Kolben ſchneller bewegen werde, wenn die Steigröhre weiter gemacht wird, weil $t = \frac{0.4484 . aa\sqrt{bl}}{c\sqrt{(K - \frac{1}{4}\pi aaf)}}$ iſt. Man muß alſo bey Anwendung dieſer Regel wohl prüfen, ob die Kraft, welche bey Maſchinen gewöhnlich veränderlich iſt, und bey gröſſerer Geſchwindigkeit abnimmt, bey einer weitern Röhre auch gegen den Kolben noch eben ſo ſtark drücken könne. Behält man einerley Dicke der Röhre bey, ſo kann man durch Verkürzung der Steigröhre, wo es angehet, anſehnlich gewinnen,

ohn-

ohne daß ſie deswegen mehr Feſtigkeit haben muß. 65
Soll alſo das Waſſer in einem Behälter bey P geho- Fig.
ben werden; ſo iſt es am vortheilhafteſten, das Druckwerk grade unter dem Behälter bey E anzubringen, damit die Steigröhren vertical hinaufgeführet werden können. Wenn dies inzwiſchen nicht thunlich iſt, ſo muß man doch alle Krümmungen der Steigröhre vermeiden, alſo dieſelbe in grader Linie von H nach P fortführen. Weil *t* wiederum deſto kleiner wird, je kleiner *l* iſt, alſo der Kolben von eben der Kraft deſto ſchneller bewegt wird; ſo muß man wegen dieſes Umſtandes, wie vorhin, auch die Beſchaffenheit der angebrachten Kraft in Betrachtung ziehen.

356 §.

Eine jede unter den Nahmen eines **hohen Satzes** in Bergwerken gebräuchliche Pumpe (339 §.) hat ebenfals die Natur eines Druckwerks, in ſo fern der Kolben das in den Stiefel hinaufgeſogene Waſſer hiernächſt in die Aufſatz-Röhren hinauf treibt; und man wendet die bisherigen Rechnungen darauf eben ſo an, wie auf Druckwerke von der Art, als die im vor. §. erwehnten ſind. Man fehlt deswegen auch hier gar ſehr, wenn man für die Laſt, welche die am Kolben angebrachte Kraft bewegen ſoll, blos das Gewicht des ſämmtlichen über dem Kolben ſtehenden Waſſers rechnet. Der Kolben leidet im Gleichgewichtsſtande ſchon einen Druck, der dem Gewicht eines Waſſer-Cylinders auf der Mündung des Stiefels als der Grundfläche, in der Höhe des Waſſers über dem Kolben gleich iſt. Ein ſolcher hoher Satz iſt ohnedem ein vereinbartes

Saug= und Druckwerk zugleich, und deswegen trägt auſſerdem der Kolben im Gleichgewichtsſtande noch das Gewicht einer Waſſerſäule auf eben der vorigen Grundfläche in der Höhe des Kolbens über dem Waſſerpaß des aus der Tiefe zu hebenden Waſſers (289 §.) Alſo muß die Kraft, welche den Kolben bewegen ſoll, gröſſer ſeyn, als das Gewicht einer Waſſerſäule auf einer der Mündung des Stiefels gleichen Grundfläche in der Höhe des oberſten Ausguſſes über das aus der Tiefe zu hebende Waſſer. Von dieſer Kraft, die den Kolben bewegt, wird nur ein Theil darauf verwandt, das Waſſer durch die Aufſatz=Röhren hinauf zu drücken: der übrige Theil wird erfordert, das Waſſer in der Saugröhre hinaufzuziehen. Eben dieſer Umſtand muß in Betrachtung gezogen werden, wenn beide vereinbarte Druckwerke zwar ſo beſchaffen ſind, wie anfangs im 348 §. angenommen ward, aber alle beyde Kolben wechſelsweiſe ſaugen und drücken müſſen, ſo daß der eine Kolben binnen eben der Zeit das Waſſer in ſeinem Stiefel anſaugt, da es der andre in ſeine Steigröhre weiter hinauf drückt. Wie groß der Theil der Kraft ſey, der zu jeder dieſer Würkungen beſonders verwandt wird, ſolches werden die folgenden Unterſuchungen mit mehrerm ergeben.

Der

Der XXIV. Abſchnitt.

Beſondere Unterſuchung über die vortheilhafteſte Einrichtung der Druckwerke.

357 §.

Es iſt die Zeit eines Kolbenſpiels gegeben, nebſt allen Abmeſſungen eines doppelten, oder auch mehr zuſammen geſetzten Druckwerks; überdem iſt die Einrichtung der Maſchine bekannt, welche die Kolben treibt: man ſucht, wie groß das mechaniſche Moment der angebrachten Kraft ſey, nachdem alles in den Beharrungsſtand gekommen iſt.

Aufl. Im Beharrungsſtande ſey die Geſchwindigkeit des Kolbens $= \beta$, die Höhe des Kolbenzuges $= b$, die Zeit eines Kolbenſpiels $= t$, ſo iſt $\beta = \frac{2b}{t}$. Wenn nun, wie im 349 §. durch K eine Menge Waſſer verſtanden wird, deren Gewicht ſo groß iſt, als der geſammte Widerſtand der Hälfte aller Kolben; F aber eine Menge Waſſer bedeutet, deren Gewicht ſo groß iſt, als die angebrachte Kraft im Beharrungsſtande, vorausgeſetzt, daß alsdenn die Geſchwindigkeit des angegriffenen Puncts der Maſchine $= \alpha$ ſey: ſo hat man $F\alpha = \frac{2Kb}{t}$, und man findet K aus dem 352 §. wenn das Druckwerk gedoppelt iſt. Dafern mehr als ein Paar Pumpen vereinbart ſind, und die Anzahl der Pumpen $= 2n$,

alſo

alſo die Anzahl der Paare $= n$ iſt; ſo darf man nur erwegen, daß alle Kolben gleich ſtark widerſtehen, und daß vermöge des 351 §. für jeden einzelnen Kolben $K = \frac{1}{4}\pi aaf + \frac{\pi}{g} \cdot \frac{a^4 bl}{cctt}$ ſey. Weil nun die halbe Anzahl zugleich das Waſſer hinauf drückt, ſo iſt der geſammte Widerſtand =

$$\frac{1}{4}\pi naaf + \frac{n\pi}{g} \cdot \frac{a^4 bl}{cctt}.$$

358 §.

Die Menge Waſſer zu finden, welche die angebrachte Kraft in gegebener Zeit T vermittelſt eines zuſammengeſetzten Druckwerks auf eine gegebene Höhe f heben kann.

Aufl. Wenn $2n$ die Anzahl der Pumpen iſt, und p die Bedeutung des 352 §. behält, ſo iſt $K = \frac{1}{4}\pi naap$, und es war $F\alpha = \frac{2Kb}{t}$ (357 §.), alſo wird $F\alpha = \frac{\frac{1}{2}\pi naabp}{t}$. Nun hebt das Druckwerk in der Zeit t die Menge Waſſer $= \frac{1}{2}\pi naab$, alſo in der Zeit T die Menge $M = \frac{\frac{1}{2}\pi naab T}{t}$, und dies giebt $\frac{\frac{1}{2}\pi naab}{t} = \frac{M}{T}$. Man ſetze dieſen Werth in die vorige Gleichung, ſo hat man $F\alpha = \frac{Mp}{T}$, alſo $M = \frac{F\alpha \,.\, T}{p}$. Weil nun vermöge des 352 §. allemahl $p > f$ iſt, ſo ſetze man $p = \lambda f$, und

und es wird $M = \frac{F\alpha . T}{\lambda f}$, da dann allemahl $\lambda > 1$ iſt.

359 §.

Wenn man dieſe Formul mit derjenigen vergleicht, die im 314 §. für das Saugwerk gefunden iſt, ſo wird man eine völlige Uebereinſtimmung finden. Die Waſſermenge iſt auch hier allemahl kleiner, als $\frac{F\alpha . T}{f}$. Wenn man indeſſen von nun an $M = \frac{F\alpha . T}{f}$ ſetzt, ſo kann man dieſe Menge M als die möglichſt gröſte betrachten, welche das Druckwerk im Zuſtande der möglichſt gröſten Vollkommenheit höchſtens heben könnte: oder eigentlich als eine Grenze, welche die vermittelſt eines Druckwerks zu hebende Waſſermenge nie übertreffen kann. Die Waſſermenge, welche das Druckwerk würklich hebt, iſt alsdann $= \frac{1}{\lambda}$ M, und das Druckwerk iſt deſto vollkommener, je kleiner λ iſt. Beym einfachen Druckwerk muß man $M = \frac{F\alpha . \frac{1}{2} T}{f}$ ſetzen. Uebrigens erinnere ich noch zum Ueberfluß, daß die allgemeine Erinnerungen des 312 §., welche die Anwendung der allgemeinen Lehren vom Maſchinenweſen auf die Pumpenkünſte betreffen, auch hier ihre Anwendung finden. Dieſe Rechnungen ſind nur Näherungen, und man muß bey würklicher Erbauung einer ſolchen Maſchine alles denjenigen, was die

die Theorie vorausſetzt, ſo nahe zu bringen ſuchen, als ſich thun läſt. Ich erinnere ferner, daß bey der Anwendung auf ſpecielle Fälle auch auf die Friction Rückſicht genommen werden müſſe, ſo daß man eigentlich in der gefundenen Gleichung $F - \varphi$ ſtatt F ſchreiben muß, wenn man M berechnen will, da dann φ die Bedeutung des 320 § behält.

360 §.

Eine vortheilhafte Einrichtung eines zuſammengeſetzten Druckwerks anzugeben, wenn feſtgeſetzt iſt, welche Art der Kräfte die Kunſt treiben, und wie hoch das Waſſer gehoben werden ſolle.

Aufl. Man ſuche zuerſt $M = \frac{(F - \varphi)\,\alpha T}{f}$, als die Grenze, welche die Waſſermenge nicht übertreffen kann, die das Druckwerk in der Zeit T auf die gegebene Höhe f bringen kann: ich will hinführo Kürze halber F ſtatt $F - \varphi$, wie im 322 §, ſchreiben. Weil nun die Maſchine nur die Waſſermenge $\frac{1}{\lambda}$ M heben wird, ſo ſuche man λ aus der für $p = \lambda f$ im 352 §. gefundenen Gleichung. Es war nemlich $p = \lambda f = f + \frac{4}{g} \cdot \frac{aabl}{cctt}$, und daraus folgt $\lambda = 1 + \frac{4aabl}{fgcctt}$. Man ſetze $\lambda = 1 + \frac{1}{\omega}$, ſo wird $\frac{1}{\omega} = \frac{4aabl}{fgcctt}$, und $\omega b = \frac{fgcctt}{4aal}$. In der Zeit T hebt das doppelte Druckwerk die Waſſermenge

$\frac{\frac{1}{2}\pi aabT}{t}$ (350 §.): alſo wird das aus *n* Paar Pumpen zuſammen geſetzte Druckwerk die Waſſermenge $\frac{\frac{1}{2}\pi naabT}{t}$ heben. Weil nun dieſe hier $=$ $\frac{1}{\lambda}M$ geſetzt werden muß, ſo erhält man $\frac{1}{\lambda}M = \frac{\frac{1}{2}\pi naabT}{t}$, und daraus folgt $naa = \frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi\lambda bT}$. Man hat demnach folgende drey Gleichungen,

$$\text{I)}\ \lambda = 1 + \frac{1}{\omega};$$

$$\text{II)}\ \omega b = \frac{fgeett}{4aal};$$

$$\text{III)}\ naa = \frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi\lambda bT};$$

wodurch drey von den ſechs Gröſſen, λ, ω, b, e, a, t, beſtimmt werden, ſo daß man drey willkührlich annehmen kann.

Die Kraft, welche die Maſchine treibt, ſey am Umfang eines Rades angebracht, deſſen Halbmeſſer $= r$ iſt, und die Umlaufszeit deſſelben ſey $= \vartheta$, ſo hat man $\vartheta = \frac{2\pi r}{\alpha}$. Ueberdem ſey $\vartheta = \mu t$, ſo iſt in dieſen Gleichungen α durch die Natur der angebrachten Kraft beſtimmt, und ϑ hängt von der Gröſſe des Halbmeſſers r ab. Hat man nun in den obigen Gleichungen auch t beſtimmt, ſo erhält man $\frac{\vartheta}{t}$

 $= \mu$,

$= \mu$, und dies beſtimmt die Einrichtung der Maſchine.

Weil man nicht gern Steigröhren wählt, die weiter als die Stiefel ſind; ſo nehme man das Verhältniß $\frac{c}{a}$ willkührlich an. Nimmt man überdem auch t willkührlich an, ſo hat man $\omega b = \frac{fgcctt}{4aal}$, da dann von ω und b ebenfalls das eine willkührlich angenommen werden kann. Aber die Vollkommenheit des Druckwerks erfordert, daß ω eine etwas groſſe Zahl ſey: und je gröſſer c gegen a, je gröſſer t, und je kleiner b genommen wird, deſto gröſſer wird ω. Weil nun $t = \frac{\vartheta}{\mu}$ war, ſo kann man auf eine zwiefache Art zuwege bringen, daß t etwas groß werde: einmahl dadurch, daß man den Halbmeſſer r des Hauptrades etwas groß nimmt, weil hiedurch ϑ vergröſſert wird, und zweytens dadurch, daß man μ nur klein annimmt, ſo daß auf jeden Umlauf des Haupt-Rades nur wenig Kolbenſpiele kommen.

361 §.

Ich glaube, daß man auf dieſe Art am kürzeſten und leichteſtens überſehen könne, worauf es bey der Berechnung eines Druckwerks und deſſen vortheilhaften Einrichtung ankommt. Hr. Euler verfährt in der oben (345 §.) angeführten Abhandlung etwas anders, und ich will noch zeigen, wie man am kürzeſten auf die Reſultate ſeiner Rechnungen kommt. Es war $\lambda = 1 + \frac{4aabl}{fgcctt}$ (360. 352 §.), und

für

für ein doppeltes Druckwerk hat man $\frac{1}{\lambda}$ M = $\frac{\frac{1}{2}\pi aabT}{t}$ (350 §.), daher konnte man im 352 §. auch $aab = \frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi\lambda T}$ ſubſtituiren, wo aber M das war, was hier $\frac{1}{\lambda}$ M iſt. Wenn die Maſchine n Paar Pumpen treibt, ſo iſt eigentlich $\frac{1}{\lambda}$ M $= \frac{\frac{1}{2}\pi naabT}{t}$, alſo $aab = \frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi n\lambda T}$. Dies in die Gleichung für λ geſetzt, giebt

$$\lambda = 1 + \frac{4}{g} \cdot \frac{Ml}{\frac{1}{2}\pi\lambda nccftT},$$ und

daraus folgt ferner

$$\lambda^2 - \lambda = \frac{4}{g} \cdot \frac{Ml}{\frac{1}{2}\pi nccftT};$$

folglich wird

$$\lambda = \tfrac{1}{2} + \surd\left(\tfrac{1}{4} + \frac{4}{g} \cdot \frac{Ml}{\frac{1}{2}\pi nccftT}\right).$$

Uebrigens bleibt $naa = \frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi\lambda bT}$. Man ſetze nun

$$\lambda = 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega + 1}{\omega},$$ ſo erhält man

$$1 + \frac{1}{\omega} = \tfrac{1}{2} + \surd\left(\tfrac{1}{4} + \frac{4}{g} \cdot \frac{Ml}{\frac{1}{2}\pi nccftT}\right),$$

 und

und daraus folgt

$$\left(\tfrac{1}{2}+\frac{1}{\omega}\right)^2=\tfrac{1}{4}+\frac{4}{g}\cdot\frac{Ml}{\tfrac{1}{2}\pi nccftT};$$

alſo ferner

$$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega\omega}=\frac{4}{g}\cdot\frac{Ml}{\tfrac{1}{2}\pi nccftT}.$$

Wenn nun c und t ſo genommen werden, daß λ ſehr wenig gröſſer, als 1, alſo ω eine beträchtlich groſſe Zahl wird, ſo hat man beynahe $\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega\omega}=\frac{1}{\omega-1}$, da dann dieſer Vorausſetzung gemäß $\omega = 1 + \tfrac{1}{4}g\cdot\frac{\tfrac{1}{2}\pi nccftT}{Ml}$ gefunden wird, und daraus folgt $ncct=\frac{2.4(\omega-1)Ml}{\pi gfT}$. Wenn alſo nun umgekehrt für ω eine etwas groſſe Zahl angenommen iſt, ſo kann man noch von c und t das eine willkührlich annehmen, und alsdenn das andere aus dieſer Gleichung finden, da dann für die Zeit T die würkliche Waſſermenge $=\frac{\omega}{\omega+1}$ M wird.

Wenn $\omega = 10$ iſt, ſo hebt die Maſchine nur den eilften Theil weniger Waſſer, als ſie heben würde, wenn man ihr die vollkommenſte Einrichtung geben könnte, ſo daß die Waſſermenge die Grenze $M=\frac{F\alpha T}{f}$ würklich erreichte. Dieſe Vorausſetzung $\omega = 10$ giebt $9=\frac{\pi gnccftT}{2.4.Ml}$, oder $\frac{\pi gnccftT}{2.4.9Ml}=1$.

Setzt

Setze man aber $\omega > 10$, ſo wird $\frac{\pi gnccft\mathrm{T}}{2.4.9.\mathrm{M}l} > 1$. Man kann die Zahl 10 ohngefehr als eine Grenze anſehen, unter welche ω nicht fallen muß, ſo daß ein Druckwerk nur alsdenn für vollkommen zu halten, wenn es wenigſtens die Waſſermenge $\frac{10}{11}$ M in der Zeit T auf die Höhe f hebt. Uebrigens wird das Werk deſto vollkommener ſeyn, je mehr ω die Zahl 10 übertrift, und man kann folgende Regel feſtſetzen, wornach die Werthe von t und cc zu beſtimmen ſind.

Man ſetze $\frac{\pi gf\mathrm{T}}{2.4.9.\mathrm{M}l} = \mathrm{L}$, ſo muß $\mathrm{L}.ncct > 1$, alſo $ncct > \frac{1}{\mathrm{L}}$ ſeyn, und man kann t oder c willkührlich nehmen, wenn die Zahl n feſtgeſetzt iſt. Hiernächſt erhält man $\omega = 1 + 9\mathrm{L}.ncct$, und daraus ergiebt ſich ferner $\lambda = 1 + \frac{1}{1+9\mathrm{L}ncct}$. In der zweyten Gleichung $naa = \frac{\mathrm{M}t}{\frac{1}{2}\pi\lambda b\mathrm{T}}$ bleiben alsdenn nur a und b unbeſtimmt, ſo daß man eins von beyden willkührlich annehmen kann, da dann das andre vermittelſt dieſer Gleichung gefunden wird. Weil es nun den bisherigen Vorausſetzungen gemäß iſt, daß b gegen f ſehr klein ſeyn ſoll; ſo kann man dieſer Bedingung dadurch allemahl ein Genüge thun, daß man in ſolcher Abſicht a etwas gröſſer nimmt, oder wenn a zu groß ausfallen ſollte, mehr Paar Pumpen braucht, damit n gröſſer werde.

Für das doppelte Druckwerk iſt $n = 1$, und man hat für daſſelbe die beiden Gleichungen

$$\text{I)}\ \lambda = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + \frac{4}{g} \cdot \frac{Ml}{\tfrac{1}{2}\pi ccft\mathrm{T}}}.$$

$$\text{II)}\ \tfrac{1}{4}\pi aab = \frac{Mt}{2\lambda \mathrm{T}}.$$

Man kann während der Rechnung jedes Druckwerk als ein gedoppeltes betrachten, wenn man durch $\frac{1}{4}\pi cc$ die Summe der Querſchnitte aller Steigröhren, und durch $\frac{1}{4}\pi aa$ die Summe der Querſchnitte aller Stiefel verſteht, die zugleich drücken. Dafern nicht ein jedes paar Stiefeln ſeine eigene Steigröhre hat, ſondern alle Gurgeln ſich in einer einzigen Steigröhre vereinigen, ſo muß jeder Querſchnitt dieſer gemeinſchaftlichen Steigröhre $= \frac{1}{4}\pi ncc$ genommen werden. Verſteht man alſo nun durch c den Durchmeſſer der Mündung dieſer gemeinſchaftlichen Steigröhre, ſo muß cc ſtatt ncc in den obigen Formuln gebraucht werden.

362 §.

Wenn man für T eine Stunde annimmt, und $g = 15{,}625$ ſetzt; ſo wird

$$\frac{\pi g \mathrm{T}}{2 \cdot 4 \cdot 9} = \frac{\frac{1}{4}\pi \cdot 15{,}625 \cdot 3600}{2 \cdot 9} = \tfrac{1}{4}\pi \cdot 3125,$$

alſo im 361. §.

$$\mathrm{L} = \frac{3125 \cdot \frac{1}{4}\pi f}{Ml} = \frac{125 \cdot 25 \cdot \frac{1}{4}\pi f}{Ml}.$$

Setzt man eben dieſe Zahlen auch in den für λ gefunde-

fundenen Ausdruck, und ſchreibt überdem $\frac{\vartheta}{\mu}$ ſtatt t, ſo wird

$$\lambda = \tfrac{1}{2} + \surd\left(\tfrac{1}{4} + \frac{4M\mu l}{15{,}625 \cdot 3600 \cdot \frac{1}{2}\pi ccf\vartheta}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} + \surd\left(\tfrac{1}{4} + \frac{M\mu l}{125 \cdot 225 \cdot \frac{1}{4}\pi ccf\vartheta}\right).$$

Eben dieſen Ausdruck hat Hr. Euler in der Abhandlung: Maximes pour arranger le plus avantageuſement les machines deſtinées a elever de l'eau par le moyen des pompes §. XXIII. M. ſ. die Hiſtoire de l'Academie de Berlin T. VIII. pag. 207. Nur bemerke ich, daß hier beym H. Euler cc den Flächen-Inhalt der Querſchnitte der Steigröhre bedeute, den Hr. Euler in den vorhergehenden im 344 §. angeführten Abhandlung $= \frac{1}{4}\pi cc$ geſetzt hatte. Setzt man endlich auch in der Gleichung $\frac{1}{4}\pi aab = \frac{Mt}{2n\lambda T}$ die Zahl 3600 ſtatt T, ſo hat man $\frac{1}{4}\pi aab = \frac{Mt}{7200 n\lambda}$. Man ſiehet wohl, daß dieſe Gleichung die Menge Waſſer beſtimme, welche jede Pumpe auf jeden Kolben-Hub ſchütten kann, weil $\frac{1}{4}\pi aab$ der körperliche Raum des Kolbenzuges iſt. Es iſt dieſe Gleichung wiederum mit der Euleriſchen a. a. O. 220 S. einerley, nur daß Hr. Euler aa ſtatt $\frac{1}{4}\pi aa$ ſchreibt. Die Gleichung ſetzt übrigens voraus, daß das gebrauchte Maaß ein Fuß ſey, und der Ausdruck $b = \frac{Mt}{7200 \cdot \frac{1}{4}\pi aa \cdot n\lambda}$ giebt b in Fuſſen

ausgedruckt. Wäre alſo der Flächen-Inhalt $\frac{1}{4}\pi aa$ der Mündung des Stiefels in Quadratzollen gegeben, ſo müſte man ihn auf Quadratfuſſe bringen. Wenn nemlich in dieſer Vorausſetzung $\frac{1}{4}\pi aa = A$ wäre, ſo müſte man $\frac{1}{144}A$ ſtatt A ſchreiben. Dies giebt $b = \frac{144}{7200} \cdot \frac{Mt}{n\lambda A} = \frac{Mt}{50n\lambda A}$, da dann dieſer Ausdruck, um auch b in Zollen zu haben, mit 12 multiplicirt werden muß, welches $b = \frac{6}{25} \cdot \frac{M}{\lambda} \cdot \frac{t}{nA}$ giebt, oder $b = \frac{12}{25} \cdot \frac{M}{\lambda} \cdot \frac{t}{2nA}$.

Dafern die Steigröhre grade und vertical iſt, ſo hat man $l = f$, alſo im 361 §. $L = \frac{3125 \cdot \frac{1}{4}\pi}{M}$. Soll nun die in einer Stunde zu hebende Waſſermenge $= \frac{10}{11} M = \frac{10}{11} \cdot \frac{3600 \cdot F\alpha}{f}$ ſeyn, ſo muß man die Einrichtung ſo machen, daß $Lcct = \frac{3125 \cdot \frac{1}{4}\pi cct}{M} = 1$ werde. Dieſe Gleichung giebt $t = \frac{M}{3125 \cdot \frac{1}{4}\pi cc}$, alſo umgekehrt $cc = \frac{M}{3125 \cdot \frac{1}{4}\pi t}$, und dieſe letzte Gleichung giebt $\frac{1}{4}\pi cc$ in Quadratfuſſen. Wenn man alſo Quadratzolle haben will, ſo muß man $\frac{1}{4}\pi cc = \frac{144M}{3125t}$ ſetzen. Hr. Euler hat aus dieſer Formul a. a. O. 216. 217 S. eine Tafel berechnet, für die Weite

der

der Steigröhren in Quadrat-Zöllen, vorausgeſetzt, daß die Grenze der Waſſermenge M für eine Stunde, und die Zeit eines Kolbenſpiels t gegeben ſey. Wenn man alle ſeine Zahlen mit $\frac{1}{4}\pi$ dividirt, oder welches einerley iſt, mit $\frac{1}{\frac{1}{4}\pi} = 1{,}2732$ multiplicirt, und aus den Producten die Quadratwurzeln ziehet, ſo hat man die Durchmeſſer für die Mündungen der Steigröhren.

Der XXV. Abſchnitt.

Von vereinbarten Saug- und Druckwerken.

363 §.

Eine Pumpenkunſt iſt ein vereinbartes Saug- und Druckwerk: man ſucht den geſammten Widerſtand, welchen alle Kolben zuſammen der Bewegung der Maſchine entgegen ſetzen.

Aufl. Die Anzahl aller Pumpen zuſammen ſey $= 2n$, ſo wird entweder die halbe Anzahl der Kolben das Waſſer hinauf drücken, indem es die andre Helfte in die zugehörigen Stiefel anſaugt; oder es wird jedesmahl die eine Helfte zugleich ſaugen und drücken. In beyden Fällen iſt der geſammte Widerſtand einerley, wenn ſonſt alles übrige einerley iſt. Der von dem Druck gegen das Waſſer abhängende Widerſtand ſey $=$ R, und derjenige, welcher

vom

vom Saugen abhängt, ſey = Q; ſo iſt der geſuchte geſammte Widerſtand = R + Q. Wenn nun a wie bisher den Durchmeſſer der Mündung der Stiefel bedeutet; ſo iſt $R = \frac{1}{4}\pi naap$ (351. 352 §.) und $Q = \frac{1}{4}\pi naak$ (292. 310 §.) wenn p und k die Bedeutungen behalten, die ſie in den angeführten Stellen hatten. Was nemlich dort m war, iſt hier nun $\frac{1}{4}naa$. Demnach iſt der geſuchte Widerſtand = $\frac{1}{4}\pi naa\,(k + p)$.

Wenn die Höhe, worauf die Kunſt das Waſſer durchs Saugen hebt, = e, diejenige aber, worauf ſie es durch den Druck hebt, = f iſt, ſo weiß man, daß $k > e$, und $p > f$ ſey (310. 351 §.). Man ſetze $k = \nu \cdot e$, und $p = \lambda f$, ſo iſt ſowohl ν als λ gröſſer als 1, und der geſammte Widerſtand, welchen die an der Maſchine angebrachte Kraft zu überwinden hat, iſt = $\frac{1}{4}\pi naa\,(\nu \cdot e + \lambda f)$.

364 §.

Die Menge Waſſer zu finden, welche die angebrachte Kraft in gegebener Zeit T vermittelſt eines vereinbarten Saug- und Druckwerks auf eine gegebene Höhe = h heben kann.

Aufl. Wenn K den geſammten Widerſtand aller Kolben bedeutet, und die Buchſtaben F, α, β, b, t in eben dem Sinn, wie bisher gebraucht werden, ſo hat man $F\alpha = K\beta = \frac{2Kb}{t}$. Da nun hier $K = \frac{1}{4}\pi naa\,(k + p)$ iſt (363 §.), ſo wird $F\alpha = \frac{\frac{1}{2}\pi naab}{t}\,(k + p)$. Die in der Zeit T gehobene Waſſermenge iſt auch hier, wie im 358. und 314 §. =

$= \frac{\frac{1}{2}\pi naab T}{t}$. Wird demnach dieſe = M geſetzt, und man ſchreibt $\frac{M}{T}$ ſtatt $\frac{\frac{1}{2}\pi naab}{t}$, ſo erhält man $F\alpha = \frac{M(k+p)}{T}$, folglich $M = \frac{F\alpha T}{k+p}$. Wenn aber das Pumpwerk das Waſſer auf die Höhe e ſaugt, und auf die Höhe f drückt, ſo iſt $e+f=h$, und vermöge des vor. §. $k+p = \nu e + \lambda f > e+f$. Demnach iſt die Waſſermenge, welche die Maſchine würklich auf die Höhe h hebt, $= \frac{F\alpha T}{\nu e + \lambda f}$, und dieſe iſt allemahl kleiner als $\frac{F\alpha . T}{e+f}$, oder $\frac{F\alpha . T}{h}$. Dafern man es aber dahin bringen kann, daß die Zahlen ν und λ die Einheit ſehr wenig übertreffen, ſo wird auch die würkliche Waſſermenge die eben erwehnte ſehr wenig übertreffen. Und wenn man hinführo $M = \frac{F\alpha . T}{h}$ ſetzt; ſo iſt die Waſſermenge wiederum, wie im 359. und 314 §. eine Grenze, welche die würklich gehobene Waſſermenge nicht erreichen der ſie aber durch eine geſchickte Einrichtung der Maſchine ſehr nahe gebracht werden kann, und die Regeln des 316 §. wornach die Vollkommenheit einer Waſſerkunſt überhaupt geprüft werden kann, finden auch hier ihre Anwendung.

365 §.

Eine vortheilhafte Einrichtung eines vereinbarten Saug- und Druckwerks anzugeben, wenn man weiß, welche Art der Kräfte die Maſchine treiben, und wie hoch das Waſſer überhaupt gehoben werden ſoll.

Aufl. Die angebrachte Kraft würke mit dem Bewegungsmoment $F\alpha$ in die Maſchine, ſo daß α die Geſchwindigkeit des angegriffenen Puncts iſt. Nun wird ein Theil der Kraft erfordert, das Waſſer in die Stiefel hinauf zu ſaugen. Der andre wird erfordert, es auf die übrige Höhe hinauf zu drücken. Jener Theil ſey $= V$, dieſer $= W$, ſo muß $F = V + W$ ſeyn, weil die Geſchwindigkeit α für beyde einerley iſt. Die Kraft V muß nun mit dem Bewegungsmoment $V\alpha$ das Waſſer auf die Höhe e ſaugen, und W muß es mit dem Bewegungsmoment $W\alpha$ auf die Höhe f drücken. Jene Kraft V hebt in der Zeit T die Waſſermenge $\frac{V\alpha . T}{\nu . e}$ auf die Höhe e, und W hebt in eben der Zeit die Waſſermenge $\frac{W\alpha . T}{\lambda f}$ auf die Höhe f, und dieſe Waſſermengen müſſen für das vereinbarte Saug- und Druckwerk gleich groß ſeyn. Die Grenze der erſten Waſſermenge ſey N, und die Grenze der andern M, ſo hat man $N = \frac{V\alpha . T}{e}$ für das Saugwerk, und $M = \frac{W\alpha . T}{f}$ für das damit vereinbarte Druckwerk, und es muß $\frac{1}{\nu} N =$

$\frac{1}{\lambda}$ M ſeyn. Wäre nun überdem M = N, ſo müſte man die Einrichtung ſo machen, daß auch $\nu = \lambda$ würde. Aber die Vorausſetzung M = N giebt $\frac{V}{e} = \frac{W}{f}$, alſo $V : W = e : f$, und $e + f : f = V + W : W = F : W$. Dieſemnach wird $W = \frac{F.f}{e+f}$, folglich $V = F - W = \frac{F.e}{e+f}$. Hieraus flieſſen folgende Regeln, die bey Anlegung eines vereinbarten Saug- und Druckwerks zur Richtſchnur dienen würden.

Man vertheile die Kraft in zwene Theile V und W, die ſich wie die Höhen e und f verhalten, ſo daß $V = \frac{Fe}{e+f}$, und $W = \frac{Ff}{e+f}$ wird. Hierauf berechne man die Abmeſſungen des Druckwerks nach dem 360 §. eben ſo, als wenn die Maſchine durch die Kraft W mit dem Bewegungsmoment $W\alpha$ getrieben würde. Auf ſolche Art beſtimmt man auſſer dem Durchmeſſer c der Steigröhre auch a, b, t und λ. Für das Saugwerk müſſen nun b und t, eben ſo groß als für das Druckwerk, und überdem muß $\nu = \lambda$ ſeyn. Daraus wird für das Saugwerk die Weite der Stiefel eben ſo groß, als für das Druckwerk gefunden, wie die Beſchaffenheit der Maſchine erfordert, ſo daß nur die Weite der Saugröhre unbeſtimmt bleibt, weil ihre Länge von äuſſerlichen Umſtänden abhängt. Man muß nemlich die Abmeſſungen des Saugwerks nach dem 322 §. ſo berechnen, als wenn die Maſchine durch die Kraft V mit dem

dem Bewegungsmoment $V\alpha$ getrieben würde, und die Einrichtung ſo machen, daß das dortige λ für das Saugwerk ſo groß wird, als es hier für das Druckwerk iſt. Alsdenn wird im 322 §. das dortige $M = \frac{V\alpha T}{e} = \frac{F\alpha T}{e+f}$ eben ſo groß, als man es hier für das Druckwerk gefunden hat, nemlich $= \frac{W\alpha T}{f}$. Demnach giebt daſelbſt die Gleichung n. 4. den Werth $\delta = \sqrt{\frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi n b \lambda T}}$, und für das Druckwerk hat man $a = \sqrt{\frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi n b \lambda T}}$ (360 §.) folglich $\delta = a$, wenn n für beyde einerley iſt, wie hier erfordert wird. Weil nun λ gegeben iſt, ſo findet man ferner im 322 §. $\omega = \frac{1}{\lambda - 1}$, $\psi = A \int v \frac{b\omega}{e}$, weil das dortige f hier e heiſt, und $\varepsilon = \frac{\psi\delta\sqrt{2l}}{t\sqrt{g}} = \frac{\psi a\sqrt{2l}}{t\sqrt{g}}$.

Dafern für das Druckwerk die Abmeſſungen ſo genommen werden, daß $b\omega$ ſehr groß und $\frac{b\omega}{e} > 2$ wird, ſo kann ω nicht für das Saugwerk eben ſo groß, als für das Druckwerk ſeyn (323 §.), und alsdenn kann die Vorausſetzung $\lambda = \nu$, und $M = N$ nicht beſtehen. Man kann alsdenn für das Druckwerk den Durchmeſſer a der Stiefel nicht ehe berechnen, bevor auch für das Saugwerk ν gefunden iſt. In ſolcher Abſicht berechne man $\psi = \frac{\varepsilon t\sqrt{g}}{\delta\sqrt{2l}}$, und

und nehme das Verhältniß $\frac{\varepsilon}{\delta}$ ſo an, daß ψ beynahe $=\pi$ wird; ſo erhält man hiernächſt $b\omega = e . \sin v . \psi$, $\omega = \frac{e \sin v \psi}{b}$, und $v = \frac{\omega + 1}{\omega}$. Alsdenn wird die würkliche Waſſermenge $= \frac{F\alpha T}{ve + \lambda f} = \frac{M}{\lambda} = \frac{N}{v}$, und hiernächſt giebt ſich $a = \delta$, aus der Gleichung $a = \surd - \frac{M . t}{\frac{1}{2}\pi n b \lambda T} = \surd \frac{N . t}{\frac{1}{2}\pi n b v T}$.

366 §.

Wenn in der Vorausſetzung $\lambda = v$ einmahl die Gränze der Waſſermenge M=N aus der Gleichung $M = \frac{F\alpha . T}{e+f}$ berechnet iſt, ſo kommt $F\alpha$ in den übrigen Gleichungen des 322 und 360 §. weiter nicht vor. Demnach iſt es in dieſem Betracht eben ſo viel, als wenn man ſonſt für ein bloßes Saugwerk oder Druckwerk die Gränze der Waſſermenge zu berechnen hat, welches das Waſſer auf die Höhe $e + f = h$ heben ſoll. Bey der übrigen Berechnung aber, wenn man ſie für das Druckwerk und Saugwerk beſonders anſtellt, muß man nicht die ganze Höhe h, ſondern für jedes diejenige Höhe brauchen, auf welche das erſte das Waſſer drücken, das letztere aber ſaugen ſoll. Uebrigens wird hiedurch dasjenige gerechtfertiget, was Hr. Euler im XXXIV. §. derjenigen Abhandlung vorträgt, die im 361 §. angeführt iſt. Bey der Vorausſetzung, daß der Theil

der Kraft, welcher auf das Druckwerk verwandt wird, ſich zur ganzen an der Maſchine angebrachten Kraft verhalte, wie die Höhe f zur Höhe $e+f$, iſt es ein weſentlicher Umſtand, daß die Weite der Saugröhre dieſer Vorausſetzung gemäß gehörig berechnet werde. Denn eigentlich iſt das Verhältniß $V : W = \nu e : \lambda f$, und $V + W : W = \nu e + \lambda f : \lambda f$, folglich $W = \frac{F\lambda f}{\nu e + \lambda f}$. Wenn alſo $\nu > \lambda$ wäre, ſo wäre $W < \frac{Ff}{e+f}$; und wenn alsdenn das Druckwerk nach Vorſchrift des 360 §. berechnet wäre, in der Vorausſetzung, daß $W = \frac{Ff}{e+f}$ ſey, ſo würde es die Dienſte nicht thun, die man davon erwartete.

367 §.

Nicht allein die gewöhnlichen Schwengel-Pumpen, welche zum öconomiſchen Gebrauch dienen, ſondern auch andre Saugwerke ſind gemeiniglich ſo eingerichtet, daß über dem Kolben bis an das Gußrohr eine Waſſerſäule ſteht, die der Kolben zugleich mit heben muß, indem er das Waſſer in der Saugröhre heraufzieht. Man vergleiche den 315, 289 und 269 §. Alsdenn wird ein Theil der angebrachten Kraft darauf verwandt, dieſe Säule hinauf zu drücken, und die Pumpe iſt alsdenn würklich ein vereinbartes Saug- und Druckwerk. Gewöhnlich nimmt man an, daß der von dieſer über dem Kolben befindlichen Waſſerſäule abhängende Widerſtand ihrem Gewicht gleich ſey: allein dies verdienet eine nähere Unterſuchung. Weil dieſe Säule gewöhnlich nicht

ſehr

ſehr hoch iſt, ſo finden die Gleichnngen des 360 §. eigentlich keine weitere Anwendung, weil ſie ſich auf die Vorausſetzung gründen, daß f gegen b ſehr groß ſey. Ich rede nemlich jetzt nicht von denjenigen Pumpen, die unter dem Namen der hohen Sätze in Bergwerken üblich ſind; ſondern von ſolchen, die, was den Stiefel betrift, ſo geſtaltet ſind, wie ſie die 53 Figur vorſtellt, und bey welchen die über dem Kolben IK bis an das Gußrohr MN befindliche Waſſerſäule IO nicht viel über 10 Fuß, oder auch etwas weniger, hoch iſt. Bey Pumpen von dieſer Art befinden ſich über dem Stiefel gewöhnlich keine Aufſatz-Röhren, deren Querſchnitte von den Querſchnitten des Stiefels verſchieden ſind: ſondern die Querſchnitte der ganzen Waſſerſäule von I bis O ſind mit den Querſchnitten des Stiefels einerley. Deswegen wendet man die allgemeinen Gleichungen des 344 §. auf den gegenwärtigen Fall an, wenn man $a = h$ ſetzt.

368 §.

In der Vorausſetzung des vor. §. die Geſchwindigkeit des Waſſers zu finden, nachdem der Kolben um eine gegebene Höhe $= r$ geſtiegen iſt.

Aufl. Die allgemeine Differential-Gleichung des 344 §. war folgende:

$$k = f - x + \frac{a^4}{h^4} \upsilon - \upsilon + \frac{a^2 d\upsilon}{dr} \int \frac{ds}{z^2}.$$

In derſelben muß man hier $- x$ ſtatt $+ x$ ſchreiben, wegen der im 355 §. angeführten Urſache: und hiernächſt muß man $a = h$ ſetzen. Dies giebt $k = f + x$

$+ \frac{a^2 dv}{dr} \int \frac{ds}{z^2}$, oder auch $k = f + b - r + \frac{a^2 dv}{dr} \int \frac{ds}{z^2}$, wenn man $b - r$ ſtatt x ſetzt.

Uebrigens bleibt das Integral $\int \frac{ds}{z^2} = \mathrm{H} + \frac{b-r}{aa}$, und man erhält

$$(k - f - b + r)\,dr = (\mathrm{H}aa + b - r)\,dv.$$

Ferner iſt im gegenwärtigen Fall $\mathrm{H} = \frac{f}{aa}$, alſo $\mathrm{H}aa = f$, und es wird $dv = -\frac{r + k - f - b}{r - f - b}\,dr$.

Man dividire den Zehler dieſes Bruchs durch den Nenner, ſo findet man $dv = -dr + \frac{kdr}{f + b - r}$.

Die Integration giebt $v = \mathrm{C} - r - kl(f + b - r)$, und weil v und r zugleich verſchwinden müſſen, ſo findet man $\mathrm{C} = kl(f + b)$, alſo $v = kl\,\frac{f+b}{f+b-r} - r$.

Dieſe Gleichung läſt ſich auch ſo ausdrücken, $v = -kl\,\frac{f+b-r}{f+b} - r$, oder $v = -kl\left(1 - \frac{r}{f+b}\right) - r$. Wenn man nun $f + b$ in Vergleichung mit r ſehr groß annehmen könnte, ſo wäre beynahe $l\left(1 - \frac{r}{f+b}\right) = -\frac{r}{f+b}$, und man hätte $v = \frac{kr}{f+b} - r = \frac{(k-f-b)r}{f+b}$, welches mit dem im

346 §.

346 §. für v gefundenen Ausdruck überein kommt, wenn man dort $Haa = f$ ſetzt, und im Zehler $- b$ ſtatt $+ b$ ſchreibt, weil hier der Kolben von unten hinauf drückt. Aber die erwähnte Vorausſetzung darf hier nicht angenommen werden. Um einen Ausdruck zu finden, der dem $l\left(1 - \frac{r}{f+b}\right)$ näher kommt, wird folgende Aufgabe dienlich ſeyn.

369 §.

Wenn x einen eigentlichen Bruch bedeutet, den natürlichen Logarithmen der Zahl $1 + x$ zu finden.

Aufl. Man ſetze $l(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4$ u. ſ. f., ſo daß die Glieder dieſer Reihe nach den Potenzen von x ſteigen, ſo folgt hieraus, es ſey

$$\frac{dx}{1+x} = Adx + 2Bxdx + 3Cx^2dx + 4Dx^3dx, \text{ u. ſ. f.}$$

alſo $$\frac{1}{1+x} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3, \text{ u. ſ. f.}$$

Nun findet man durch die Diviſion

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \text{ u. ſ. f.}$$

Demnach wird $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots\ldots$
$$= A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 \ldots\ldots$$

und damit beyde Reihen einander gleich werden, muß man die Coefficienten der gleichnahmigen Potenzen von x einander gleich ſetzen. (Man vergleiche hiemit den 344 §.). Dies giebt

$A = 1$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{1}{4}$ u. ſ. f.,

folglich wird

$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \ldots$

Wenn nun der Bruch x ziemlich klein iſt, ſo nehmen die höhern Potenzen von x ſehr ſchnell ab, und die erſten zwey, drey oder vier Glieder dieſer Reihe geben den geſuchten Logarithmen beynahe richtig. Er wird deſto ſchärfer gefunden, je mehr Glieder dieſer Reihe man berechnet.

Im vor. §. war $v = -kl\left(1 - \frac{r}{f+b}\right) - r$. Man ſetze in der gefundenen Reihe $x = -\frac{r}{f+b}$, ſo wird

$$l\left(1 - \frac{r}{f+b}\right) = -\frac{r}{f+b} - \frac{r^2}{2(f+b)^2} - \frac{r^3}{3(f+b)^3} \ldots$$

Iſt nun $f+b$ gegen r noch mittelmäßig groß, ſo drücken die beyden erſten Glieder dieſen Logarithmen nahe genug aus, und wenn man ſie in der Gleichung für v ſubſtituirt, ſo wird

$$v = \frac{kr}{f+b} + \frac{krr}{2(f+b)^2} - r = \frac{k-f-b}{f+b}r + \frac{k}{2(f+b)^2}rr.$$

Im 346 §. fand man für das Druckwerk der zweyten Art

$$v = \frac{k-f-b}{Haa+b}r + \left(\frac{1}{2(Haa+b)} - \frac{(k-f-b)(n-1)}{2(Haa+b)^2}\right)rr.$$

Man

Man ſetze $n=0$, und $Haa=f$, wie hier geſchehen muß; ſo wird der Coefficient von $rr =$
$$\frac{f+b+k-f-b}{2(f+b)^2} = \frac{k}{2(f+b)^2},$$ und man erhält für v eben den vorigen Ausdruck.

370 §.

Die Zeit zu finden, worin der Kolben der im 368 §. betrachteten Pumpe einen gegebenen Weg $= r$ zurück legt.

Aufl. Es iſt $dt = \frac{dr}{2\sqrt{g}\sqrt{v}}$, wie im 347 §. und hier müſte man $v = kl\frac{f+b}{f+b-r} - r$ ſubſtituiren, und alsdenn das Integral ſuchen. Wenn aber $f+b$ gegen r nur mittelmäßig groß iſt, ſo daß $\frac{r}{f+b}$ nur nicht viel kleiner als $\frac{1}{10}$ wird; ſo kann man ohne ſehr beträchtlichen Fehler $v =$
$$\left(\frac{k}{f+b} - 1\right)r + \frac{k}{2(f+b)^2}rr$$ annehmen.

Es ſey $\frac{k}{f+b} = \lambda$, und $\lambda = 1 + \frac{1}{\omega}$, ſo wird
$$\frac{k}{f+b} - 1 = \lambda - 1 = \frac{1}{\omega},$$ und $$\frac{k}{2(f+b)^2} = \frac{\lambda}{2f+b} = \frac{\omega+1}{2\omega(f+b)}.$$ Dies giebt $2v =$
$$\frac{2}{\omega}r + \frac{\omega+1}{\omega(f+b)}rr = \frac{\omega+1}{\omega(f+b)}\left(\frac{2(f+b)}{\omega+1}r + rr\right),$$

und $dt = \frac{dr}{\sqrt{2g}\sqrt{2v}} = \frac{\sqrt{\omega(f+b)}}{\sqrt{2g(\omega+1)}} \cdot \frac{dr}{\sqrt{(2Ar+rr)}}$,

wenn man Kürze halber $\frac{f+b}{\omega+1} = A$ ſetzt.

Es ſey $A+r=x$, ſo wird $dr=dx$, $AA+2Ar+rr = xx$, und $2Ar+rr=xx-AA$, folglich

$\frac{dr}{\sqrt{(2Ar+rr)}} = \frac{dx}{\sqrt{(xx-AA)}}$. Ferner ſey

$\sqrt{(xx-AA)} = z-x$, ſo wird $xx-AA = zz - 2zx + xx$, und daraus folgt $2zx = zz + AA$,

ferner $x = \frac{zz+AA}{2z}$, und $z - x = \frac{zz-AA}{2z}$

$= \sqrt{(xx-AA)}$. Ueberdem wird $zdx + xdz = zdz$, alſo $zdx + \frac{zz+AA}{2z} dz = zdz$, und $dx =$

$\left(1 - \frac{zz+AA}{2zz}\right) dz = \frac{zz-AA}{2zz} dz$,

folglich $\frac{dr}{\sqrt{(2Ar+rr)}} = \frac{dx}{\sqrt{(xx-AA)}} = \frac{dz}{z}$,

Dies in den Ausdruck für dt geſetzt, giebt

$$dt = \frac{\sqrt{\omega(f+b)}}{\sqrt{2g(\omega+1)}} \cdot \frac{dz}{z},$$

alſo $t = \frac{\sqrt{\omega(f+b)}}{\sqrt{2g(\omega+1)}} \cdot lz + C$,

Für $r=0$, wird $x=A$, und $z=x=A$, alſo

$C = -\frac{\sqrt{\omega(f+b)}}{\sqrt{2g(\omega+1)}} lA$, und wenn der

Werth

Werth von z durch r wieder ausgedrückt wird, ſo hat man

$$t = \frac{\sqrt{\omega(f+b)}}{\sqrt{2g(\omega+1)}} \cdot l\,\frac{1}{A}(A+r+\sqrt{(2Ar+rr)}),$$

oder $$t = \frac{\sqrt{\omega(f+b)}}{\sqrt{2g(\omega+1)}}\; l\,\frac{\omega+1}{f+b}\left(\frac{f+b}{\omega+1}+r\right.$$
$$\left.+\sqrt{\left(\frac{2(f+b)r}{\omega+1}+rr\right)}\right).$$

371 §.

Wenn man $r = b$ ſetzt, ſo giebt die gefundene Gleichung die Zeit eines Kolbenzuges, und die Zeit eines ganzen Kolbenſpiels iſt alsdenn doppelt ſo groß. Bedeutet alſo von nun an t die Zeit eines ganzen Kolbenſpiels, ſo wird

$$t = \frac{\sqrt{2\omega(f+b)}}{\sqrt{g(\omega+1)}}\; l\left(1+\frac{b(\omega+1)}{f+b}\right.$$
$$\left.+\sqrt{\left(\frac{2(\omega+1)b}{f+b}+\frac{bb(\omega+1)^2}{(f+b)^2}\right)}\right).$$

Könnte man dieſe Gleichung ſo verändern, daß ω allein auf die eine Seite des Gleichheits-Zeichens gebracht würde, ſo hätte man ω durch t, f, und b ausgedrückt, und daraus fände ſich $k = \lambda\,(f+b) = \frac{\omega+1}{\omega}(f+b)$, folglich auch die Kraft, welche den Kolben zu bewegen erfordert wird, $= \frac{1}{4}\pi aak$. Der Gleichung die erwähnte Geſtalt zu geben, hat deswegen ſeine Schwierigkeit, weil der Logarithmiſche Ausdruck darin vorkommt. So viel ſiehet man

wohl, wenn $f+b$ eine mittelmäßige Höhe iſt, daß ω ſehr groß ausfallen werde, wenn auch t nur wenige Secunden groß iſt. Weil g zwiſchen 15 und 16 Fuß fällt, ſo muß $f+b$ ſchon über 8 Fuß betragen, wenn der Factor $\frac{\sqrt{2\omega(f+b)}}{\sqrt{g(\omega+1)}}$ — die Einheit nur etwas weniges übertreffen ſoll, und alsdenn muß ſchon ω beträchtlich groß ſeyn. Weil der andre Factor ein Logarithme iſt, ſo wächſt derſelbe nur ſehr langſam, wenn gleich die zugehörige Zahl beträchtlich wächſt. Es wächſt aber dieſe zugehörige Zahl mit ω, und die Gleichung ergiebt, daß die Kraft an der Kolbenſtange allemal etwas weniges größer ſeyn müſſe, als das Gewicht der über dem Kolben befindlichen Waſſerſäule. Sollte $k=f+b$ ſeyn, ſo müſte $\lambda=1$, alſo $\omega=\infty$ ſeyn, und dies würde die Zeit t auch unendlich groß geben, das heiſt, es würde keine Bewegung erfolgen können. Wollte man für ein gegebenes t, b und f das zugehörige ω berechnen, ſo könnte man ſo verfahren. Man muß ω muthmaßlich annehmen, und t berechnen; ſo wird ſich ergeben, ob ω richtig, oder zu groß oder zu klein angenommen iſt, nachdem für t eine Zahl heraus kommt, die eben ſo groß, größer oder kleiner, als das gegebene t iſt. In den beyden letzten Fällen muß man ω kleiner oder größer annehmen, und die Rechnung wiederhohlen, bis alles zutrift. Aus dieſen Schlüſſen flieſt übrigens folgende Regel:

Wenn der Kolben eines niedrigen Satzes nur langſam bewegt wird, ſo iſt die Kraft, welche an der Kolbenſtange, um die über dem

Kolben ſtehende Waſſerſäule zu heben, erfordert wird, ungemein wenig größer, als das Gewicht dieſer Säule, und wenn man nicht die gröſte Schärfe ſucht, kann man ſie dieſem Gewicht gleich ſetzen.

372 §.

Die Menge Waſſer zu finden, die eine Pumpenkunſt auf eine gegebene Höhe in gegebener Zeit T hebt, wenn die Pumpen niedrige Sätze, und die Ausgüſſe in mittelmäßiger Höhe über dem Kolben angebracht ſind.

Aufl. Die Höhe, auf welche das Waſſer durchs Saugen gehoben wird, ſey $= e$, die Höhe des Kolbenzuges $= b$, und die Höhe des Ausguſſes über dem höchſten Kolbenſtand, $= f$, ſo iſt die geſammte Höhe, worauf das Waſſer gehoben wird, $= e + f + b$. Weil nun die Pumpen würklich vereinbarte Saug- und Druckwerke ſind, ſo finden die Formuln des 364 §. ihre Anwendung, nur daß man hier $b + f$ ſtatt des dortigen f ſchreiben muß, und die geſuchte Waſſermenge iſt $= \frac{F\alpha . T}{\nu e + \lambda(f + b)}$, oder wenn die am Ende des vorigen §. vorausgeſetzte Bedingung zum Grunde liegt, ſehr nahe $= \frac{F\alpha T}{\nu e + f + b}$. Setzt man $M = \frac{F\alpha T}{e + f + b}$, ſo iſt dies die Gränze, welche die Waſſermenge nicht übertreffen kann, der man ſie aber doch ſehr nahe bringt, wenn man die Einrichtung ſo macht, daß auch ν eine Zahl wird, welche die Einheit ſehr wenig übertrift.

373 §.

Eine vortheilhafte Einrichtung einer Pumpenkunſt anzugeben, wenn die Pumpen niedrige Sätze ſind.

Aufl. Man müſte dem 365 §. gemäß die Einrichtung ſo machen, daß $\nu = \lambda$ würde, und alsdenn wäre die würkliche Waſſermenge, welche die Kunſt hebt, $= \frac{F\alpha T}{\lambda(e+f+b)}$. Allein dieſer Bedingung kann man bey niedrigen Sätzen nicht allemal ohne in andre Unbequemlichkeiten zu verfallen, ein Genüge thun. Wenn die Kolben nicht ſehr ſchnell bewegt werden ſollen, ſo wird ω ſehr groß ausfallen, und es kann ν nicht kleiner als $1 + \frac{b}{2e}$ werden. Wenn alſo $\frac{2e}{b} < \omega$ wäre, ſo könnte man dieſer Bedingung kein Genüge leiſten, ohne ω zu verkleinern, wodurch zugleich t kleiner würde, und dies würde enge Stiefel, und ſehr weite Saugröhren geben. Im 365 §. aber iſt überhaupt $V = \frac{F\nu e}{\nu e + \lambda(f+b)}$ und $W = \frac{F\lambda(f+b)}{\nu e + \lambda(f+b)}$, und es wird $M = \frac{V\alpha T}{e} = \frac{F\nu\alpha T}{\nu e + \lambda(f+b)}$, und $N = \frac{W\alpha T}{f+b} = \frac{F\lambda\alpha T}{\nu e + \lambda(f+b)}$, folglich $\frac{1}{\nu} M = \frac{F\alpha T}{\nu e + \lambda(f+b)} = \frac{1}{\lambda} N$ wie erfordert wird. Man

berech-

berechne nun zuerſt die Abmeſſungen der Pumpe, in ſo fern ſie ein Saugwerk iſt, nach dem 322 §. und richte alles ſo ein, daß ν, ſo viel die Umſtände zulaſſen, die Einheit ſehr wenig übertreffe. Man hat nämlich aus dem 322 §. hier die Gleichungen

$$1)\ \nu = 1 + \frac{1}{\omega}, \qquad 2)\ \psi = A\int v \frac{h\omega}{e},$$

$$3)\ t = \frac{\psi\delta\sqrt{2l}}{\varepsilon\sqrt{g}}, \qquad 4)\ \tfrac{1}{4}\pi\delta\delta = \frac{Mt}{2n\nu bT}.$$

Um δ zu berechnen, muß man den Werth $\frac{M}{\nu} =$

$\frac{F\alpha T}{\nu e + \lambda(f+b)}$ brauchen. Wollte man alſo alles ganz genau nehmen, ſo müſte man, nachdem t und b beſtimmt worden, nach Vorſchrift des 371 §. für die Pumpe in ſofern ſie ein Druckwerk iſt, das dortige ω berechnen, und dieſen Werth von ω gebraucht $\frac{\omega+1}{\omega} = \lambda$ ſetzen. Allein wenn man aus den im 371 §. angezeigten Gründen zum voraus beurtheilen kann, daß ω ſehr groß ausfallen wird, ſo hat man die Mühe nicht nöthig, dies ω zu berechnen. Man kann alsdenn $\lambda = 1$, alſo $\frac{1}{\nu} M = \frac{F\alpha T}{\nu e + f + b}$ ſetzen.

374 §.

Um dieſe allgemeine Auflöſung durch ein Beyſpiel zu erläutern, werde ich die im 337 §. beſchriebene

bene Maſchine wählen. Ich habe daſelbſt angenommen, daß das Waſſer 28 Fuß gehoben werden, und daß dies blos durchs Saugen geſchehen ſolle. Ich will nun annehmen, die Saugröhre ſoll 20 Fuß hoch über dem aus der Tiefe zu hebenden Waſſer hervorragen, ſo iſt hier $e = 20$ Fuß, und $b + f =$ 8 Fuß. Ich behalte ferner aus dem 337 §. die Vorausſetzungen $b = 1$ Fuß, $\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{3}{4}$, und $t = 9,425$ Secunden bey. Soll alsdenn die Saugröhre wie im 337 §. 4 Fuß unter Waſſer zu ſtehen kommen, ſo wird hier $l = 24$ Fuß, und man erhält $\psi =$

$$\frac{t\varepsilon\sqrt{g}}{\delta\sqrt{2l}} = \frac{9,425 \cdot 3 \cdot \sqrt{15,1}}{4\sqrt{48}} = 3,9585.$$

Dieſer Bogen faſſet 226° 48′, alſo iſt ſinv $\psi = 1,68455$ $= \frac{b \cdot \omega}{e}$, folglich $\omega = 1,68455 \times 20 = 33,7$ und $y = \frac{347}{337}$. Um nun eine Probe zu geben, wie man ω für das Druckwerk nach dem 371 §. berechnen müſte, will ich zum Verſuch $\omega = 1000$ annehmen. Dies giebt $\frac{b(\omega + 1)}{f+b} = 125$, $\frac{bb(\omega + 1)^2}{(f+b)^2} =$ 15625, und $\sqrt{\left(\frac{2(\omega + 1)b}{f+b} + \frac{bb(\omega+1)^2}{(f+b)^2}\right)} = 123.$

Hiezu $1 + \frac{b(\omega+1)}{f+b} = 126$ addirt giebt 249, und es iſt der Briggiſche Logarithme von $249 = 2,3962$, welcher mit 2,3025 multiplicirt den natürlichen Logarithmen von $249 = 5,5068$ giebt. Iſt nun das gebrauchte Maaß das franzöſiſche, alſo $g = 15,1$,

ſo

ſo wird $\frac{\sqrt{2\omega(f+b)}}{\sqrt{g(\omega+1)}} = 1{,}03$, und das giebt $t = 1{,}03 \times 5{,}5068 = 5{,}567$ Secunden. Es ſoll aber $t = 9{,}425$ Sec. ſeyn, folglich iſt ω weit größer als 1000, und man kann ganz ſicher $\lambda = 1$, alſo $\frac{1}{\nu}M = \frac{1}{\lambda}N = \frac{F\alpha T}{\nu e + f + b}$ nehmen. Man behalte wie im 337 §. $F\alpha = \frac{5}{7}$ Cub. Fuß, $T = 3600$, ſo wird $\frac{1}{\nu}M = \frac{5 \cdot 3600}{7 \cdot 28{,}6} = \frac{5 \cdot 900}{7 \cdot 7{,}15} = \frac{4500}{50{,}05}$ ſehr nahe $= 90$ Cub. Fuß, wie im 337 §., alſo leiden δ und ε keine beträchtliche Aenderung, ſo daß $\delta = 4$ Zoll $7\frac{1}{2}$ Linien, und $\varepsilon = 3\frac{1}{2}$ Zoll bleibt.

Der XXVI. Abſchnitt.

Prüfung verſchiedener zur Bewegung der Pumpenkolben vorgeſchlagenen Einrichtungen.

375 §.

Wenn die ganze Maſchiene, welche ein Pumpwerk treibt, eine ſolche Einrichtung hat, daß alles im gleichförmigen Gange bleibt, nachdem die Maſchiene einmal in den Beharrungsſtand gekommen iſt; oder wenn doch wenigſtens die Ungleichförmigkeit

keit des Ganges nicht ſonderlich beträchtlich iſt: ſo wird die bisherige Rechnung mit dem Erfolg genau genug zuſammen treffen, wenn man nur die Friction, als ein wichtiges Hinderniß der Bewegung gehörig in Betrachtung ziehet. Allein es iſt aus dem vorhergehenden bereits bekannt, daß es ſeine Schwierigkeiten habe, eine Pumpenkunſt ſo einzurichten, daß der Gang völlig gleichförmig bleibt. Man vergleiche hiemit den 312 u. f. §§. Iſt dieſe Ungleichförmigkeit beträchtlich, ſo wird die in einer gegebenen Zeit würklich gehobene Menge Waſſer noch beträchtlich geringer ſeyn, als ſie nach den bisher vorgetragenen Rechnungsregeln ſeyn ſollte. Denn die Maſchine geht alsdenn bald ſchneller, bald langſamer, als erfordert wird, damit das Bewegungsmoment der Kraft $F\alpha$ am gröſten ſey. Wenn mehr als ein paar Pumpen, oder auch mehr als ein Paar ſolche Verbindungen mehrerer Pumpen, dergleichen im 340 §. beſchrieben ſind, durch die Maſchine getrieben werden ſollen; ſo wird dieſer Ungleichförmigkeit groſſentheils dadurch abgeholfen, daß man auf jeder Seite des Rades einen Krumzapfen, oder auch wohl mehrere ſo anbringt, daß die zu dem einen Krumzapfen gehörigen Kolben ihre höchſte und niedrigſte Stelle nicht in eben den Zeitpuncten erreichen, in welchen die zu den andern Krumzapfen gehörigen Kolben an ihrer höchſten, oder niedrigſten Stelle anlangen. Man hat bisher bey den Waſſerkünſten dieſe Maxime nicht allemahl beobachtet. Wenn das Hauptrad auf jeder Seite einen Krumzapfen hat, wovon jeder ein Geſtänge treibt, ſo ſind dieſe Krumzapfen gewöhnlich einander grade gegen über geſetzt, ſo daß alle beyde zugleich in die horizon-

tale

tale und verticale Lage kommen. Man ſehe Leupolds Theatrum Mach. Hydraul. II Th. V Cap. 82 §. 39 S. nebſt der beygefügten Zeichnung auf der XX Tabelle, die eins von den Kunſträdern der berühmten Maſchine zu Marly abbildet. Bey dieſer Einrichtung iſt das Moment der Laſt, die der Krumzapfen ſchiebt, am gröſten, wenn die Zapfen vertical ſtehen, und es verſchwindet, wenn ſie in die horizontale Lage kommen. Wenn alſo r der Abſtand der Warze des Krumzapfens von der Bewegungs-Axe iſt, und R den Widerſtand bezeichnet, den jeder Krumzapfen für ſich zu überwinden hat; ſo iſt das Moment des Widerſtandes bey verticaler Stellung der Zapfen $= 2r\mathrm{R}$, bey ihrer horizontalen Stellung aber iſt es $= 0$, und das Rad hat bey dieſer Einrichtung würklich ſehr ungleiche Arbeit.

376 §.

Dieſem Fehler abzuhelfen ſchlägt Hr. **Schober** in ſeinem Verſuch einer Theorie der Ueberwucht auf der 63 S. vor, man ſolle die Krumzapfen an der Axe des Kunſtrades ſo anſetzen, daß, wenn man ſich durch die Warze eines jeden, und die Axe des Rades eine Ebene vorſtellet, **beyde Ebenen einander unter einem rechten Winkel ſchneiden.** Bey dieſer Stellung der Krumzapfen gegen einander wird der eine horizontal ſtehen, wenn der andere in die verticale Lage verfällt, ſo daß in dieſen Fällen das Moment des Widerſtandes $= r \,.\, \mathrm{R}$ iſt. Eben dies Moment iſt in allen andern Fällen zwar gröſſer, es wächſt aber nur ſo lange, bis beyde Krumzapfen gegen den Horizont unter einem halben rechten Winkel geneigt ſind, da dann das Moment des Wider-

 ſtandes

ſtandes $= R \cdot r\sqrt{2}$ iſt. In der That iſt dies eine ſehr wichtige Verbeſſerung, und vielleicht iſt Herr Schober für ſich darauf verfallen: wenigſtens erwehnt er a. a. O. deſſen nicht, daß dieſe Maxime ſonſt ſchon ſey in Anwendung gebracht worden. Es iſt aber dieſer Gedanke würklich nicht neu. Zu Nymphenburg in Bayern iſt nach dem Angeben des Herrn Grafen von Wahl, Churfürſtl. Bau-Directors, eine Waſſer-Maſchine angelegt worden, woran das Kunſtrad mit zweyen Krumzapfen verſehen iſt, die gegen einander rechtwinklicht ſtehen. Man findet davon die Beſchreibung beym Belidor in der Architect. Hydraul. III Buch IV Cap. 986. 987 §.

377 §.

Unter andern Einrichtungen, worauf man ſonſt ſtatt des Krumzapfens noch verfallen iſt, um die Pumpen-Kolben zu bewegen, verdient noch diejenige eine kurze Anzeige, wobey man ſich der ovalen Scheiben bedient. Ob man ſie gleich nicht allemahl ſtatt des Krumzapfens füglich mit Vortheil anbringen kann, ſo dient ſie doch in einigen beſondern Fällen, und man kann dabey dem zuletzt erwehnten Mangel der Maſchine, der vom ungleichförmigen Gange ſeinen Urſprung hat, ziemlich abhelfen. Dieſe Scheiben heiſſen auch Elliptiſche Scheiben, wenn ihr äuſſerer Umfang ſo gekrümmt iſt, wie die Linie, welche in der höhern Geometrie den Nahmen der Ellipſe führt. Um davon einen Begrif zu geben, ſo weit es hier genügen kann, ſtel-
67 le man ſich den ungleicharmigen Wagebalken PQ
Fig. vor, der bey O um ſeinen Mittelpunct beweglich iſt. Am äuſſern Ende P des kürzern Arms hängt die

Kol-

Kolbenſtange XY, und wenn der Kolben beym Herabſteigen das Waſſer hinauf drücken, beym Heraufſteigen aber es herauf ſaugen ſoll; ſo wird der längere Arm OQ des Wagebalkens ſo ſchwer gemacht, daß derſelbe blos durch ſeine eigene Uebermacht die Stange XY mit dem Kolben herauf ziehen kann. Unter dem äuſſern Ende Q des längern Arms wird eine horizontal liegende Welle angebracht, wovon der Kreis C einen verticalen Querſchnitt vorſtellt. Auf dieſer Welle, als ihrer Axe, ſteckt die elliptiſche Scheibe ADBE ſo, daß das äuſſere Ende Q des Wagebalkens auf ihrem Umfang liegt. Wäre dies eine kreisrunde Scheibe, ſo würde die Welle mit derſelben umlaufen können, ohne daß dadurch die Lage des Wagebalkens verändert würde. Weil aber nicht alle Puncte im Umfang der elleptiſchen Scheibe von der Bewegungs-Axe C gleichweit entfernt ſind, ſo erhellet, daß die Scheibe während ihres Umlaufs den längern Arm des Wagebalkens wechſelsweiſe hebe, und wieder ſinken laſſe. Es ſey AB die Länge, und DE die Breite der Scheibe, ſo nähert ſich ihr Umfang von A bis D dem Mittelpunct, und von D bis B entfernt ſich derſelbe wieder von C; eben ſo iſt die andere Hälfte des Umfangs beſchaffen. Es muß alſo Q am höchſten ſtehen, wenn AB (die groſſe Axe) vertical ſtehet, am niedrigſten aber, wenn AB horizontal, alſo DE (die kleine Axe) vertical iſt. Da nun die Axen bey jedem Umlauf zweimahl in dieſe Lage kommen, ſo wird Q zugleich zweimahl um eine Höhe gehoben, die $= CA - CD$ iſt, und die Höhe des Kolbenzuges iſt $= \frac{OP}{OQ} (CA - CD)$.

378 §.

Damit die Friction zwiſchen dem äuſſerſten Ende Q des Wagebalkens und dem Umfang der elliptiſchen Scheibe vermieden werde, bekömmt der Wagebalken bey Q einen Einſchnitt, und in demſelben wird eine hinlänglich ſtarke Rolle angebracht, die mit ihrem Umfang am Umfang der elliptiſchen Scheibe anliegt. Da dann der Umfang der Scheibe, ſo wie ſonſt bey Rollen, worüber Seile gehen, vertieft wird, damit die Rolle in dieſer Vertiefung laufen könne. Man kann mehr dergleichen elliptiſche Scheiben an eben der Welle anbringen, ſo daß jede für ſich eine Pumpe treibt. Sie müſſen alsdenn ſo angebracht werden, daß die Ebenen, welche man durch die Wellen-Axe und die groſſe Axe einer jeden Scheibe in Gedanken legen kann, einander unter gleichen Winkeln ſchneiden. Dies wird verurſachen, daß die Scheiben nach einander heben, welches den Gang der Maſchine ſo ziemlich gleichförmig erhält. Leupold im Theatro Machinarum Generali XII Cap. 178 §. 66 S. ſchreibt die Erfindung dieſer Einrichtung dem Ritter Morland zu, der ſie in ſeiner Abhandlung: Elevation des eaux par toute ſorte des machines, Paris 1685. angegeben hat, wovon auch in den Actis Eruditorum A. 1686. Menſ. Jun. pag. 282. Nachricht zu finden iſt. Leupolds Beſchreibung davon a. a. O. iſt nicht die deutlichſte. Er wiederholt ſie zwar im Theatro Machin. Hydraul. T. II. §. 73. auf der 34 und 35 S., aber auch die dortige Beſchreibung davon iſt nicht vollſtändiger. Weit beſſer findet man ſie in Belidors Architect. Hydraul. III Buch IV Cap. 987 u. f. §§. und nach des letztern Verfaſſers Bericht iſt eine Maſchine von die-

dieſer Einrichtung in einem Kloſter au val Saint Pierre, zwo Meilen von Vervins, im Jahr 1720 erbauet worden. Es ſcheint, daß Belidor den Elliptiſchen Scheiben vor den Krumzapſen einen Vorzug beylege: dies möchte ich eben nicht ſchlechthin behaupten, jedoch kann ich wegen der hier nothwendigen Kürze mich in keine ausführliche Unterſuchung darüber einlaſſen.

379 §.

Man hat auch die im 333 §. ſchon erwehnte Einrichtung mit halbgezähnten Rädern, die in gezähnte lothrecht ſtehende Latten greifen, woran die Kolbenſtangen befeſtiget ſind, bey Druckwerken angebracht. Wenn die Latte das Waſſer durch den Druck hebt, indem ſie von dem darin greifenden Getriebe niederwärts gedruckt wird, ſo wird noch eine eigene Einrichtung erfordert, um ſie wieder aufwärts zu ziehen, indem das Getriebe den andern Umlauf vollendet. In ſolcher Abſicht wird an ihrem oberſten Ende ein Seil befeſtiget, das man über etliche Rollen führt, und alsdann ein Gewicht daran hängt, das ſchwer genug iſt, um die Latte ſchnell genug wieder in die Höhe zu ziehen. Eine Maſchine, wo beydes eine Saug- und eine Druckpumpe jede für ſich ſo getrieben werden ſoll, hat Hr. Morel angegeben, und man findet die Beſchreibung und Zeichnung davon in Belidors Architect. Hydraul. III Buch IV Cap. 985 §. Was davon zu halten ſey, wird ſich aus demjenigen beurtheilen laſſen, was davon im 333 §. ſchon iſt beygebracht worden. Bey Druckwerken, die das Waſſer hoch heben ſollen, würde ſie ſchlechte Dienſte thun.

380 §.

Folgende Art, den Kolben die nöthige Bewegung mitzutheilen, iſt ähnlichen Mängeln unterworfen. Die Welle des Hauptrades der Maſchine wird mit einigen ſo genannten Daumen, oder kurzen Armen verſehen, die ſich nach einander an dagegen liegende Hebel anſtemmen, und vermittelſt derſelben den Kolben die nöthige Bewegung mittheilen. Dieſe Hebel ſind von der zweyten Art (17 §. Stat.), und an demjenigen Ende, welcher den Daumen gegen über ſteht, um einen Polzen beweglich. Wenn an einem ſolchen Hebel die Kolbenſtange ſelbſt hängt, damit ſie von dem Daumen mittelſt des Hebels nieder gedruckt werde; ſo muß man auf eine beſondere Einrichtung bedacht ſeyn, die Kolbenſtange gleich darauf gehörig wieder hinauf zu ziehen, etwa ſo wie dies bey der im vor. §. beſchriebenen Einrichtung bewerkſtelliget ward. Noch beſſer aber iſt es, wenn man zwey neben einander liegende Hebel ſo mit einander verbindet, daß der eine zugleich gehoben werde, indem der andre niedergedruckt wird. Dies kann man vermittelſt eines gehörig über beyde angebrachten gleicharmigen Wagebalkens zuwege bringen, wenn man die äuſſern Enden der erſten beiden Hebel mit den äuſſern Enden des erwehnten Wagebalkens vermittelſt einer Kette verbindet. Zu Sources, einem Dorf im Elſaß, auf dem Wege von Straßburg nach Landau, ſtehet eine Maſchine, welche aus einem tiefen Brunnen das zum Salz machen taugliche Waſſer hebt, und welche, was die Hauptſache betrift, auf die eben beſchriebene Art eingerichtet iſt. Man ſ. Belidor a. a. O. 982. 984 §. Herr G. C. Silberſchlag, deſſen Kloſter-

bergi-

bergiſche Verſuche ich bey Gelegenheit der Druck-
werke im 352 §. ſchon angeführet habe, giebt auf
der 180 u. f. S. eine Einrichtung für die Druckwer-
ke an, die mit der eben beſchriebenen im Grunde ei-
nerley, alſo nicht neu iſt; ob ſie gleich Hr. Silber-
ſchlag für neu zu halten ſcheinet. Nur in dieſem
einzigen Punct unterſcheidet ſie ſich, daß Hr. Sil-
berſchlag am äuſſern Ende der Daumen, da wo
ſie ſich gegen die Hebel anſtemmen, Rollen anbringt,
um die Friction daſelbſt zu vermeiden. So ſoll als-
denn dieſe Einrichtung groſſe Vorzüge ſelbſt vor dem
Krumzapfen haben, und die Bewegung ſoll ganz
ſtill und ſanft von ſtatten gehen. Allein ich kann
mich davon noch nicht überzeugen, daß dieſe Einrich-
tung im groſſen ſonderlich vortheilhaft ſeyn werde.
Jeder Hebel iſt in dem Augenblick in völliger Ruhe,
wenn der zugehörige Daumen ihn zu berühren an-
fängt: es muß alſo ein groſſer Theil der Kraft dar-
auf verwandt werden, den Hebel erſtlich in Bewe-
gung zu ſetzen, und dies wird nicht allein die Gleich-
förmigkeit der Bewegung ſtören, ſondern auch einen
ſtarken Druck aller Theile der Maſchine gegen ein-
ander veranlaſſen. Hiezu kommt noch dies, daß
das Moment der Kraft nicht immer gleich groß
bleibt, weil der Punct des Hebels, welchen der Dau-
men angreift, beym Umlaufen der Welle von der
Unterlage des Hebels nach und nach weiter wegrückt,
wie **Belidor** a. a. O. 983 §. ſchon erinnert hat.

Der XXVII. Abſchnitt.

Die Eigenſchaften guter Kolben und Ventile.

381 §.

Wenn gleich die Abmeſſungen einer Pumpenkunſt nach den oben vorgetragenen theoretiſchen Regeln richtig berechnet, auch übrigens die ganze Einrichtung der Maſchine ſo getroffen wäre, daß ihre Bewegung ſich ziemlich gleichförmig erhalten könnte; ſo würde man dennoch ſeines Zwecks durch eine mangelhafte Einrichtung der Kolben und Ventile ſehr verfehlen können. Eine gute und zweckdienliche Einrichtung dieſer Stücke trägt zur Vollkommenheit einer Pumpenkunſt ſehr vieles bey. Der Kolben muß allenthalben an die innere Fläche des Stiefels recht genau anſchlieſſen, damit zwiſchen ihm und dem Stiefel weder Luft noch Waſſer durchdringen könne: aber bey dem allen muß er ſich doch an dem Stiefel nicht zu ſtark anklemmen, damit die daher ſonſt entſpringende ſtarke Friction vermieden werde. Die Ventile müſſen ſich leicht öfnen und ſchlieſſen, damit ſie der Bewegung des Waſſers kein beträchtliches Hinderniß entgegen ſetzen: ſie müſſen auch nicht enger ſeyn, als die Communications-Röhren, aus welchen ſie das Waſſer ableiten, oder denen ſie es in andern Fällen zuführen ſollen.

382 §.

Es iſt ſo leicht nicht einen Kolben ſo einzurichten, daß er die eben erwehnten Eigenſchaften an ſich habe, und

und dabey doch dauerhaft genug ſey. Die gewöhnlichſte Art, den Kolben für ein Druckwerk einzurichten iſt folgende. Der eiſerne Polzen AB iſt oben bey A mit einem Ringe verſehen, um die Pumpenſtange darin zu hängen, unten bey B aber mit einer Schraube und dazu gehörigen Mutter. An dieſem Polzen ſtecken zwey metallene Scheiben im Durchmeſſer faſt ſo groß, als der Durchmeſſer der Stiefel-Mündung iſt, jedoch ſo, daß ſie noch ganz ohne Zwang im Stiefel auf und nieder gehen können. Zwiſchen dieſe metallene Scheiben werden andre Scheiben von gutem Pfundleder gelegt, im Durchmeſſer etwas gröſſer als die metallenen: dieſe werden vermittelſt der bey B befindlichen Schraube feſt zuſammen gezogen, damit alsdenn der auf ſolche Art zuwege gebrachte lederne Cylinder an der innern Fläche des Stiefels allenthalben genau anſchlieſſe. Ein ſolcher Kolben thut der einen Abſicht, daß er kein Waſſer durchlaſſen ſoll, ein ziemliches Genüge, doch verurſachet er ſtarke Friction, und arbeitet ſich bald ab, ſo daß das Leder zu klein wird, und Waſſer durchläſt. Bey Druckwerken die nicht beſtändig zu arbeiten haben, und nur ſelten mit Waſſer gefüllt ſind, trocknet das Leder ſehr ein, und ob es gleich im Waſſer wieder aufquillet, ſo gehört doch eine Zeit von etlichen Stunden dazu, ſo daß man das Werk nicht gleich, ohne das Leder vorher erweicht zu haben, brauchen kann. Ich habe Kolben geſehen, die auf die umgekehrte Art eingerichtet ſind. Man hat durch einen ſoliden metallenen, oder auch hölzernen mit ſtarken Metall umgoſſenen Cylinder den Polzen AB geſteckt, und ſtatt der metallenen Scheiben CD und EF alsdenn lederne genommen.

68 Fig.

Der metallene Cylinder muß alsdann ein wenig kleiner als die Stiefelmündung ſeyn, aber die ledernen Scheiben müſſen rund um ſoviel hervorragen, daß ſie im Stiefel allenthalben genau anſchlieſſen. Es iſt alsdenn oben und unten noch eine dünne metallene Platte nöthig, um zwiſchen denſelben das Leder mittelſt der Schraube B feſt zuſammen zu ziehen. Dieſer Kolben verurſacht wohl etwas weniger Friction als der vorige, auch wird nicht ſoviel Zeit erfordert, das wenige Leder zu erweichen: allein er iſt auch deſto weniger dauerhaft, und legt ſich leicht auf die Seite, da dann das Metall des Kolbens ſich am Stiefel reibt, und beydes Schaden leidet.

383 §.

69 Fig. Dieſen Mängeln wird durch folgende Einrichtung ziemlich abgeholfen. Es iſt ABCD ein rundes Holz, ſo oben und unten als eine halbe Kugel ausgedrehet, und mit vielen Löchern daſelbſt durchbort iſt. In der Mitte HIKL wird es etwas dünner gedrehet, als oben und unten bey FG. Um dieſes Holz wird ein Stück Leder gewunden, ſo daß es auf beyden Seiten wie bey EF etwa einen halben Zoll länger, als das Holz iſt. Eben daſelbſt wird es etwas dünner geſchnitten, und in der Mitte zwiſchen HI, KL mit einer ſtarken Schnur feſt umwunden. Uebrigens wird auch wie bey dem vorigen durch die Mitte des Holzes ein eiſerner Polzen geſtoſſen, der oben mit ſeinem Ringe und Anſatz, unten aber mit der Schraube und Mutter gehörig verſehen iſt. Dieſe Einrichtung des Kolbens empfielet ſich wegen folgender Vortheile. Das Leder giebt ſich bey E und F leicht zuſammen, und verurſacht wenig Friction.

Bey

Bey Niederdrückung des Kolbens begiebt ſich das Waſſer zwiſchen F und G und preſt das Leder an den Cylinder; ſo daß kein Waſſer dazwiſchen durch kann, auch wenn die innere Fläche des Stiefels nicht vollkommen cylindriſch iſt. Ein gleiches thut oben die Luft, wenn der Kolben herauf gezogen wird. Der Kolben wird nicht zu klein, wenn ſich gleich das Leder abſchleiſet, und er dauret ſo lange, bis ſich das Leder ganz weggearbeitet hat, welches doch wegen der wenigen Gewalt, die es auszuſtehen hat, ziemlich lange dauret. **Leupold** der dieſen Kolben im Theatr. Machin. Hydraul. I Th. X Cap. 188 §. beſchreibt, giebt eben daſelbſt 190 §. eine ſolche Einrichtung deſſelben an, wobey eine metallene Feder ſtatt des Waſſers ſelbſt das Leder bey F und G gegen den Stiefel preſt.

384 §.

Die Kolben, welche bey Saugwerken, und ſolchen Druckwerken, dergleichen die hohen Sätze ſind, gebraucht werden ſollen, müſſen wie aus dem vorhergehenden ſchon bekannt iſt, mit Ventilen oder Klappen verſehen, und eben deswegen mit einer zulänglich weiten Oefnung verſehen ſeyn. Sie heiſſen daher gewöhnlich **hohle** Kolben, und die Materie des Holzes iſt deswegen hiezu eben nicht vortheilhaft, weil man befürchten muß, daß man ſie zu ſehr ſchwäche, wenn man ſie in der gehörigen Weite ausbohren will. Es iſt aber dies eine Hauptregel, daß man die Oefnung im Kolben weit genug mache, damit das Waſſer, welches während der Zeit da der Kolben niederſteigt, durch dieſelbe über den Kolben hinauf ſteigen ſoll, ohne allen Zwang durchdringen kön-

könne. Sonſt würde ein beträchtlicher Theil der Kraft den Kolben nieder zu drücken erfordert werden, der bey Berechnung des Effects der Maſchine mit in Anſchlag kommen müſte. Man verfertiget indeſſen dergleichen Kolben bey den gemeinen Saugpumpen aus Hagebüchen- oder Erlen-Holz, welches dem Aufreiſſen nicht ſo ſehr unterworfen iſt, als die übrigen Holzarten. Der Kolben ſelbſt hat ungefähr die Geſtalt eines umgekehrten abgekürzten Kegels, wie
74 Fig. ABCD, welche zu oberſt mit einem Stück Leder umgeben iſt. Dieſes Stück Leder wird mit einer oder zwo Reihen Nägel angenagelt, ſo nahe an einander, daß die Nägelköpfe einander faſt berühren. In der Mitte deſſelben iſt die Ventil-Oefnung befindlich, worauf die Klappe liegt. Dieſe beſtehet aus einem Stück Leder, welches oben an dem Kolben ins Holz befeſtiget wird, und deswegen einen Schweif bey E bekommt, der zugleich die Stelle eines Gewindes vertritt. Es muß dieſe Klappe ſo groß ſeyn, daß wenn ſie auf dem Loch aufliegent, ſelbige rund herum über dem Umfang des Lochs einen halben Zoll hervor rage. Wegen des gewiſſern Schluſſes bedeckt man dies Leder auch noch mit einer bleyernen Platte. Der Bügel AFGB wird mit dem Kolben ſelbſt aus einem Stück Holz geſchnitten, und er muß ſo weit ſeyn, daß die Klappe ganz frey darin ſpielen kann.

385 §.

Wenn ein ſolcher hohler Kolben eine hohe Waſſerſäule zu tragen, und viele Gewalt auszuſtehen hat; ſo wird er am beſten aus Metall gemacht. Belidor in der Architectura Hydraul. III Buch III Cap.

955. 956 §. beſchreibt einen ſolchen Kolben, ſo wie er an den Pumpen der Waſſer-Maſchine zu Trêne eingerichtet und ſehr gut befunden iſt. Er beſtehet aus einer von Kupfer verfertigten Hülſe, welche die Geſtalt eines abgekürzten umgekehrten Kegels hat, und auswendig mit Leder umwunden iſt, das durch einen zu unterſt umgelegten Ring feſtgehalten wird. Die 75 Figur ſtellt den Grundriß der obern Fläche 75
dieſes Kolbens vor, woſelbſt der Ring ABCD der Fig.
Querſchnitt der kupfernen Hülſe, und BD ein Steg iſt, der mit der Hülſe in einem Stück verfertiget und im Mittel mit einen länglicht viereckten Zapfenloch E verſehen iſt. Dieſer Kolben wird mit einer ledernen Scheibe bedeckt, welche die Oefnungen F und G zu beyden Seiten des Stegs ſchlieſſet. Man befeſtiget dieſe lederne Scheibe auf dem Steg vermittelſt eines eiſernen Kreuzes, indem man den Zapfen durch das Loch E ſteckt, und das Kreuz in die 76
Lage bringt, daß der Theil HI deſſelben der Länge Fig.
nach an dem Steg DB anſchlieſſet, da dann das Kreuz unten bey K vermittelſt eines Schließeiſens mit dem untern Steg des Kolbens verbunden wird. Jede Hälfte der ledernen Scheibe giebt alſo zu beyden Seiten des Stegs BD eine Klappe ab, welche die Oefnungen F und G ſchlieſſet, die wie Kreisabſchnitte geſtaltet ſind. Dieſe ledernen Klappen aber ſind um des beſſern Schluſſes willen zu beyden Seiten, nemlich auf der obern und untern Seite, wieder mit kupfernen Platten bedeckt, die ebenfalls wie Kreisabſchnitte geſtaltet ſind. An dem obern Theil G des Kreuzes wird die Kolbenſtange befeſtiget, und es iſt hier kein Bügel nöthig. Belidor rühmt mit Recht die guten Eigenſchaften dieſes Kolbens,

und

und man findet bey ihm a. a. O. eine ausführliche Beſchreibung aller dazu gehörigen Theile.

386 §.

Wenn die Höhe des Kolbenzuges nicht über einen halben Fuß beträgt, und die übrigen Umſtände es verſtatten, daß die Kolbenſtangen durch die Aufſatz-Röhre durchgeführet werden kann, ſo läſt ſich der Kolben ſo einrichten, daß faſt alle Friction dabey vermieden wird, und nach Hr. Belidors Bericht iſt dies eine Erfindung der Herren *Goſſet* und *Deüille*. Der Kolben beſtehet alsdenn aus einer Scheibe von ſtarkem Holz, die etwa nur einen Zoll dick, und deren Durchmeſſer etwas kleiner, als der Durchmeſſer des Stiefels iſt. Auf dieſer Scheibe wird ein kreisrundes Stück Leder gelegt, welches im Durchmeſſer gröſſer als der Kolben iſt, ſo daß der Rand deſſelben am Umfang des Kolbens auf 7 Zoll hervorſpringt. Dieſer Kolben erfordert alsdenn folgende Einrichtung des Stiefels. Derſelbe wird aus zwey Stücken zuſammengeſetzt, und der Umfang der zum Kolben gehörigen ledernen Scheibe zwiſchen beyden eingeklemmet, und zwar ſo, daß der eingeklemmte Rand etwa nur einen Zoll in der Breite beträgt. Wenn alsdenn die hölzerne Scheibe ſo weit herab gerückt wird, als es das Leder verſtattet, ſo hat der Kolben mit dem ihn umgebenden Leder die Geſtalt eines Beutels; und weil das Leder leicht nachgiebt, ſo läſt ſich die hölzerne Scheibe ohne merkliche Friction auf und nieder ziehen. Mann kann ſie in der Mitte mit einem zulänglich weiten Loch nebſt einer zugehörigen Klappe und Bügel verſehen, ſo wird dieſer Kolben bey einem vereinbarten Saug-

und

und Druckwerk, dergleichen die hohen Sätze ſind, brauchbar. Man hat ihn mit dem beſten Erfolg bey einem Pumpwerk in dem Königlichen Garten zu Paris gebraucht, welche das Waſſer hebt, um damit die Pflanzen zu wäſſern. M. ſ. Belidor a. a. O. 960 §.

387 §.

Die bisher bey Pumpwerken üblich geweſenen Ventile laſſen ſich füglich in vier Claſſen bringen, und durch die Namen der Muſchel-Ventile, Kegel-Ventile, Kugel-Ventile und Klappen-Ventile, die von ihrer verſchiedenen Geſtalt hergenommen ſind, unterſcheiden. Die 63 Figur ſtellt ein Muſchel-Ventil im Durchſchnitt vor, welches gewöhnlich aus Metall gemacht wird. Um davon einen richtigen Begriff zu bekommen, muß man ſich erſtlich eine Hülſe vorſtellen, etwa wie die zu dem Kolben-Ventil gehörige war, die im 385 § beſchrieben iſt. Mitten durch geht wie dort ebenfalls ein Steg, wie es die 75 Fig. nach dem Grundriß vorſtellt. Dieſe Hülſe heiſt hier die Ventil-Muſchel, und in der 63 Fig. ſtellt ABCDEFG ihren verticalen Durchſchnitt nach der Mittellinie des Stegs genommen, vor, ſo daß MN der Durchſchnitt des Stegs iſt. Dieſe Hülſe oder Muſchel iſt mit einem Ringe umgeben, ſo wie es bey A und G im Durchſchnitt vorſtellig gemacht iſt, um dieſelbe vermittelſt deſſelben zwiſchen zween Communications-Röhren durch Schrauben zu befeſtigen. Zwiſchen dieſem Ringe und den ſo genannten Lappen der Communications-Röhren werden lederne Ringe gelegt, den Schluß deſto beſſer zu befördern. Die innere Fläche

der

der Muſchel BCEF iſt coniſch, und unten enger als oben, auf ſelbige liegt der Deckel HI, der ebenfalls coniſch iſt, und in jene Oefnung paſſen muß. Unten am Deckel befindet ſich an ſeiner Mitte der Stift KL, welcher durch eine in der Mitte des Stegs befindliche Oefnung geſteckt wird, und nur ſo dick ſeyn muß, daß er darin frey auf und niederſpielen kann. Der untere Kopf bey L hindert aber, daß der Stift, wenn alles in gehörigen Stand geſetzt iſt, das Loch bey D nicht ganz verlaſſen kann. Wenn das Waſſer von unten hinauf dringt, ſo hebt es den Deckel in die Höhe, und tritt auf ſolche Art aus der untern Röhre in die obere, wenn aber der Trieb des Waſſers aufhört, ſo fällt der Deckel zurück, und verſchlieſt dem Waſſer den Rückweg.

388 §.

Dieſe Art Ventile ſind zwar häufig gebraucht worden, aber Belidor a. a. O. 961 §. tadelt ſie mit Recht, weil ſie das Waſſer keinesweges frey durchlaſſen, welches eine nothwendige Eigenſchaft eines guten Ventils iſt. Weil ſich der Deckel nur um eine gewiſſe Höhe heben kann, ſo entſteht eigentlich nur eine ringförmige Oefnung, die den Deckel umgiebt, die in Vergleichung mit der Weite der Communications-Röhren einen geringen Flächen-Inhalt hat. Ueberdem muß das Waſſer nach den ſchrägen Richtungen CB, EF durchſtrömen, ſo daß der Trieb gegen die Seitenwände der obern Communications-Röhre gerichtet iſt, welches aufs möglichſte vermieden werden muß. Wenn daher dies Ventil bey Druckwerken, dergleichen die hohen Sätze ſind, an der unterſten Stelle der Auffatz-Röhren gebraucht

braucht wird, ſo wird ein groſſer Theil der ange⸗ brachten Kraft allein dazu verwandt, das Waſſer durch das Ventil zu treiben, und der Effect wird un⸗ gemein dadurch geſchwächt. Die Kegel⸗Ventile ſind in der That nichts beſſer, weil ſie mit den Mu⸗ ſchel⸗Ventilen in den meiſten Stücken überein kom⸗ men. Die dazu gehörige Hülſe iſt völlig ſo geſtaltet, nur bleibt der Steg MN weg. Denn ſtatt des Dek⸗ kels wird ein ſolider abgekürzter Kegel gebraucht, deſſen obere Grundfläche gröſſer, als die obere Oef⸗ nung der Muſchel, die untere Grundfläche aber klei⸗ ner iſt, und der, wenn er in der Oefnung ſteckt, al⸗ lenthalben anſchlieſſen muß. Er iſt unten mit einem kürzern Stift, als der Deckel des Muſchel⸗Ventils, verſehen, und unten an demſelben befindet ſich ein Querſtift, der länger iſt, als der Durchmeſſer der untern Oefnung der Hülſe; und dieſer verhindert, daß der Kegel nicht über eine beſtimmte Höhe von dem Waſſer gehoben werden kann, damit er hier⸗ nächſt gehörig wieder zurück falle, und dem Waſſer den Rückweg verſchlieſſe.

389 §.

Statt des kegelförmigen Deckels hat man auch kugelförmige gebraucht, welche die Geſtalt einer Halbkugel haben, deren Rundung in die Hülſe fällt, und die Oefnung verſchlieſſet. Eine ſolche Halbku⸗ gel muß alsdenn unten ebenfalls mit einem Stift und Querangel verſehen ſeyn, damit ſie nur auf ei⸗ ne beſtimmte Höhe gehoben werden könne. Aber dieſe Einrichtung hat mit dem Kegel⸗ und Muſchel⸗ Ventil einerley Mängel, und deswegen ſind alle die⸗ ſe Arten gar nicht anzurathen. Um dem Waſſer ei⸗

nen freyern Durchgang zu verſchaffen, hat man ſtatt der Halbkugel mit dem Stift, auch eine ganze Kugel ohne Stift gebraucht. Wenn dieſe ſpecifiſch ſchwerer, als das Waſſer iſt, ſo mag ſie das Waſſer ſo hoch heben, als ſie will, ſie wird, ſobald der Trieb aufhört, wegen ihres Gewichts zurück fallen, und dem Waſſer den Rückweg verſchlieſſen. Dieſe Einrichtung heiſt alsdenn ein **Kugel-Ventil**. Obgleich dieſe Ventile beſſer als die vorigen zu ſeyn ſcheinen, auch übrigens ihre groſſe Bequemlichkeit haben würden, wenn alles gehörig darnach eingerichtet wäre, ſo ſind doch auch keine geringe Schwierigkeiten damit verbunden, einmahl der Kugel die vollkommene kugelrunde Geſtalt zu geben, die hier erfordert wird, und fürs zweyte ihr Gewicht nach dem Trieb des Waſſers gehörig zu proportioniren. Iſt ſie zu ſchwer, ſo widerſtehet ſie der Bewegung des Waſſers zu ſehr, eben ſo, wie die vorigen Arten, und wenn ſie zu leicht iſt, ſo fällt ſie nicht ſchnell genug zurück. Dies letztere verurſacht, daß das Waſſer zurück fällt, und wenn man ſie beym Saugwerk oben an der Saugröhre brauchte, ſo könnte dies den ſonderbaren Erfolg haben, daß immer einerley Waſſer in den Stiefel hinauf geſogen würde, und wieder zurück fiele, ohne daß das geringſte zum Gußruhr hinaus lieſe.

390 §.

Die beſte Art der Ventile ſind unſtreitig die Klappen-Ventile, welche daher den Namen führen, weil eine würkliche Klappe zwiſchen den Communications-
64 Röhren angebracht wird, wie es die 64 Figur vor-
Fig. ſtellt. Die Klappe beſtehet aus einem kreisförmi-

gen

gen Stück Leder CD, welches mit einem Schweif DG verſehen iſt, der zwiſchen den Lappen der Communications-Röhren feſt geſchroben wird, und die Stelle eines Gewindes vertritt. Dieſe lederne Scheibe wird zwiſchen zwey runden metallenen Platten oder Scheiben, AB und EF, vermittelſt der Schraube HI eingeſchloſſen. Die erſte dieſer metallenen Scheiben AB iſt im Durchmeſſer 2 bis 3 Zoll gröſſer, als der Durchmeſſer der Oefnung, welche die Klappe ſchlieſſen ſoll: die andre EF aber iſt im Durchmeſſer etwas kleiner, damit ſie in dieſe Oefnung einpaſſe. Das einzige, was an dieſer Art der Klappen-Ventile, wenn ſie aus Leder gemacht werden, auszuſetzen iſt, beſtehet darin, daß ſie beſtändigen Ausbeſſerungen unterworfen ſind. Der lederne Schweif, welcher die Stelle des Gewindes vertritt, wird bald gar zu willig, und behält nicht Steife genug, die Klappe zu zwingen, daß ſie beſtändig mit eben derſelben graden Neigung niederfalle: die Klappe lenkt ſich endlich ein wenig mehr auf die eine oder die andre Seite, und ſchlieſt alsdenn nicht mehr ſo feſt an. Um dieſen Unbequemlichkeiten abzuhelfen, kann man in Fällen, wo die Communications-Röhren auf 8 bis 10 Zoll weit ſind, füglich eine doppelte Klappe machen, ſo wie an dem Kolben-Ventil des 385 §. Man würde alsdenn die Hülſe des Ventils mit einer eben ſo wie a. a. O. zubereiteten ledernen Scheibe, die auf jeder Seite des Stegs eine Klappe abgäbe, bedecken, und über derſelben auf den Steg eine Schiene von Kupfer legen können, die mit ihm gleiche Länge hätte, und mit demſelben durch Schrauben verbunden werden müſte. Belidor a. a. O. 970 §. zeigt, wie man bey-

de Klappen füglich ganz von Kupfer machen, und ſie durch ein würkliches Charnier mit einander verbinden könnte, welches ohnſtreitig weit dauerhafter wäre.

391 §.

Im Jahr 1737 ward dem Hrn. Belidor aufgetragen, die Fehler einer Waſſer-Maſchiene zu unterſuchen, welche an der L. Frauenbrücke zu Paris erbauet ſtehet, und Verbeſſerungs-Vorſchläge zu thun. Dies hat ihn veranlaſſet, manche wichtige Verbeſſerungen der Pumpwerke überhaupt anzugeben, die man in der Archit. Hydraul. III Buch V Cap. 1132 u. f. §. antrift. Vorzüglich ſchön iſt die von ihm daſelbſt angegebene Art eines Ventils, welches ſich auch in einem hohlen Saug-Kolben anbringen läſt. Es gehöret in die Claſſe der Klappen-Ventile, allein die Klappe iſt ganz anders, als die ſonſt gewöhnlichen eingerichtet. Sie beſtehet aus einer kreisrunden metallenen Scheibe, die auf einer Welle mit kleinen Lagerzapfen liegt, und um dieſelbe beweglich iſt. Die Bewegungs-Axe geht aber nicht durch der Scheibe Mittelpunct, ſondern iſt um den 12ten Theil des Durchmeſſers davon entfernt, ſo daß ſie die Scheibe in zwey Abſchnitte theilt, wovon des einen Höhe $\frac{7}{12}$, des andern Höhe $\frac{5}{12}$ des Durchmeſſers beträgt. Wenn das Waſſer dagegen drückt, ſo leidet der gröſſere Abſchnitt wegen der gröſſern Fläche einen ſtärkern Druck, als der kleinere, deswegen öfnet ſich die Klappe, und ſtellt ſich im Mittel der Mündung der zugehörigen Hülſe, oder des ſo genannten Mantels, in eine auf der Fläche dieſer Mündung ſenkrechte Lage, und das Waſſer gehet

het ganz frey und ungezwungen zu beyden Seiten vorbey. In demſelben Augenblick aber, da der Trieb des Waſſers aufhört, fällt die Klappe wegen ihres eigenen Gewichts wieder zu, ohne ſonſt dem geringſten Widerſtand ausgeſetzt zu ſeyn, als nur demjenigen, welcher von der Friction ihrer Lagerzapfen herrührt, der nichts zu bedeuten hat, wenn die Zapfen und ihre Lager wohl polirt ſind. Die Klappe dient vornemlich in den Fällen, wenn das Waſſer in verticalen Röhren grade aufwärts getrieben wird, da dann die Fläche der Oefnung horizontal iſt. Damit die Klappe in der verticalen Stellung, worin ſie durch den Trieb des Waſſers erhalten wird, ſchlechthin nicht ſtehen bleiben könne, ſondern in demſelben Augenblick, da der Trieb des Waſſers aufhört, zufalle, wird ihr eine ſolche Geſtalt gegeben, daß ihr Schwerpunct, nicht in der verticalen Fläche liegt, die bey verticaler Stellung der Klappe durch ihre Bewegungs-Axe gehet: ihr Schwerpunct iſt alsdenn um den 12ten Theil des Durchmeſſers von dieſer Verticalfläche ſeitwärts entfernt. Damitt auch die Oefnung dieſes Ventils völlig ſo groß, als die Mündung des Stiefels ſey, wird die Mündung des Mantels ein wenig gröſſer gemacht, als die Mündung des Stiefels, um denjenigen Raum zu erſetzen, den die Klappe einnimmt. In eben der Abſicht wird die oberſte Mündung des Stiefels ſelbſt ein wenig weiter gemacht, als ſeine übrigen Querſchnitte; auch giebt man der Aufſatz-Röhre da, wo ſie mit dem Stiefel verbunden wird, eine zu dieſer Abſicht dienliche Geſtalt eines ſo genannten Huts, der etwas ausgebauchet oder mehr erweitert iſt. Belidor hat alles auf der zum V

Cap. des III Buchs gehörigen 4ten, 5ten, und 6ten Kupfertafel in ſehr deutlichen und ſaubern Zeichnungen vorſtellig gemacht, woſelbſt man auch Zeichnungen von den bey eben dieſer Gelegenheit von ihm angegebenen Druck- und Saug-Kolben antrift.

Der XXVIII. Abſchnitt.

Beſondere Anwendung der bisherigen Lehren auf Pumpenkünſte, die durch Menſchen, Pferde, oder durchs Waſſer getrieben werden.

392 §.

Es ſoll eine Pumpenkunſt durch eine gegebene Anzahl Menſchen getrieben werden: man ſucht die Abmeſſungen aller Theile der Kunſt, ſo wie ſie bey einer vortheilhaften Einrichtung erfordert werden.

Aufl. Wenn die im XXIII und den folgenden Abſchnitten gebrauchten Buchſtaben ihre dortige Bedeutung behalten; ſo kann man hier aus dem 317 §. $F = \frac{3}{8}m$ Cub. Fuß, $\alpha = 2$ Fuß, und $F\alpha = \frac{3}{4}m$ C. F. ſetzen. Für eine Stunde iſt alsdenn die Grenze der Waſſermenge $= \frac{3600\,(F-\varphi)\,\alpha}{e+f}$. Man ſetze, das Waſſer ſoll 120 Fuß hoch gehoben werden, und nehme $e = 20$ Fuß, $f = 100$ Fuß, ſo wird $M = 30\,(F-\varphi)\,\alpha$. Iſt nun φ nicht ſonderlich groß, ſo kann man wohl $F - \varphi = \frac{3}{8}m$ C. F. ſchätzen, zumahl

da

da die Kraft eines Menſchen allenfalls etwas ſtärker geſchätzt werden kann, als im 317 §. (Man vergleiche den 327 §.) Dafern alſo 4 Menſchen gebraucht werden ſollen, ſo wird $m = 4$, $\alpha = 2$, folglich $M = 30 \cdot 3 = 90$ Cub. Fuß. Wenn nun die Kunſt vermittelſt einer Kurbel, welche die Menſchen drehen, bewegt wird, ſo ſey r ihr Halbmeſſer, oder der ſo genannte Bug, und man erhält für die Umlaufszeit der Kurbel $\vartheta = \frac{2\pi r}{\alpha} = \pi r$, da dann die Zeit eines Kolbenſpiels $t = \frac{\vartheta}{\mu}$ iſt. Ferner hat man (360 §.) $\lambda = 1 + \frac{1}{\omega}$, und $\omega b = \frac{fgcctt}{4aal}$. Man nehme $r = 1$ Fuß, und überdem auch $\mu = 1$ an, ſo hat man $\vartheta = \pi = t$. Man nehme ferner $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ an; ſo hat man $\omega b = \frac{1}{9}\pi^2 g \cdot \frac{f}{l}$. Ueberdem iſt $f = 100$, und wenn man

I) annimmt, daß die Steigröhre grade und vertical ſey, ſo wird $f = l$, alſo $\omega b = \frac{1}{9}\pi^2 g = \frac{1}{9} \cdot \frac{355^2}{113^2} \cdot 15{,}1 = 16$. Man nehme demnach $b = \frac{3}{4}$ Fuß $= 9$ Zoll, ſo wird $\omega = 21$, $\lambda = \frac{22}{21}$, und die würkliche Waſſermenge $\frac{1}{\lambda} M = \frac{21}{22} 90$ C. F. $=$ 86 Cub. Fuß. Dies giebt $naa = \frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi\lambda b T}$ (360 §.) $= \frac{86}{\frac{3}{4} \cdot 1800} = 0{,}0637$ Qu. F. Braucht

 man

man alſo nur 1 Paar Pumpen, ſo wird $a = 0{,}25$ Fuß $= 3$ Zoll, und $c = 2$ Zoll. Mehr als ein Paar Pumpen wird man hier nicht wählen, weil die Stiefel ſehr eng ausfallen würden. Den Durchmeſſer der Saugröhren giebt die Gleichung $\varepsilon = \frac{\psi a \sqrt{2l}}{t\sqrt{g}}$ (365 §.) da dann $\psi = A\int v \frac{b\omega}{e}$ iſt. Es wird aber $\frac{b\omega}{e} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0{,}8$, und dieſer Querſinus gehört zum Bogen von $78^\circ\ 28'$, ſo daß $\psi = 1{,}3695$ wird. Ueberdem bedeutet hier l die Länge der Saugröhre. Dieſe ſey $24\frac{1}{2}$ Fuß lang, ſo iſt $\varepsilon = \frac{1{,}3695 \cdot 7}{\pi \cdot 3{,}89} \cdot a = 0{,}784 \cdot a = 2$ Zoll $4\frac{1}{2}$ Linien.

Man nehme nun

II) an, es ſey $l = 8f$, ſo wird $\omega b = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} \pi^2 g = 2$, wenn man die vorhin angenommenen Werthe von $\frac{c}{a}$ und t behält. Weil aber dieſe Zahl ſehr klein iſt, ſo nehme man $\mu = \frac{1}{3}$, alſo $t = 3\vartheta = 3\pi$; ſo wird $\omega b = \frac{g\pi^2}{8} = 18$, wenn $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ bleibt. Behält man auch $b = \frac{3}{4}$, ſo wird $\omega = 24$, und $\lambda = \frac{25}{24}$, alſo die würkliche Waſſermenge $= \frac{24}{25} \cdot 90$ Cub. F. $= 86\frac{2}{5}$ Cub. Fuß beynahe eben ſo groß, als vorhin. Ueberdem wird $naa = \frac{86{,}4 \cdot 3}{\frac{3}{4} \cdot 1800} = \frac{345{,}6}{1800} = 0{,}192$ Qu. Fuß alſo $a = 0{,}438$ Fuß $= 5\frac{1}{4}$ Zoll, wenn $n = 1$ iſt, und $c = 3\frac{1}{2}$ Zoll. Ferner wird

$b\omega$

$\frac{b\omega}{e} = \frac{18}{20} = 0,9$ und dieſer Querſinus gehört zum Bogen von 84° 15′; folglich iſt $\psi = \frac{84,25}{180} \cdot \pi = \frac{16,85}{36} \cdot \pi$. Es war aber $t = 3\pi$, alſo wird $\varepsilon = \frac{\psi a \sqrt{2l}}{t \sqrt{g}} = \frac{16,85 \cdot 7}{36 \cdot 3 \cdot 3,89} \cdot a$, wenn wie vorhin $l = 24\frac{1}{2}$ Fuß iſt. Dies giebt $\varepsilon = 0,123$ Fuß = $1\frac{1}{2}$ Zoll.

Man könnte demnach in dem erſten der beyden betrachteten Fälle an der Axe der Hauptkurbel, welche die vier Menſchen drehen, auf jeder Seite einen Krumzapfen anbringen, woran eine Kolbenſtange hienge, und jeder Krumzapfen müſte $4\frac{1}{2}$ Zoll Bug haben, vom Mittelpunct der Bewegung bis an die Mitte der Warze gerechnet. In dem zweyten Fall, wo $l = 8$ *f.* iſt, könnte man die Einrichtung ohngefehr ſo machen, wie bey der im 331 §. beſchriebenen Maſchiene. Alsdenn müſte die Hauptkurbel A 59
1 Fuß, die doppelte Kurbel LMKINO aber $4\frac{1}{2}$ Zoll Fig.
Bug haben, und dem Sternrade D müſte man dreymahl mehr Zähne, als dem Getriebe C Stecken geben.

393 §.

Eine vortheilhafte Einrichtung einer Pumpenkunſt, die durch Pferde getrieben werden ſoll anzugeben.

Aufl. Vermöge des 318 §. ſetze man $F = \frac{1}{2}m$ Cub. Fuß, wenn m die Anzahl der Pferde iſt, wel-

che die Kunſt treiben ſollen, und $\alpha = 4$ Fuß; ſo iſt für eine Stunde die Grenze der Waſſermenge M = $\frac{36000m}{e+f} - \frac{3600\varphi\alpha}{e+f}$, da dann φ von der Friction abhängt. Es läßt ſich alſo kein beſtimmter Wehrt von M in Rechnung bringen, bevor man einen ohngefehren Ueberſchlag wegen Einrichtung der Maſchiene gemacht hat, weil die Friction davon abhängt. Läßt man die Pferde auf die Art arbeiten, wie bey der Roßmühle im 427 §. Mech. wie es auch beym Göpel gewöhnlich iſt; ſo kann in der dortigen 212 Fig. das Rad EF wegbleiben, und man kann oben bey A einen Krumzapfen anbringen, der eine oder zwey Stangen ſchiebt. Im letztern Fall läßt ſich die Einrichtung ſo machen, daß nur eine Stange jedesmahl in die Laſt würkt, und man kann dieſe Einrichtung aus Leupolds Theatro Machin. Hydraul. T. II. 118 §. 56 S. kennen lernen. Noch beſſer iſt es, wenn der Krumzapfen bey A gedoppelt iſt, wie auch Leupold a. a. O. 123 §. 58 S. angiebt. Bey dieſer Einrichtung fällt keine andre Friction bey den Theilen der Maſchine ſelbſt vor, ohne nur am Zapfen B, welche wenig zu bedeuten hat. Wegen der Friction der Kolben in den Stiefeln, und derjenigen, die an den Gelenken der Stangen vorfallen mögte, kann man den Umſtand rechnen, daß die Kraft eines Pferdes nur mittelmäßig in Anſchlag gekommen iſt, da man ſie nach dem 317 §. auf $\frac{8}{9}$ Cub. Fuß ſtatt $\frac{1}{2}$ hätte rechnen können. Deswegen wird es nicht beträchtlich gefehlt ſeyn, wenn man hier φ aus der Acht läßt, und M = $\frac{36000m}{f}$ ſetzt.

ſetzt. Wenn alsdenn $f = 120$ Fuß angenommen wird, und zwey Pferde gebraucht werden ſollen; ſo wird $M = 600$ C. F. Man ſetze ferner den Schwengel $CD = r = 12$ Fuß, ſo iſt die Umlaufszeit der Pferde $\vartheta = \frac{2\pi r}{\alpha} = 6\pi = 18{,}84$ Sec. und weil $\mu = 1$ wird, ſo hat man auch $t = \vartheta$. Dafern nun die Einrichtung ſo gemacht werden kann, daß die Maſchiene ein bloßes Druckwerk wird; ſo ſuche man $\omega b = \frac{fgcctt}{4aal}$, und nehme $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, auch ſey

I) $f = l$, ſo wird $\omega b = 4g\pi^2 = 596$. Man nehme $b = 4$ Fuß, ſo wird $\omega = 149$, und $\lambda = \frac{\omega + 1}{\omega} = \frac{150}{149}$, folglich die würkliche Waſſermenge $\frac{1}{\lambda} M = \frac{149}{150} 600 = 596$ Cub. Fuß. Ferner wird $naa = \frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi\lambda b T} = \frac{596.6}{4.1800} = \frac{596}{1200} =$ 0,496666 Qu. Fuß. Will man demnach 1 paar Pumpen brauchen, ſo wird $a = 0{,}705$ Fuß $= 8\frac{1}{2}$ Zoll, und $c = 5\frac{2}{3}$ Zoll. Wollte man zwey paar Pumpen brauchen, ſo fände ſich $a = 0{,}4983$ Fuß ſehr nahe $= 6$ Zoll, alſo $c = 4$ Zoll. Zu jedem paar Stiefel würde nemlich eine Steigröhre im Durchmeſſer 4 Zoll weit gehören. Will man aber alle vier Stiefel mit einer einzigen Steigröhre verbinden, ſo muß ihr Durchmeſſer $4 \times \sqrt{2} = 5\frac{2}{3}$ Zoll, wie vorhin bleiben. Wollte man den Kolben-Hub nicht ſo groß machen, und z. E. nur $b = 2$ Fuß ſetzen; ſo wäre

wäre $\omega = 298$, und $\lambda = \frac{299}{298}$, $\frac{1}{\lambda}$ M = $\frac{298}{299}$ 600 = 598 Cub. Fuß. Ferner würde *naa* $= \frac{598 \cdot 6}{2 \cdot 1800} = \frac{598}{600}$ ſehr nahe = 1. Bey ein paar Pumpen müßten alſo die Stiefel im Durchmeſſer einen Fuß, und die Steigröhre 8 Zoll weit ſeyn. Wählte man zwey paar Pumpen, ſo müßte $a = 0{,}707$ Fuß $= 8\frac{1}{2}$ Zoll, und eine zu jedem paar Stiefel gehörige Steigröhre $5\frac{2}{3}$ Zoll, eine für alle vier Stiefel gemeinſchaftliche Steigröhre aber 8 Zoll im Durchmeſſer weit ſeyn. Weil engere Stiefel nicht ſo koſtbar ſind, auch nicht ſo viel Druck leiden (227 §.) als weitere; ſo dürfte hier die Vorausſetzung $b = 4$ Fuß wohl vortheilhafter ſeyn, als wenn man $b = 2$ Fuß annähme.

Wäre nicht $f = l$, ſondern

II) $l = 8f.$, und man behielt die vorigen Werthe von $\frac{c}{a}$ und t bey, ſo erhielte man $\omega b = \frac{1}{8} \cdot 596 = 74{,}5$. Wenn überdem $b = 4$ Fuß bleibt, ſo wird $\omega = 18{,}6$, und $\lambda = \frac{\omega + 1}{\omega} = \frac{19{,}6}{18{,}6}$, alſo $\frac{1}{\lambda}$ M $= 569{,}4$ Cubic Fuß. Ueberdem wird *naa* $= \frac{569{,}4 \cdot 6}{4 \cdot 1800} = 0{,}4745$ Qu. F., alſo $a = 0{,}689$ Fuß $= 8\frac{1}{4}$ Zoll, wenn $n = 1$ iſt, und $c = 5\frac{1}{2}$ Zoll. Die Abmeſſungen der Pumpen fallen alſo in dieſem Fall beynahe eben ſo aus, wie vorhin, aber die würkliche

liche Waſſermenge iſt beträchtlich geringer. Man könnte ſie vergröſſern, wenn man das Verhältniß $\frac{c}{a}$ gröſſer nähme. Setzt man $\frac{c}{a}$ 1, ſo wird $\omega b - 74{,}5 \times \frac{2}{4} = 167{,}6$, und wenn $b = 4$ Fuß bleibt, ſo erhält man $\omega = 42$, nimmt man aber $b = 2$ Fuß, ſo wird $\omega = 84$, und die Waſſermenge $= \frac{84}{85} . 600$ $= 593$ Cub. Fuß, beynahe ſo groß, als vorhin.

Dafern man genöthiget iſt, die Einrichtung ſo zu machen, daß die Stiefel das Waſſer auf einen Theil der verlangten Höhe hinauf ſaugen, ſo ſey dieſer Theil der Höhe $= 20$ Fuß $= e$, ſo wird in den Formuln des 365 §. $f = 100$ Fuß, und es bleibt die Gränze der Waſſermenge $\frac{F\alpha T}{e+f} = \frac{36000m}{e+f}$ $= 600$ Cub. Fuß. Aber die wirkliche Waſſermenge nebſt den übrigen Abmeſſungen der Kunſt muß man ſo berechnen. Es ſey

1) $f = l$, und man behalte die Vorausſetzungen $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, $t = 6\pi$, $b = 4$ Fuß, ſo bleibt für das Druckwerk $\omega = 149$, und $\lambda = \frac{150}{149}$. Für das Saugwerk hat man $\psi = \frac{\varepsilon t \sqrt{g}}{a\sqrt{2l}}$, und $\psi = A\int v \frac{b\omega}{e}$. Für das Saugwerk kann demnach der Werth $b\omega = 596$ nicht behalten werden, weil $\frac{b\omega}{e}$ viel größer, als 2 würde. Man ſuche alſo $\psi = \frac{\varepsilon . 6\pi\sqrt{g}}{a\sqrt{2l}}$,

und

wäre $\omega = 298$, und $\lambda = \frac{299}{298}$, $\frac{1}{\lambda}$ M = $\frac{298}{299}$ 600 = 598 Cub. Fuß. Ferner würde $naa = \frac{598 \cdot 6}{2 \cdot 1800} = \frac{598}{600}$ ſehr nahe = 1. Bey ein paar Pumpen müſten alſo die Stiefel im Durchmeſſer einen Fuß, und die Steigröhre 8 Zoll weit ſeyn. Wählte man zwey paar Pumpen, ſo müſte $a = 0,707$ Fuß = $8\frac{1}{2}$ Zoll, und eine zu jedem paar Stiefel gehörige Steigröhre $5\frac{2}{3}$ Zoll, eine für alle vier Stiefel gemeinſchaftliche Steigröhre aber 8 Zoll im Durchmeſſer weit ſeyn. Weil engere Stiefel nicht ſo koſtbar ſind, auch nicht ſo viel Druck leiden (227 §.) als weitere; ſo dürfte hier die Vorausſetzung $b = 4$ Fuß wohl vortheilhafter ſeyn, als wenn man $b = 2$ Fuß annähme.

Wäre nicht $f = l$, ſondern

II) $l = 8f.$, und man behielt die vorigen Werthe von $\frac{c}{a}$ und t bey, ſo erhielte man $\omega b = \frac{1}{8} \cdot 596 = 74,5$. Wenn überdem $b = 4$ Fuß bleibt, ſo wird $\omega = 18,6$, und $\lambda = \frac{\omega + 1}{\omega} = \frac{19,6}{18,6}$, alſo $\frac{1}{\lambda}$ M = 569,4 Cubic Fuß. Ueberdem wird $naa = \frac{569,4 \cdot 6}{4 \cdot 1800} = 0,4745$ Qu. F., alſo $a = 0,689$ Fuß = $8\frac{1}{4}$ Zoll, wenn $n = 1$ iſt, und $c = 5\frac{1}{2}$ Zoll. Die Abmeſſungen der Pumpen fallen alſo in dieſem Fall beynahe eben ſo aus, wie vorhin, aber die würkliche

liche Waſſermenge iſt beträchtlich geringer. Man könnte ſie vergröſſern, wenn man das Verhältniß $\frac{c}{a}$ gröſſer nähme. Setzt man $\frac{c}{a}$ 1, ſo wird $\omega b = 74{,}5 \times \frac{9}{4} = 167{,}6$, und wenn $b = 4$ Fuß bleibt, ſo erhält man $\omega = 42$, nimmt man aber $b = 2$ Fuß, ſo wird $\omega = 84$, und die Waſſermenge $= \frac{84}{85} \cdot 600$ $= 593$ Cub. Fuß, beynahe ſo groß, als vorhin.

Dafern man genöthiget iſt, die Einrichtung ſo zu machen, daß die Stiefel das Waſſer auf einen Theil der verlangten Höhe hinauf ſaugen, ſo ſey dieſer Theil der Höhe $= 20$ Fuß $= e$, ſo wird in den Formuln des 365 §. $f = 100$ Fuß, und es bleibt die Gränze der Waſſermenge $= \frac{F\alpha T}{e+f} = \frac{36000m}{e+f}$ $= 600$ Cub. Fuß. Aber die wirkliche Waſſermenge nebſt den übrigen Abmeſſungen der Kunſt muß man ſo berechnen. Es ſey

1) $f = l$, und man behalte die Vorausſetzungen $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, $t = 6\pi$, $b = 4$ Fuß, ſo bleibt für das Druckwerk $\omega = 149$, und $\lambda = \frac{150}{149}$. Für das Saugwerk hat man $\psi = \frac{\varepsilon t \sqrt{g}}{a\sqrt{2l}}$, und $\psi = A\int v \frac{b\omega}{e}$. Für das Saugwerk kann demnach der Werth $b\omega =$ 596 nicht behalten werden, weil $\frac{b\omega}{e}$ viel größer, als 2 würde. Man ſuche alſo $\psi = \frac{\varepsilon . 6\pi\sqrt{g}}{a\sqrt{2l}}$,

und

und nehme an, es ſey $l = 24\frac{1}{2}$ Fuß, ſo wird $\psi = \frac{6.3,886}{7} . \frac{\varepsilon}{a} . \pi$. Dieſe Formul ergiebt, daß es nicht vortheilhaft ſeyn würde, bey dieſer Kunſt die Saugröhren ſehr weit zu machen, weil alsdenn ψ viel größer, als π würde. Ueberdem gründet ſich die Richtigkeit der Formul darauf, daß $\frac{a^2 l}{\varepsilon^2}$ in Vergleichung mit b beträchtlich groß ſeyn muß, und dies erfordert ebenfalls, daß ε gegen a nicht ſehr groß ſey. Man nehme demnach $\frac{\varepsilon}{a} = \frac{1}{4}$, ſo wird $\psi = \frac{11,658}{14} . \pi$, und dieſer Bogen faſſet $\frac{11,658}{14} . 180°$. d. i. $149° \ 30'$. Sein Querſinus iſt $= 1,8616 = \frac{b\omega}{\varepsilon}$, alſo wird $b\omega = 1,8616 \times 20 = 37$, und $b = 4$ giebt $\omega = 9,25$. Demnach hat man für das Saugwerk $\nu = \frac{1025}{925}$ und $\nu e = 22,2$. Ueberdem wird $\lambda f = \frac{150}{149} . 100 = 100,7$, alſo $\nu e + \lambda f = 123$, und die würkliche Waſſermenge $= \frac{2.36000}{123} = 585$ Cub. Fuß. Nun kann man erſtlich a aus der Gleichung $naa = \frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi\lambda b T}$ berechnen, und man muß $\frac{1}{\lambda}$ M =

585 Cub. Fuß ſetzen. Dies giebt $naa = \frac{585.6}{4.1800}$ $= \frac{585}{1200} = 0{,}4875$ Quadr. Fuß, und für $n = 1$ wird $a = 0{,}698$ Fuß $= 8$ Zoll $4\frac{1}{2}$ Linien, alſo $c = \frac{2}{3}a = 5$ Zoll 7 Linien, und $\varepsilon = 2$ Zoll $1\frac{1}{8}$ Linie. Es ſey nun

II) $l = 8f$, und man behalte $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, $b = 4$ Fuß, $t = 6\pi$, ſo wird $\omega b = 74{,}5$, $\omega = 18{,}6$, und $\lambda = \frac{196}{186}$, $\lambda f = 105{,}4$. Weil nun auch in dieſem Fall $\frac{b\omega}{e} > 2$ wäre, ſo ſuche man für das Saugwerk $\psi = \frac{\varepsilon t\sqrt{g}}{a\sqrt{2l}}$, in der Vorausſetzung $\frac{\varepsilon}{a} = \frac{1}{4}$, $t = 6\pi$, $2l = 49$, und man hat, wie vorhin, $\psi = A$. $149^\circ\, 30'$, alſo $b\omega = 37$, $\omega = 9{,}25$, $\nu = \frac{1025}{925}$, $\nu e = 22{,}2$; alſo $\nu e + \lambda f = 127{,}6$. Dies giebt die würkliche Waſſermeng $= \frac{72000}{1276} = 564$ Cub. F., und daraus findet man $naa = \frac{564.6}{4.1800} = \frac{564}{1200}$ $= 0{,}47$ Quad. F., und $a = 0{,}685$ Fuß, beynahe $= 8\frac{1}{4}$ Zoll, wenn $n = 1$ iſt: folglich wird $c = 5\frac{1}{2}$ Zoll, und $\varepsilon = 2$ Zoll $\frac{3}{4}$ Linien. Man erhält eine etwas größere Waſſermenge, wenn man $b = 2$ Fuß ſetzt.

394 §.

Die im 378 §. erwehnte Maſchiene, woran ſtatt der Krumzapfen elliptiſche Scheiben angebracht ſind, wird nur von einem Pferde getrieben. Daſſelbe bringt, wie im 427 §. Mech. die lothrecht ſtehende Welle AB in Bewegung. (Man ſ. die 212 Figur Mech.). Statt des Sternrades EF aber bey der a. a. O. beſchriebenen Roßmühle, iſt hier ein Kammrad befindlich, welches ſtatt des verticalen Trillings G einen horizontal liegenden Trilling, und vermittelſt deſſelben die Welle mit den elliptiſchen Scheiben umtreibt. Belidor giebt an der im 378 §. angeführten Stelle folgende Abmeſſungen an. Der Zugbalken CD iſt 14 Fuß lang, alſo durchlauft das Pferd einen Kreis, deſſen Umfang 88 Fuß groß iſt. Das Kammrad hat 6 Fuß im Halbmeſſer, und 101 Kämme, der Trilling aber 20 Triebſtecken. An der Axe des Trillings ſind drey elliptiſche Scheiben gehörig angebracht, wovon jede einen eigenen Kolben bewegt; ihre groſſe Axe iſt 5 Fuß, die kleine aber 3 Fuß lang, alſo iſt ihr Unterſchied 2 Fuß, deſſen Hälfte 1 Fuß oder 12 Zoll der Weg iſt, den die Rollen am längern Arm des Wagebalkens im Steigen und Fallen zurück legen. Der längere Arm, vom Mittelpunct der Bewegung bis am Mittelpunct der Rolle gerechnet, iſt $1\frac{1}{2}$ mahl ſo groß, als die kürzere vom Mittelpunct bis dahin, wo die Kolbenſtange hängt; alſo beträgt die Höhe des Kolbenhubs 8 Zoll. die Mündungen der Stiefel ſind $2\frac{1}{2}$ Zoll, die Mündungen der Gurgeln oder Kropfröhren aber 1 Zoll im Durchmeſſer weit, und alle drey laufen in eine einzige Steigröhre zuſammen. Die Kolben

drücken

drücken das Waſſer durch die Aufſaz-Röhren 150 Fuß hoch hinauf, und die geſammte Länge aller Aufſatz-Röhren, die ſich längſt einer Anhöhe erſtrecken, beträgt 200 Toiſen, oder 1200 Fuß.

Wenn die Maſchine in voller Arbeit iſt, ſo legt das Pferd in einer Minute zwey Umläufe zurück, alſo in einer Stunde 120, ſo daß der ganze in einer Stunde zurück gelegte Weg $88 \times 120 = 10560$ Fuß, oder 1760 Toiſen beträgt. Auf einen Umlauf des Kammrads kommen $5\frac{1}{20}$ Umläufe des Trillings, alſo läuft der Trilling in einer Stunde 606 mahl um. Bey jedem Umlauf des Trillings wird jeder Kolben zweymahl nieder gedruckt, folglich alle drey Kolben zuſammen in einer Stunde 3636 mahl. Nimmt man mit Belidor $\pi = \frac{22}{7}$, ſo iſt der Querſchnitt eines jeden Stiefels $= \frac{1}{4}\pi \times \frac{25}{4} = \frac{11.25}{2.4.7}$ Qu. Zoll, und jeder Kolbendruck treibt eine Waſſerſäule von $\frac{11.25}{7} = 39\frac{2}{7}$ Cubiczoll herauf. Dieſe Zahl mit 3636 multipliciret, giebt die in einer Stunde gehobene Menge Waſſer $= 142843$ Cub. Zoll, oder $82\frac{2}{3}$ Cub. Fuß. Dieſe Rechnung iſt mit dem Erfolg überein gekommen. Belidor hat die Maſchiene 4 Stunden lang treiben laſſen, und am Ende befunden, daß ſie 324 Cub. Fuß Waſſer gehoben hatte.

Vergleicht man dieſes Reſultat mit demjenigen, was nach der bisherigen Theorie vermittelſt eines Pferdes ausgerichtet werden kann, ſo ergiebt ſich daß dieſe Maſchine noch lange nicht eine der beſten ſey. Die Grenze der Waſſermenge, welche die Maſchine

ſchine in einer Stunde auf die Höhe von 150 Fuß bringen könnte, iſt $\frac{36000}{150} = 240$ Cub. Fuß: allein ſie hebt würklich nur ohngefehr 82 Cub. Fuß, alſo wenig mehr, als den dritten Theil der erwehnten Grenze. Daß ſie bey einer beſſern Einrichtung wenigſtens $2\frac{1}{2}$ mahl mehr Waſſer in einer Stunde heben könnte, wird folgende Berechnung ergeben. Wegen der Friction dürfte die Grenze der Waſſermenge noch wohl etwas zu vermindern ſeyn. Indeſſen iſt die Kraft eines Pferdes nur $\frac{1}{2}$ Cub. Fuß geſchätzt, da ſie wohl auf $\frac{8}{5}$ Cub. Fuß hätte geſetzt werden können. Eigentlich muß $M = \frac{36000}{150}$

$- \frac{3600 \cdot \varphi \cdot 4}{150}$ genommen werden, und wenn man für φ etwa noch 5 bis 6 Pf. rechnet, ſo ſcheint dies völlig hinlänglich zu ſeyn, wenn die Maſchine ſo wie im vor. §. eingerichtet wird. Wenn alsdenn der Krumzapfen an der vertical ſtehenden Welle ohngefehr 1 Fuß Bug bekommt, und der Zugbalken $r = 14$ Fuß bleibt, ſo ſind jene 5 bis 6 Pf. mit 70 bis 80 Pf. Friction im Gleichgewicht. Man ſetze demnach $\varphi = \frac{1}{12}$ Cub. Fuß Waſſer, ſo wird

$\frac{3600 \cdot \varphi \cdot 4}{150} = 8$ Cub. Fuß, und die Grenze der Waſſermenge $= 232$ Cub. Fuß. Weil nun $r = 14$ Fuß bleibt, ſo wird $\vartheta = \frac{2\pi r}{\alpha} = 7\pi$ beynahe $= 22$ Sec. und bey der angenommenen Einrichtung hat man $\mu = 1$, und $t = \vartheta = 7\pi$. Bey der Maſchine

ſchine im Kloſter au Val Saint Pierre iſt $f = 150$ F. $l = 1200$ F. alſo $l = 8f$. Ferner iſt bey eben der Maſchine $\frac{c}{a} = \frac{1}{2\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$; man nehme hier ſtatt deſſen $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, ſo wird $\omega b = \frac{15,1 \cdot 49 \cdot \pi^2}{9 \cdot 8} =$ 101. Nimmt man nun $b = 2$ Fuß, damit die Kurbel 1 Fuß Bug bekomme, ſo wird $\omega = 50,5$, und $\lambda = \frac{\omega + 1}{\omega} = \frac{515}{505}$, alſo $\frac{1}{\lambda} M = 227\frac{1}{2}$ Cub. Fuß, und dieſe Waſſermenge beträgt mehr denn $2\frac{1}{2}$ mahl ſoviel, als die Maſchine au Val Saint Pierre hebt. Uebrigens wird $naa = \frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi\lambda b T} =$ $\frac{227,5 \cdot 7}{2 \cdot 1800} = 0,442361$. Für $n = 1$, wird alſo $a = 0,665$ ſehr nahe $= 8$ Zoll, und es können zwey Stiefel völlig genügen mit einer gemeinſchaftlichen Steigröhre von 5 Zoll 4 Linien im Durchmeſſer.

Die Fehler der Maſchine au Val Saint Pierre ſind alſo einmahl in ihrer ganz unvortheilhaften Einrichtung zu ſuchen. Auf einen Umlauf des Pferdes kommen 10,1 Kolbenſpiele, alſo iſt $\vartheta = 10,1t$, und $t = \frac{10}{101}\vartheta = \frac{70 \cdot \pi}{101}$. Weil überdem $\frac{c}{a} = \frac{2}{5}$, und $\frac{f}{l} = \frac{1}{8}$, ſo wird $\omega b = \frac{fgcctt}{4aal} =$ $\frac{149 \cdot 70^2}{25 \cdot 101^2 \cdot 8} = 0,358$. Ferner iſt bey dieſer Ma-

ſchine $b = \frac{2}{3}$ Fuß alſo wird $\omega = 0{,}537$ beynahe $=$ $\frac{1}{2}$, und $\lambda = \frac{3}{2}$. Die Maſchine müſte alſo ohngefehr $\frac{2}{3}$ der Grenze der Waſſermenge alſo $\frac{2}{3} . 232 =$ 155 Cub. F. heben, da ſie doch nicht viel über $\frac{1}{3}$ dieſer Grenze hebt. Die Urſache hievon liegt zum Theil darin, weil die Stiefel etwas zu eng ſind. Es iſt nemlich $naa = \frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi\lambda b T} = \frac{155.70}{\frac{2}{3}1800.100} =$

$\frac{155.7}{120.101} = 0{,}089521$; weil die Maſchine drey Stiefel führt, ſo muß $n = 1\frac{1}{2}$ genommen werden, und dies giebt $aa = 0{,}059680$, alſo $a = 0{,}244$ Fuß, ſehr nahe $=$ 3 Zoll; man hat aber die Stiefel im Durchmeſſer nur $2\frac{1}{2}$ Zoll weit gemacht. Dies vermindert abermahl die Waſſermenge in dem Verhältniß 36:25, ſo daß ſtatt 155 Cub. Fuß nur etwa 108 Cub. Fuß bleiben. Ueberdem iſt die Maſchine wegen der elliptiſchen Scheiben mehr zuſammen geſetzt, als nöthig wäre, wenn man den Krumzapfen brauchte; alsdenn könnte Rad und Getriebe wegfallen, welches nur die Friction vermehrt. Uebrigens hat man auch Muſchel-Ventile gebraucht, welche die Bewegung des Waſſers ungemein aufhalten, wie aus dem vorhergehenden ſchon bekannt iſt. Dieſe neuen Hinderniſſe vermindern die Waſſermenge noch mehr, ſo daß ſtatt 108 C. Fuß würklich nur 82 F. gehoben werden.

395 §.

Eine Pumpenkunſt ſoll durch ein unterſchlächtiges Waſſerrad getrieben werden, man ſoll eine vortheilhafte Einrichtung derſelben angeben.

Aufl. Dafern die Pumpen das Waſſer auf die Höhe e ſaugen, und hiernächſt auf die Höhe f weiter hinauf drücken ſollen, ſo hat man für die Grenze der Waſſermenge $M = \frac{F\alpha T}{e+f}$. Iſt nun yy die Quadratfläche der Schaufeln, und C die Geſchwindigkeit des anſchlagenden Waſſers, ſo wird $F = \frac{4}{9} \cdot \frac{C^2}{4g} \cdot yy$, und $\alpha = \frac{1}{3} C$ (319 §.), alſo $F\alpha = \frac{1}{27} \cdot \frac{C^3}{g} \cdot yy$. Dies giebt für eine Stunde die Grenze der Waſſermenge $M = \frac{3600\, C^3 \cdot yy}{27 \cdot g \cdot (e+f)} = \frac{400\, C^3\, yy}{3g\,(e+f)}$, mit Beyſeitſetzung der Friction. Wenn aber φ diejenige Kraft bezeichnet, welche am angegriffenen Punct der Maſchine angebracht mit der Friction das Gleichgewicht hält; ſo muß man $F - \varphi$ ſtatt F ſchreiben, und das giebt die Grenze der Waſſermenge $= \frac{400\, C^3\, yy}{3g\,(e+f)} - \frac{\frac{1}{3} C \cdot \varphi \cdot 3600}{e+f}$.

Herr Belidor beſchreibt in der Archit. Hydraul. III Buch IV Cap. 1033 u. f. §§. ein Pumpwerk, welches an der neuen Brücke zu Paris erbauet iſt, und von einer daran befindlichen Verzierung den Namen der Samariterin führet. An der Axe des Waſſerrades befindet ſich auf jeder Seite eine doppelte Kurbel mit zugehörigen Stangen. Jede Stange hängt mit einem Wagebalken zuſammen, und am andern Ende des Wagebalkens hängt die zu einem Druckſtiefel gehörige Kolbenſtange. Jede zwey zu

einer Kurbel gehörige Stiefel ſind vermittelſt einer Gabel vereinbaret, und die Kurbeln ſind zu beyden Seiten an der Welle des Waſſerrades ſo angebracht, daß die Ebene der einen Kurbel die Ebene der andern unter einem rechten Winkel ſchneidet; ſo daß hiebey die im 376 §. erwehnte Maxime beobachtet iſt. Die Abmeſſungen aller Theile, welche zu der Maſchine gehören, ſind folgende. Der Halbmeſſer des Waſſerrades, von der Bewegungsaxe bis an die Mitte der Schaufeln gerechnet, iſt 8 Fuß, die Schaufeln ſind 18 Fuß lang und 4 Fuß hoch, der Bug der Kurbeln beläuft ſich auf 21 Zoll. Die Wagebalken ſind von einem Ende zum andern 20 Fuß 4 Zoll lang, aber ungleichförmig, ſo daß der Arm woran die Kolbenſtangen hängen, 9 Fuß 7 Zoll, der andre 10 Fuß 9 Zoll lang iſt. Die Mündung der Stiefeln beträgt 9 Zoll, aber die Mündung der Gabeln und Aufſatz-Röhren 6 Zoll. Der Kolben-Hub beläuft ſich auf 3 Fuß, und das Waſſer wird 72 Fuß hoch in lothrecht ſtehenden Steigröhren gehoben. Das Waſſerrad läuft in 10 Minuten 28 mahl herum, ſo daß der Mittelpunct jeder Schaufel mit einer Geſchwindigkeit von 2 Fuß $7\frac{1}{2}$ Zoll in einer Stunde läuft. Mit Hülfe des Pitotſchen Inſtruments (107 §.) hat Hr. Belidor die Geſchwindigkeit des an die Schaufeln anſchlagenden Waſſers 6 Fuß 2 Zoll befunden.

Die Maſchine iſt ein bloſſes Druckwerk, und die Stiefel ſelbſt ſtehen im Waſſer. Man kann demnach in der oben ſchon angeführten Formul, welche die Grenze der Waſſermenge ausdrückt, f ſtatt $e+f$ ſchreiben, da dann $f = 72$ Fuß wird. Man ſetze ferner $C = 6\frac{1}{6}$ Fuß, $g = 15,1$ Par. Fuß, und $yy =$

$18 \times 4 = 72$ Qu. Fuß; ſo wird die Grenze der Waſſermenge $= \frac{400 . 234,505}{3 . 15 . 1} - \frac{2\frac{1}{18} . \varphi . 3600}{72}$ $= 2070,7 - 102,8 . \varphi$. Belidor berechnet die wegen der Friction nöthige Kraft auf 220 Pf., ſo daß man φ etwa = 3 Cub. Fuß ſetzen muß, und es wird die Grenze der Waſſermenge $M = 1762$ Cub. Fuß. Man ſetze nun $\vartheta = \frac{2\pi r}{\alpha}$, und $r = 8$ F., $\alpha = \frac{1}{3} C = 2\frac{1}{18}$ Fuß, ſo wird $\vartheta = \frac{16 . 18 . \pi}{37} = 7,8 . \pi$. Bey der Pariſer Maſchine iſt $\mu = 1$, alſo $t = \vartheta = 7,8 . \pi$. Ueberdem iſt $f = l$, und $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. Dieſe Vorausſetzungen geben $\omega b = \frac{fgcctt}{4aal} = \frac{15,1 . 7,8^2 . \pi^2}{9} = 1007$, und weil $b = 3$ Fuß iſt, ſo wird $\omega = 336$, $\lambda = \frac{337}{336}$, und $\frac{1}{\lambda} M = 1756$ Cub. Fuß. Daraus findet man a vermittelſt der Gleichung $naa = \frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi\lambda b T}$. Die Samariterinn führt 2 Paar Pumpen, alſo iſt $n = 2$, und wenn man $t = 7,8 . \pi$, $b = 3$ Fuß, $T = 3600$ Secund. $\frac{1}{\lambda} M = 1756$ Cub. Fuß ſetzt, ſo findet man $aa = \frac{1756 . 7,9}{3 . 3600} = 1,268222$, und $a = 1,126$ Fuß =

1 Fuß 1½ Zoll. Die Kropf- und Steigröhren müſten alſo 9 Zoll im Durchmeſſer weit ſeyn. Es ſind aber die Stiefel an der Pariſer Maſchine nur 9 Zoll, und die Steigröhren 6 Zoll weit, deswegen leiſtet ſie lange nicht die Dienſte, welche ſie würklich leiſten könnte. Weil die Stiefel enger ſind, als nöthig iſt, ſo widerſtehen die Kolben nicht ſtark genug, und daher läuft das Waſſerrad ſchneller um, als erfordert wird, wenn der Effect der möglichſt gröſte ſeyn ſoll. Die Schaufeln laufen mit einer Geſchwindigkeit von 2 Fuß 7½ Zoll, da ſie doch nur eine Geſchwindigkeit von 2 Fuß ⅔ Zoll haben ſollten. Ueberdem aber hat die Maſchine noch andre Fehler, die einen Theil der Kraft wegnehmen, ſo daß das Rad noch ſchneller laufen würde, wenn dieſe Fehler gehoben wären, die Stiefel und Röhren aber unverändert blieben. Man hat Muſchel-Ventile gebraucht, und aus dem 388 §. iſt ſchon bekannt, daß ſie die Bewegung des Waſſers ſehr ſchwächen. Ferner hat das Waſſerrad 8 Schaufeln, da es nach Vorſchrift des 117 § nur 7 Schaufeln führen ſollte. Wegen dieſer Urſache können die Schaufeln in ihrem ſenkrechten Stande unter Waſſer nur auf ¾ ihrer Höhe vom Waſſer getroffen werden. Man kann auf folgende Art einen Ueberſchlag machen, wieviel die Samariterin ſtündlich an Waſſer ausgiebt. Nach Belidors Bericht läuft das Waſſerrad in 10 Minuten 28 mahl um, und auf jeden Umlauf dieſes Rades ſpielt jeder Kolben einmahl 3 Fuß hoch, alſo in 10 Minuten ein jeder 28 mahl. Jeder hebt demnach in dieſer Zeit eine Waſſerſäule, die 28 × 3 = 84 Fuß hoch iſt, und alle vier zuſammen eine Säule von 336 Fuß Höhe auf der Grund-

fläche

fläche des Kolbens, die $\frac{3}{4}$ Fuß im Durchmeſſer hält. Alſo iſt ihr Inhalt $= \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} \cdot 3{,}1416 \cdot 336 = 150{,}6$ Cub. Fuß. So viel Waſſer giebt die Maſchine in 10 Minuten, alſo in einer Stunde 903 Cub. Fuß; und dies iſt wenig mehr, als die Hälfte deſſen, was ſie heben könnte, wenn ſie von den vorhin erwehnten Mängeln frey wäre.

Auſſer dieſen ſchon berührten Mängeln der Maſchine hält Belidor a. a. O. 1055 §. den Umſtand ebenfalls für ſchädlich, daß die Kropf- und Steigröhren in Vergleichung mit den Stiefeln ſo eng ſind, nach dem Flächen-Inhalt der Querſchnitte in dem Verhältniß 4 : 9. Ob es nun gleich gewiß iſt, daß dieſer Umſtand ſchädlich ſeyn würde, wenn die Kolben viel ſchneller auf und nieder ſpielten; ſo ergiebt doch die obige Rechnung, daß bey einem ſo langſamen Kolbenſpiel, wie bey der Samariterin würklich ſtatt hat, das Verhältniß $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ gar wohl beybehalten werden könne. Wenn dem Waſſerrade ſeine gehörige Vollkommenheit gegeben würde, und die Muſchel-Ventile mit Klappen-Ventilen von einer vollkommenen Einrichtung verwechſelt würden, ſo könnte man auſſer den ſchon vorhandenen 2 Paar Druckſtiefeln noch andre 2 Paar von eben der Einrichtung anordnen, und mit demſelben Rade ſo wie die vorigen verbinden, daß bey jedem Umlauf deſſelben jeder Kolben nur einmahl ſpielte. Belidor erinnert, daß das Rad noch beſſere Dienſte thun würde, wenn es mit 6 Schaufeln von 5 Fuß Höhe verſehen würde, ſtatt der 7 Schaufeln von 4 Fuß Höhe. Die Kraft würde dadurch uni $\frac{1}{4}$ verſtärkt

werden, ſo daß dieſe Verſtärkung überflüßig hinlänglich wäre, die vorhin mit in Rechnung gebrachte Friction zu überwinden, und die neu beyzufügenden Druckſtiefel würden alsdenn noch etwas weiter, als 9 Zoll genommen werden können.

396 §.

An U. L. Frauen Brücke zu Paris ſtehet noch eine andre Pumpenkunſt, die ehedem eine ſehr mangelhafte Einrichtung hatte, bevor ſie nach einem neuen Entwurf des Herrn Belidor verbeſſert worden. Ich werde hier aus dem oft angeführten Belidorſchen Werke III Buch V Cap. 1106 u. f. §§. eine Beſchreibung ſowohl der ehemaligen, als auch der neuen Einrichtung mittheilen. Die ganze Waſſerkunſt beſtehet aus zweyen einander ganz ähnlichen Werken, davon jedes durch ein eigenes Waſſerrad getrieben wird. Jedes Rad treibt 6 Kolbenſtangen, die zu ſo viel Druckſtiefeln und damit vereinbarten Saugſtiefeln gehören. Die Rad-Schaufeln ſind 3 Fuß hoch, und 18 Fuß lang, und die Geſchwindigkeit des anſchlagenden Flußwaſſers beträgt 9 Fuß in einer Secunde. Wenn man dieſe Einrichtung zum Grunde ſetzt, und zuförderſt die Grenze der Waſſermenge ſucht, welche die Maſchine in einer Stunde heben könnte, ſo muß man in der Formul des vor. §. $yy = 3 \times 18 = 54$ Qu. Fuß, $C = 9$, alſo $C^3 = 729$, und $g = 15{,}1$ ſetzen. Das Waſſer wird zuſammen auf 81 Fuß hoch gehoben, alſo hat man $e + f = 81$, und die Grenze der Waſſermenge wird

$$= \frac{400 . 729{,}54}{3 . 15{,}1 . 81} - \frac{3 . \phi . 3600}{81} = \frac{400 . 3 . 54}{15{,}1}$$

—

$$-\frac{400.\varphi}{3} = 4291 - \frac{400\varphi}{3}.$$

Mit Beyſeitſetzung der Friction wäre alſo dieſe Grenze = 4291 Cub. Fuß. Herr Euler in der Abhandlung: Diſcuſſion plus particuliere de diverſes manieres d'elever de l'eau par le moyen des pompes §. XXXVII. Hiſtoire de l'Academie de Berlin A. 1752. pag. 168. hat eben dies Exempel, und er findet die Zahl 4147 Cub. F. ſtatt der hier gefundenen 4291 C. F. Dies rührt daher, weil er $g = 15,625$ angenommen hat: weil aber Belidor ohne Zweifel franzöſiſch Maaß verſteht, ſo nehme ich $g = 15,1$ an. Die folgende Beſchreibung von der übrigen Einrichtung der Maſchine wird ergeben, daß die Maſchine ſehr überſetzt ſey, und daß man φ wohl auf 4 Cubikfuß ſchätzen müſſe. Dies würde $\frac{400\varphi}{3} = 533$ Cubikfuß, alſo die Grenze der Waſſermenge = 3758 Cubikfuß geben. Wenn nun die übrige Einrichtung einigermaſſen regelmäßig wäre, ſo müſte die würkliche Waſſermenge höchſtens nur um den zehnten Theil dieſer Grenze geringer ſeyn, alſo auf 3382 Cubikfuß betragen, und beyde Werke zuſammen müſten auf 6764 Cubikfuß ausgeben. Allein nach Belidors Bericht, hat die Maſchine, ſo wie ſie vor der Verbeſſerung beſchaffen geweſen, gewöhnlich nur 100 Waſſerzolle gehoben, a. a. O. 1121 §. Aus dem 53 §. weiß man, daß auf einen Waſſerzoll 28 Pfund für jede Minute, alſo 1680 Pf. für jede Stunde, oder 24 Cubikfuß (den Cubikfuß zu 70 Pf. angenommen,) gerechnet werden. Demnach hat die Maſchine ehedem nur 2400

Cub. Fuß Waſſer ſtündlich gehoben, welches noch nicht der dritte Theil der Grenze der Waſſermenge für beyde Werke zuſammen iſt. Demnach wird es der Mühe verlohnen, die Fehler dieſer Maſchine genauer aufzuſuchen.

Es iſt ſchon erwehnt worden, daß die ganze Maſchine aus zweyen abgeſonderten übrigens auf völlig einerley Art eingerichteten Werken beſtehe, davon jedes ſein eigenes Waſſerrad hat. Jedes dieſer Werke für ſich iſt wiederum in zwey beſondere ſo genannte Equipagen vertheilt. An der horizontal liegenden Welle des Waſſerrades befindet ſich ein verticales Kammrad, welches in zwey Trillinge greift, davon einer horizontal liegt, der andre aber mit ſeiner Welle vertical ſtehet. An der Welle des erſten befindet ſich eine dreyfache Kurbel, welche drey Stangen zieht, und vermittelſt derſelben drey grade über der Kurbel angebrachte Wagebalken, vermittelſt dieſer letztern aber drey Kolbenſtangen bewegt, wovon jede einen Druck- und Saugkolben zugleich zieht: und dieſe machen die ſogenannte Equipage der kleinen Bewegung aus. Ich will ſie kurz die erſte Equipage nennen. An der Welle des verticalen Trillings befindet ſich oberwärts ein horizontales Kammrad, das in einen neuen Trilling greift, der horizontal drüber liegt. An deſſen Welle befindet ſich ebenfalls eine dreyfache Kurbel, welche die übrigen drey Kolbenſtangen, und mit denſelben drey andre Druckkolben und dazu gehörige Saugkolben bewegt. Dies iſt die ſo genannte Equipage der groſſen Bewegung: ich will ſie kurz die zweyte Equipage nennen. Die Druckſtiefel gehören in die Claſſe der verkehrt ſtehenden, und ſie ſind

mit den Saugſtiefeln auf folgende Art verbunden. Es heben dieſe Saugſtiefel erſtlich das Waſſer 16 Fuß hoch in einem beſondern Waſſerbehälter, aus welchem er hiernächſt die Druckſtiefel auf die übrige Höhe hinauf drücken (a. a. O. 1111 §.). Nach Belidors Zeichnung auf der zweyten Kupfertafel zum V Cap. des III Buchs ſcheint es, daß hier die Höhe über den Grund des Fluſſes gemeint ſey, (es heiſt auch im 1112 §, daß die Austheilungsbehälter, auf welche das Waſſer hinauf gedrückt wird, 81 Fuß über den Grund des Fluſſes erhöhet liegen. Dagegen heiſt es im 1128 §, beym niedrigen Stande des Fluſſes werde das Waſſer 80 Fuß über deſſen Waſſerpaß in die Höhe gehoben,) und nach eben dieſer Zeichnung wäre der Fluß ohngefehr 8 bis 9 Fuß tief an der Stelle, wo die Maſchine ſteht, ſo daß die Stiefel das Waſſer eigentlich nur 7 bis 8 Fuß hoch über den Waſſerpaß des Fluſſes ſaugen würden. In dem Waſſerbehälter ſteht das Waſſer ohngefehr 3 Fuß hoch über der Mündung der Saugſtiefel. Wenn ich alſo Belidors Zeichnung recht verſtehe, ſo heben die Druckſtiefel das Waſſer eigentlich etwa 70 Fuß hoch. Wenn alſo die Buchſtaben λ und ν die Bedeutung des 365 §. behalten, ſo iſt die würkliche Waſſermenge

$$= \frac{400C^3 yy : 3g - \frac{1}{3}C\varphi \cdot 3600}{\nu e + 3 + \lambda f} = \frac{304403}{\nu e + 3 + \lambda f},$$

und man muß $f = 70$ Fuß, $e = 8$ Fuß ſetzen. Man ſuche nun erſtlich $\lambda = 1 + \frac{1}{\omega}$, und ω aus der Gleichung $\omega b = \frac{fgcctt}{4aal}$. In ſolcher Abſicht muß man

wiſſen,

wiſſen, daß die zur erſten Equipage gehörigen Kolben 4 mahl während eines Umlaufs des Waſſerrades ſpielen, daß alſo für dieſe $\mu = 4$, und $\vartheta = 4t$ ſey. Der Halbmeſſer des Waſſerrades bis an die Mitte der Schaufeln iſt $8\frac{1}{2}$ Fuß $= r$, alſo $\vartheta = \frac{2\pi \cdot 8,5}{\alpha}$, wo $\alpha = 3$ Fuß $= \frac{1}{3}$ C ſeyn muß. Dies giebt $t = \frac{1}{6}\pi \cdot 8,5$. Die Steigröhren gehen alle faſt vertical aufwärts, ſo daß man $f = l$ ſetzen kann. Wollte man die Krümmung der Kropfröhren in Betrachtung ziehen, ſo möchte $\frac{f}{l}$ etwa $\frac{14}{15}$ geſchätzt werden können. Hauptſächlich aber kommt es noch auf das Verhältniß $\frac{c}{a}$ an. Die Kropfröhren ſind im Durchmeſſer 3 Zoll, und die Stiefel zum Theil $6\frac{3}{4}$, zum Theil $7\frac{3}{4}$ Zoll weit. Der letztern ſind drey, die zu einer Equipage gehören, aber Belidor ſagt nicht deutlich, zu welcher von beyden. Wenn ich mich nach den 9 übrigen Stiefeln und ihren Kropfröhren richte, ſo wird

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{6\frac{3}{4}} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}.$$

Dieſe Vorausſetzungen geben nun

$$\omega b = \frac{14 \cdot 16 \cdot 8,5^2}{15 \cdot 4 \cdot 81 \cdot 36} \cdot g\pi^2 = \frac{14 \cdot 8,5^2}{15 \cdot 81 \cdot 9} \cdot 149$$

$= 3,9$. Nun iſt an dieſer Maſchine $b = 1\frac{1}{2}$ Fuß, alſo wird $\omega = 2,6$, und $\lambda = \frac{36}{26}$, $\lambda f = \frac{36}{26} \cdot 70 = 97$. Um nun auch für das Saugwerk die zugehörige Zahl ν zu finden, ſuche man ψ aus der Gleichung

chung $\psi = \frac{\varepsilon t \sqrt{g}}{a\sqrt{2l}}$. Nach dem Riß ſind die Saugröhren im Durchmeſſer halb ſo weit, als die Stiefel, alſo iſt $\frac{\varepsilon}{a} = \frac{1}{2}$, und jener Länge beträgt ohngefehr 15 bis 16 Fuß. Man erhält alſo $\psi = \frac{\frac{1}{6} \cdot 8{,}5 \cdot \sqrt{15{,}1}}{2 \cdot 4\sqrt{2}} \cdot \pi = \frac{8{,}5 \cdot 3{,}886}{48 \cdot \sqrt{2}} \cdot \pi = 0{,}486 \cdot \pi$, und dieſer Bogen faſſet $0{,}486 \cdot 180° = 87° \, 29'$. Der zugehörige Querſinus iſt $= 0{,}95609 = \frac{b\omega}{e}$; und weil $e = 8$ Fuß, ſo wird $b\omega = 7{,}6$, und $\omega = 5$, $\nu = 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{6}{5}$, $\nu e = \frac{6}{5} \cdot 8 = 9{,}6$ beynahe $= 10$; und man erhält $\nu e + 3 + \lambda f = 110$. Wenn man nun annimmt, daß die angebrachte Kraft ſich auf beyde Equipagen gleich vertheilt, ſo wäre für die erſte Equipage die würkliche Waſſermenge $= \frac{1}{2} \cdot \frac{304403}{\nu e + 3 + \lambda f} = 1384$ Cubikfuß. Für die zweyte Equipage fallen ν und λ etwas anders aus, weil $\mu = 6$ iſt, und die würkliche Waſſermenge wird noch geringer. Man erhält $t = \frac{1}{6} \vartheta = \frac{1}{9} \pi \cdot 8{,}5$, $\omega b = \frac{4}{9} \cdot 3{,}9 = 1{,}7$, und $\omega = \frac{2}{3} \cdot 1{,}7 = 1{,}1$, alſo $\lambda = \frac{21}{11}$ beynahe $= 2$, und $\lambda f = 140$. Ferner wird $\psi = \frac{2}{3} \cdot 0{,}486 \cdot \pi = 0{,}324 \cdot \pi$, und dieſer Bogen faſſet $58° \, 19'$. Sein Querſinus iſt $= 0{,}4748 = \frac{b\omega}{e}$, alſo wird $b\omega = 3{,}7984$, und $\omega = 2{,}5$, $\nu = \frac{35}{25}$, $\nu e = 11$. Man erhält alſo

$ve + 3 + \lambda f = 154$, und für die zweyte Equipage wird die Waſſermenge $= \frac{1}{2} \cdot \frac{304403}{154} = 988$ Cub. F. Dies giebt für beyde Equipagen zuſammen 2372 C. Fuß, und weil jedes abgeſonderte Werk für ſich ſo wie das andre eingerichtet iſt, ſo muß die ganze Maſchine 4744 Cub. Fuß ſtündlich heben. Weil nun nach Belidors Bericht dieſe Waſſermenge nur 2400 Cub. Fuß ſtündlich betragen hat, ſo muß dies noch andre Urſachen zum Grunde gehabt haben, weil der engen Kropfröhren und ſchnellen Kolben-Bewegung ungeachtet die Waſſermenge doch noch beynahe doppelt ſo groß ſeyn müſte. Die Gleichung $naa = \frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi\lambda b T}$ giebt aa, wenn n beſtimmt iſt. Es hat aber die Pariſer Maſchine wegen der dreyfachen Kurbel die Unbequemlichkeit, daß bey jeder Equipage bald 2 Kolben zugleich drücken, bald aber nur einer drückt. Man ſiehet wohl, daß dies gar nicht vortheilhaft ſey, und die Bewegung der Maſchine ſehr ungleichförmig mache. Will man indeſſen die eben erwehnte Formul auf jede Equipage für ſich anwenden, ſo muß man $n = 1\frac{1}{2}$ ſetzen, weil bey jedem Umlauf der Kurbel alle drey Stiefel einmahl drucken, und es alſo eben ſoviel iſt, als wenn beſtändig $1\frac{1}{2}$ Paar drücken. Dieſe Vorausſetzung giebt für die erſte Equipage $aa =$

$$\frac{1384 \cdot \frac{1}{6} \cdot 8,5}{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1800} = \frac{1384 \cdot 8,5}{6 \cdot 9 \cdot 450} = 0,415689,$$

und $a = 0,645 = 7$ Zoll 9 Linien. Für die zweyte Equipage wird $aa = \frac{988 \cdot \frac{1}{9} \cdot 8,5}{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1800} = \frac{988 \cdot 8 \cdot 5}{9 \cdot 9 \cdot 450}$
$= 0,$

$=0,2304$, und $a = 0,48 = 5$ Zoll 9 Linien. Weil nun die Pariſer Maſchine 3 Stiefel von $7\frac{3}{4}$ Zoll Durchmeſſer, und 9 Stiefel von $6\frac{3}{4}$ Zoll führt, ſo ergiebt die Vergleichung, daß 3 derſelben, dafern ſie bey dem einen Werk zur erſten Equipage gehören das richtige Maaß im Durchmeſſer haben, was ſie nach Beſchaffenheit der übrigen Einrichtung haben müſſen, drey andre dagegen enger ſind als nöthig iſt, ihrer ſechs aber um einen Zoll zu weit ſind. Die Steigröhren hätte man nach Proportion der Kropfröhren $3\sqrt{2} = 4\frac{1}{4}$ Zoll weit machen müſſen: man hat ſie aber 6 Zoll weit gemacht, und dadurch gewiſſermaſſen das wieder gut gemacht, was die engen Kropfröhren ſchaden. Indeſſen macht dies doch die Bewegung des Waſſers ſehr unregelmäßig. Ueberdem ſind an den Druckſtiefeln alle Ventile Muſchel-Ventile, die wie ſchon bekannt iſt, ſehr nachtheilig ſind. Dieſerwegen habe ich bey Beſtimmung des Verhältniſſes $\frac{c}{a}$ das Verhältniß des Durchmeſſers der Kropfröhren zum Durchmeſſer der engſten Stiefel zum Grunde geſetzt, da ich ſonſt $\frac{cc}{aa} = \frac{36}{2.49}$ ohngefehr $= 2\frac{2}{5}$ hätte annehmen müſſen, wenn ich die Weite der Steigröhre hätte zum Grunde ſetzen und auf den Umſtand Rückſicht nehmen wollen, daß wechſelsweiſe zwey Stiefel zugleich drücken. Dies würde die berechnete Waſſermenge etwas gröſſer gemacht haben.

Ob nun gleich die Stiefel nicht genau die Abmeſſungen haben, die ſie vermöge der übrigen Einrichtung der Maſchine haben müſten; ſo ſiehet man doch

wohl, daß der große Unterſchied zwiſchen der berechneten und würklichen Waſſermenge nicht daher allein rühren kann. Die Summe der Querſchnitte aller 6 Stiefel müſte bey jedem abgeſonderten Werk nach der Rechnung ſeyn: $\frac{1}{4}\pi(3 \cdot 7{,}75^2 + 3 \cdot 5{,}75^2) = \frac{1}{4}\pi \cdot 284{,}77$; und ſie iſt würklich bey dem einen Werk $\frac{1}{4}\pi \cdot 6 \cdot 6{,}75^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 273{,}375$, bey dem andern aber $\frac{1}{4}\pi(3 \cdot 7{,}75^2 + 3 \cdot 6{,}75^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 316{,}875$. Bey dem erſten Werk iſt ſie alſo würklich noch etwas kleiner, als die Rechnung vorausſetzt, und bey dem andern etwas größer: aber die Verſchiedenheit iſt ſo wenig beträchtlich, daß die Maſchine durch einander gerechnet doch beynahe die berechnete Waſſermenge geben müſte. Aber alsdenn würde die Maſchine auch einer ſehr großen Gewalt ausgeſetzt ſeyn. Für beyde Equipagen der kleinen Bewegung gab bie Rechnung $\lambda = \frac{3}{2}\frac{6}{6}$, für beyde Equipagen der großen Bewegung aber $\lambda = 2$. Für jene iſt alſo der Waſſerdruck $1\frac{1}{2}$ mal, für dieſe 2 mal größer als derjenige, worauf man ſonſt zu rechnen gewohnt war. (Man vergleiche den 354 §.) In der That haben auch alle Theile dieſer Maſchine vor ihrer Verbeſſerung ſich in einem ſolchen Zuſtande befunden, als wären ſie völlig auseinander zu reiſſen bereit. Dies war eben die Urſache, weswegen man das große vor dem Waſſerrade befindliche Schutzbrett nie ſo weit erhöhen durfte, daß die ganze Fläche der Schaufeln von dem Stoß des Waſſers getroffen werden konnte. Dies zog das Zerbrechen der Kurbeln nach ſich, und drohete der ganzen Maſchine den Untergang. (Belidor a. a. O. 1120 u. 1123 §.) Demnach liegt nun die Urſache klar vor Augen, weswegen die Maſchine gewöhnlich nur 100 Waſſerzolle ausgegeben hat,

hat, da ſie ſtatt deſſen, wenn die Schaufeln die völlige Gewalt des Stroms auffangen, wie die Rechnung vorausſetzt, beynahe nochmal ſo viel heben müſte. Wenn die Maſchine 100 Waſſerzolle gab, ſo lief das Waſſerrad beynahe 2mal in einer Minute um (a. a. O. 1121 §.). Weil aber $\vartheta = \frac{2\pi \cdot 8,5}{3}$ seyn muß, wenn die Schaufeln den ganzen Waſſerſtoß auffangen, ſo muß das Rad eigentlich $\frac{3}{2\pi \cdot 8,5}$ $= 0,0562$ mal in einer Secunde (382 §. Mech.) alſo $0,0562 \times 60 = 3,372$ mal in einer Minute umlaufen. Im Jahr 1737 am 26 Dec. hat man, um zu verſuchen, ob die Maſchine ſchneller laufen würde, die Schutzbretter mehr erhöhet, und befunden, daß würklich das Waſſerrad an dem einen Werk 3,2 mal, und an dem andern 3,33 mal in einer Minute umgelaufen. Hätte man es alſo wagen können, die Maſchine der ganzen Gewalt des Stroms auszuſetzen, ſo hätte ſie ſtatt 100 Waſſerzolle auf 166 bis 170 Waſſerzolle gegeben, alſo nahe an 3984 Cub. Fuß. Die Rechnung gab 760 Cub. Fuß. mehr, welches noch nicht der ſechſte Theil der berechneten Menge iſt. Wenn man nun erwegen will, daß die Summe der Querſchnitte aller Stiefel durch einander gerechnet etwas größer ſey, als die Theorie fordert, und daß dies einen Theil der Kraft wegnehme; daß ferner die Friction noch wohl etwas größer ſeyn könnte, als ſie oben in Anſchlag gebracht worden; und daß insbeſondre die Muſchel-Ventile ein ſehr beträchtliches Hinderniß der Bewegung ſind; ſo iſt es nicht mehr zu verwundern, daß die Maſchine in

voller Arbeit etwa den ſechſten Theil weniger Waſſer giebt, als ſie nach der Rechnung thun ſollte. Ueberdem ſehe ich aus dem 1112 §. des angeführten Belidorſchen Werks, daß man die Saugſtiefel (nicht die Saugröhren, wie es in der Ueberſetzung heiſt) alle um $\frac{1}{4}$ Zoll weiter gemacht hat, als die Druckſtiefel; damit die Saugwerke ſicher ſoviel ja noch etwas mehr Waſſer in den Behälter heben, als die Druckwerke nöthig haben. Alſo brauchen die Saugwerke etwas mehr Kraft, als die obige Rechnung vorausſetzt.

Ich muß noch ein paar Worte beyfügen, die Belidors Verbeſſerung dieſer Maſchine betreffen. Seine Hauptverbeſſerung beſtehet darin, daß er die Steigröhren ſo weit als die Stiefel macht; auf ſolche Art wird das Verhältniß $\frac{c}{a} = 1$, wenn jedesmahl nur ein Kolben drückt, oder überhaupt $\frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, wenn jedesmahl n Kolben zugleich das Waſſer in einerley Steigröhre hinauf drücken. Es iſt gewiß, daß hiedurch die Waſſermenge anſehnlich vermehrt, und der Druck vermindert werden kann, wie aus den obigen Formuln bekannt iſt. Aber bey dem allen iſt es ſo nothwendig nicht, daß c gegen a ſehr groß ſey, wenn nur t nicht zu klein iſt. Weite Steigröhren erfordern mehr Koſten als engere, dieſe Koſten kann man vermeiden, wenn man das Zwiſchengeſchirr wie es gewöhnlich heiſt, oder die übrige mechaniſche Einrichtung der Kunſt ſo anordnet, daß t hinlänglich groß wird. Gemeiniglich genügt es bey Druckwerken, die durch Waſſerräder getrieben wer-

werden, $t = \vartheta$ annehmen, und die Maſchine wird ſo ſimpel, wie man es immer verlangen kann, ſo daß man auf mehr als eine Art gewinnet. Die übrigen bey dieſer Gelegenheit vom Hrn. Belidor vorgeſchlagenen Einrichtungen der Stiefel, und der Art, ſie mit den Steigröhren zu verbinden, ſo daß ſtatt der ſonſt gewöhnlichen Kropf- und Gabel-Röhren der von ihm beſchriebene Recipient gebraucht wird, die ausgebauchten Hüte der Stiefel, um den Ventil-Oefnungen völlig die gehörige Weite zuverſchaffen, ſind vortreflich, und verdienen durchgängige Nachahmung.

397 §.

Wenn mich nicht die Grenzen des Raums, worin ich mich einſchränken muß, hinderten; ſo würde ich nicht umhin können, eine nähere Beſchreibung und Beurtheilung der Maſchine zu Marly hieher zu ſetzen. Es wird freylich kein groſſer Herr ſo leicht wieder eine Maſchine bauen laſſen, die mehr als 8 Millionen Livres gekoſtet hat, (Belidor a. a. O. III Buch IV Cap. 1093 §.) bey deren Erbauung 1800 Leute 7 Jahr gearbeitet haben, zu deren nöthigen Aufſicht beſtändig 60 Leute gehalten werden, wovon jedesmahl ihrer neun die Nacht hindurch Wache halten müſſen, die an Materialien 1790000 Pf. Kupfer, eben ſo viel Bley, 20mahl ſo viel Eiſen, und 100mahl ſo viel Holz erfordert hat (*Weidleri* Tractatus de machinis hydraulicis toto terrarum orbe maximis Marlyenſi & Londinenſi Vitemb. 1733. §. 29. pag. 21.) die übrigen zu den ſteinernen Pfeilern und Schwibbögen der damit verbundenen Waſſerleitung gebrauchten Materialien ungerechnet.

Dieſerwegen dürfte es, wie Belidor ganz recht urtheilet, lächerlich ſcheinen, um deswillen eine Beſchreibung davon zu geben, damit ſie ein Muſter der Nachahmung werden könne. Allein mich dünkt, daß ein Werk, wozu nur ein Königlicher Schatz den nöthigen Aufwand hergeben kann, ein Werk, welches auf ſo vorzügliche Art zeiget, was die Kunſt auszurichten vermag, auch noch ganz andrer Gründe halber einer Erwähnung würdig ſey, und wenn es auch nur um deswillen geſchehen ſollte, damit man im Stande ſey, nach einer richtigen Theorie zu prüfen, ob das Werk diejenige Vollkommenheit habe, der es fähig iſt, oder wie weit es noch davon entfernt ſey. Dieſe Prüfung kann bey einem ſo ſehr zuſammen geſetzten Kunſtwerk nicht ſo ganz kurz ſeyn, und man wird aus den beyden Proben, die ich von der Pariſer Maſchine an der Brücke de Notre Dame und der Samaritaine gegeben habe, abnehmen, daß eine ſehr genaue Kenntniß der ganzen Einrichtung dazu erfordert werde. So vollſtändig kann ich hier die Maſchine zu Marly nicht beſchreiben, und noch weniger eine ganz genaue Berechnung anſtellen, zumal da ich nicht einmal bey den Schriftſtellern, die dieſer Maſchine erwähnen, übereinſtimmige Nachrichten finde. Ich werde indeſſen doch ſuchen, eine zwar kurze, aber doch ſo deutliche Beſchreibung davon zu geben, daß man von der Art, wie die Maſchine würkt, und von der Größe ihres Effekts einigermaßen urtheilen könne. Herr Daniel Bernoulli erwähnt ihrer in der Hydrodynamica Sect. IX. §. 27. pag. 182. und ich läugne nicht, daß mich dieſe Stelle vorzüglich bewogen habe, eine genauere Prüfung anzuſtellen, wie weit die Maſchine wohl von dem-

demjenigen Grade der Vollkommenheit entfernt ſeyn mögte, den man ſonſt bey einer vortheilhaft eingerichteten Waſſerkunſt erwarten würde. Herr Bernoulli vergleicht den Effekt dieſer Maſchine mit der Kraft des Waſſerſtoſſes, welche ſie treibt; er nimmt die data dazu aus der vorhin angeführten Weidleriſchen Schrift, und bringt am Ende heraus, daß die Maſchine nur $\frac{1}{58}$ des Effekts leiſte, den ſie leiſten würde, wenn ſie aufs vollkommenſte eingerichtet wäre, und nichts von der angebrachten Kraft unnöthig verlohren gienge. Dies Reſultat ſetzte mich würklich in einige Verwunderung, und ich glaube, daß dies wohl einen jeden eben ſo begierig machen wird, zu erfahren, woher denn wohl ein ſo unerwartet großer Verluſt der Kraft entſtehen könne. Ob man der Rechnung des Herrn Bernoulli zu trauen Urſache habe, wird folgendes mit mehrerm ergeben.

398 §.

Die Maſchine wird durch 14 unterſchlächtige Waſſerräder getrieben, die in einem Arm der Seine hängen; und ihre Verrichtung, im ganzen genommen, beſtehet darin, daß ſie das Waſſer aus dem Fluß auf den Boden eines Thurms hinauf treibt, von welchem es hiernächſt in einer von Steinen aufgeführten Waſſerleitung in die Königlichen Gärten zu Marly (vordem auch nach Verſailles und Trianon), gebracht wird. Der Behälter auf dem Boden des Thurms liegt 502 Fuß höher, als der Fluß, und iſt von ihm 614 Toiſen, alſo 3684 Fuß weit entfernt. Der Baumeiſter, Namens Rannequin, aus dem Lütticher Lande, (er ward dem

Könige und deſſen erſtem Miniſter Colbert durch einen Lütticher von Adel, Namens de Ville, empfohlen, und arbeitete nachher auf gewiſſe Weiſe unter des de Ville Aufſicht. Daher ſchreiben einige dieſem de Ville die Erfindung und ganze Anordnung der Maſchine zu. Allein Weidler ſowohl, als Belidor verſichern, daß Rannequin der wahre Urheber ſey,) ſahe wohl ein, daß es unmöglich ſeyn würde, das Waſſer in ununterbrochenen Leitröhren auf dieſe Höhe, und dies auf eine ſo weite Strecke zu bringen, weil, wenn dies auch nicht ſonſt ſeine groſſen Schwierigkeiten gehabt hätte, weder Maſchine noch Röhren den gewaltſamen Druck hätten aushalten können. Er theilte alſo die ganze Strecke längſt der Anhöhe, die das Waſſer hinan ſteigen ſollte, in drey Abſätze. In einer Höhe von 150 Fuß über den Fluß wurden 2 Schöpfbehälter neben einander angelegt, die von den Waſſer-Rädern 100 Toiſen weit entfernt ſind. In einer Höhe von 175 Fuß über die beyden erſten Schöpfbehälter legte man zwey andre an, die 224 Toiſen weit von den erſten Schöpfbehältern, alſo 324 Toiſen weit von dem Fluß entfernt ſind. Der Boden des Thurms auf der Spitze der Anhöhe liegt alſo noch 177 Fuß höher, als die beyden höchſten Schöpfbehälter, und iſt von denſelben 290 Toiſen entfernt. Die von Mauerwerk aufgeführte Waſſerleitung iſt 330 Ruthen lang, und hat 36 Schwibbögen. Mit den 14 Waſſerrädern ſind nun erſtlich unmittelbar über dem Fluß 64 Druckwerke mit zugehörigen Saugröhren verbunden, welche das Waſſer aus dem Fluß ſchöpfen, und durch Leitröhren in die erſten 150 Fuß hoch erhabenen Schöpfbehälter hinauf drücken.

Es

Es iſt nemlich jedes Rad auf beyden Seiten mit einem Krumzapfen verſehen, thut zuſammen 28 Krumzapfen. Von dieſen ſind ihrer 8 dazu angeordnet, die erwehnten 64 Druckwerke zu treiben, und ein jeder treibt eine ſo genannte Equipage von 8 Druckwerken. Mit den übrigen 20 Krumzapfen ſind eben ſo viele Feldgeſtänge verbunden. Davon erſtrecken ſich ſieben bis in den kleinſten der beyden untern Schöpfbehälter, jedes Geſtänge treibt daſelbſt 7 neue Druckwerke, die das Waſſer von dort bis in den kleinſten der beyden obern Behälter hinauf drücken, thut zuſammen 49 Druckſtiefel. Die übrigen 13 Feldgeſtänge erſtrecken ſich durch den gröſten der beyden untern Schöpfbehälter bis in den gröſten der beyden obern Behälter. Sie treiben in dem untern Schöpfbehälter noch 40 Druckwerke, (nach dem Weidler a. a. O. 25 §, nach dem Belidor a. a. O. 1100 §. nur 30,) die das Waſſer von dort bis in den gröſten obern Schöpfbehälter bringen, und aus dieſem wird es durch 82 neue mit den Feldgeſtängen verbundene Druckwerke bis auf den Boden des Waſſerthurms gebracht. Dies ſind die Haupt-Verrichtungen der Maſchine. Auſſerdem hat ſie noch andre Neben-Verrichtungen, die darin beſtehen, daß ſie noch 44 beſondre Saugwerke treibt. Mit jeder der 8 Equipagen unten am Fluß iſt ein Saugwerk verbunden, welches in einem dazu angeordneten Keſſel beſtändig Waſſer unterhält zur Bedeckung der obern Stiefel-Mündungen, um die Leder beſtändig naß zu erhalten, und der Luft den Zugang zu verſchlieſſen. Nicht weit von dem kleinſten untern Schöpfbehälter befindet ſich ein Brunnen, worin das Waſſer verſchiedener aus den in der

Nachbarſchaft befindlichen Bergen hervorkommender Quellen geſammlet wird. Hieſelbſt ſind 28, (nach dem Belidor 1101 §. ſind es nur 8,) Saugwerke angeordnet, die ein Theil des Feldgeſtänges treibt, und vermittelſt derſelben das Waſſer bis zum untern Schöpfbehälter bringt. Hinter den oberſten Schöpfbehältern befindet ſich noch ein Nebenbehälter, der das Waſſer ſammlet, was durch die kleinen Riſſe und Oefnungen der oberſten Leitröhren verlohren geht, und aus demſelben wird es durch 16 Saugwerke wieder in den Hauptbehälter gebracht, die gleichfalls vom Feldgeſtänge getrieben werden.

399 §.

Die Waſſerräder ſind, nach dem **Weidler**, 36 Fuß hoch, und führen 32 Schaufeln, die ein Fuß hoch und 4 Fuß lang ſind. (a. a. O. 36 §. 28 S.) Die Geſchwindigkeit des anſchlagenden Waſſers beträgt 20 Fuß in einer Secunde, und die Waſſerräder laufen gewöhnlich in einer Minute zweymal um. Will man nun, vermittelſt der allgemeinen Formul, für die Gränze der Waſſermenge $= \frac{400C^3yy}{3g(e+f)}$ mit Beyſeitſetzung der Friction (395 §.) einen Ueberſchlag machen, wie viel Waſſer die angebrachte Kraft höchſtens auf die Höhe von 500 Fuß bringen könnte, ſo muß man C = 20 Fuß, alſo $C^3 = 8000$ Fuß, und $yy = 4 \times 14 = 56$ Q. F. $e+f = 500$ ſetzen. Dies giebt $M = \frac{4}{5} \cdot \frac{8000 \cdot 56}{3g} = 7912$ Cub. Fuß. Nach dem Belidor hat die Maſchine ehedem 779 Cub. Toiſen Waſſer binnen 24 Stunden,

den, oder ungefähr 292 Waſſerzolle, nach Marly gebracht, (a. a. O. 1103 §.) folglich alle Stunden 7011 Cub. Fuß. Wenn alſo jene Berechnung von der Gränze der Waſſermenge ihre Richtigkeit hätte, ſo wäre die Maſchine eine der vollkommenſten, die je erbauet worden, weil die würkliche Waſſermenge nicht einmal um den achten Theil ihrer Gränze von letzterer unterſchieden wäre. **Belidor** ſetzt hinzu, daß jetzt die Maſchine gewöhnlich nur halb ſo viel Waſſer gebe, vermuthlich, weil oft Ausbeſſerungen nöthig ſind, und nicht alle Pumpen arbeiten können. **Weidler** berechnet aus der Umlaufs-Geſchwindigkeit der Räder und den Abmeſſungen der Pumpen die würkliche Waſſermenge für jede Stunde zu 211200 Pinten (a. a. O. 32 §. 25 S.), alſo zu 6033 Cub. Fuß. Jedoch iſt dies nach ſeiner Rechnung nur die Waſſermenge, welche die unterſten 64 Druckſtiefel in die untern 150 hoch liegenden Behälter bringen. Vermuthlich bringen die obern Pumpen nicht alles bis auf den Thurm, und deswegen, meint **Weidler**, müſſe man etwa den vierten Theil von obiger Waſſermenge abrechnen: es blieben demnach etwa 4500 Cub. Fuß. Nach dem **Belidor** wären es jetzt nur ungefähr 3500 Cub. Fuß. Weil aber die Maſchine ehedem würklich binnen 24 Stunden 779 Cubik-Toiſen Waſſer nach Marly gebracht hat, wie auch **Weidler** ſelbſt aus des de la Force Nouvelle Deſcription des chateaux & Parc de Verſailles & de Marly T. 2. pag. 265. anführt, ſo muß man dieſe Waſſermenge wohl zum Grunde legen. Es wären dies täglich 168264 Cub. Fuß, oder 11778480 Pfund. Hr. **Bernoulli** ſagt, nach Hn. **Weidlers** Bericht hebe die Maſchine binnen 24

Stun-

Stunden 11700000 Pfund, er hat vermuthlich dieſe als eine runde Zahl ſtatt der eben erwehnten genommen. Ueberdem nimmt auch Hr. Bernoulli die Berechnung der Kraft aus der angeführten Weidleriſchen Schrift (a. a. O. 37 §. 30. 31. 32. S.) zum Grunde ſeiner Rechnung als richtig an, und ich werde nun zeigen, wie Hr. Weidler ſeine Rechnung anſtellt.

Die von mir gebrauchte Formul für die Grenze der Waſſermenge ſetzt voraus, daß jedesmahl nur eine Schaufel des Waſſerrades den Waſſerſtoß nach ſenkrechter Richtung auffange; allein nach Weidlers Bericht werden beſtändig 6 Schaufeln vom Waſſer getroffen. Die Räder ſind nemlich ſo aufgehängt, daß das Waſſer auf einem geneigten Gerinne in die Schaufeln ſtürzt, und man kennt dieſe Einrichtung aus dem VII. Abſchnitt. Dies macht freylich die Kraft des Stoſſes etwas gröſſer, als meine Rechnung vorausſetzt: allein, wenn man erwegen will, daß das Waſſer, nachdem es den Stoß an die erſte Schaufel vollendet hat, gegen die folgenden nicht weiter, als mit ſeinem Gewicht, und noch dazu nur mit ſeinem reſpectiven Gewicht würken kann; ſo ſiehet man wohl, daß wegen dieſer Urſache die Kraft wenig gröſſer in Anſchlag kommen könne. Geſetzt aber, man wollte ſie auch dieſerwegen doppelt ſo groß in Anſchlag bringen, ſo wäre doch die Grenze der Waſſermenge nur nochmahl ſo groß, als ſie oben berechnet iſt. Der Verluſt der Kraft beträgt alſo gewiß nicht viel über die Hälfte des ganzen, wenn man ja die Kraft für unnütz verlohren rechnen will, welche ſo groſſe Feldgeſtänge zu ſchieben erfordert wird, deren man bey einer ſolchen

Einrichtung doch nicht entbehren kann; und die dazu nöthig iſt, eine ſo groſſe Menge Waſſer 614 Toiſen weit auch nach horizontaler Richtung fortzutreiben, das doch ſicher vermöge ſeiner Trägheit, widerſtehet.

In der angeführten Weidleriſchen Schrift finde ich aber eine ganz andre Berechnung der Kraft, und vermöge derſelben müſte freylich die Grenze der Waſſermenge weit gröſſer ſeyn. Er nimmt an, die unterſte Schaufel werde in ihrem verticalen Stande vom Waſſer ſenkrecht getroffen, die übrigen aber bis zur ſechſten, von unten auf gerechnet, unter einem Winkel, der mit dem Neigungswinkel der Schaufel gegen den Horizont einerley iſt. Weil nun das Rad 32 Schaufeln führt, ſo ſchneiden die Ebenen der Schaufeln in der Axe des Rades einander unter Winkeln von 11° 15′. Steht nun die unterſte Schaufel vertical, ſo ſind die übrigen 5 unter folgenden Winkeln gegen den Horizont geneigt

die zweyte	78° 45′	die fünfte	45° 0′
die dritte	67° 30′	die ſechſte	33° 45′
die vierte	56° 15′		

Nun berechnet Hr. Weidler erſtlich den ſenkrechten Stoß gegen die unterſte Schaufel nach der Regel des 98 §., und vermindert ihn hernach nach und nach in dem Verhältniß des ganzen Sinus zum Sinus der erwehnten Neigungswinkel, zieht ſodann alle ſechs Reſultate in eine Summe zuſammen, und nimmt dieſe für die Kraft des Waſſerſtoſſes an. Gegen dieſe Berechnung iſt gleich anfangs zu erinnern, daß der Ausdruck für den Stoß gegen die unterſte Schaufel nach der Regel des 103 und 104 §. in dem Verhält-

hältniß vom Quadrat des ganzen Sinus zum Quadrat vom Sinus des Anſtoßwinkels hätte vermindert werden müſſen: denn die Fläche der Schaufeln iſt hier das, was im 103 und 204 §. *yy* war. Doch geſetzt, Herr Weidler hätte hier richtig gerechnet, (der Fehler wird nachher wieder aufgehoben, wie ich gleich zeigen werde), ſo würde doch die Vorausſetzung dabey zum Grunde liegen, daß das Waſſer im Gerinne mit ſeiner ganzen Stärke in alle ſechs Schaufeln würken könne. Weil dies gewiß nicht ſeyn kann, ſo iſt offenbar, daß auf die Art die Kraft viel zu groß in Anſchlag komme. Aber noch mehr, Hr. Weidler berechnet den Stoß gegen die unterſte Schaufel ſo, als wenn ſie ruhete, und erinnert ſich nicht daran, daß das Waſſer in die umlaufende Schaufel nur mit ſeiner reſpectiven Geſchwindigkeit würken kann. Ja er bringt ſelbſt bey dieſer Vorausſetzung den ſenkrechten Stoß noch aus einem andern Grunde etwas zu groß heraus. Die der Geſchwindigkeit des anſchlagenden Waſſers von 20 Fuß

zugehörige Höhe iſt $\frac{20^2}{4 \cdot 15,1}$ (32 §. Mech.) = 6,6 Fuß, und die Fläche der Schaufel = 4 Qu. F., alſo der Stoß = dem Gewicht einer Waſſerſäule von $4 \times 6,6 = 26,4$ C. F. = 1848 Pf.; aber Hr. Weidler findet 2320 Pf. Denn er nimmt mit Mariotte an, die Höhe des freyen Falles in der erſten Secunde betrage 12 Fuß. (M. ſ. den am Ende dieſes Buchs beygefügten Zuſatz zum 66 §. Mech.) und dieſe Vorausſetzung giebt in der Geſchwindigkeit des Waſſers zugehörige Höhe $\frac{400}{48} = 8,3$ Fuß, den ſenkrechten Stoß aber $= 4 \times 8,3 \times 70 = 2324$ Pf.,

Pf., welches mit der Weidleriſchen Zahl bis auf 4 Pf. übereinkommt. Die Berechnung der übrigen fünf Weidleriſchen Zahlen ſetze ich Kürze halber nicht her, und bemerke nur, daß am Ende die Summe 11592 Pf. herauskommt, welches die nach Herrn Weidlers Meynung am Umfange eines jeden Rades angebrachte Kraft ſeyn ſoll.

Hiernächſt berechnet Hr. Weidler das Moment, womit dieſe Kraft das Rad zu drehen ſtrebt. Wäre P die Summe der ſenkrechten Preſſungen gegen die ſechs Schaufeln, und r der Halbmeſſer des Rades, ſo wäre $r \cdot P$ das erwähnte Moment. Allein Herr Weidler rechnet ſo: es ſey p der vorhin von ihm berechnete Stoß gegen eine der gegen den Horizont geneigten Schaufeln, und η der Anſtoßwinkel; ſo wird das Moment des Stoßes gegen dieſe Schaufel $= p \cdot r \sin \eta$. Hiedurch wird alſo der Druck gegen jede ſchiefe Schaufel nochmal in dem Verhältniß des ganzen Sinus zum Sinus des Anſtoßwinkels vermindert, und der vorhin bemerkte Fehler aufgehoben, ſo daß Hr. Weidler die einzelnen Momente für alle ſechs Schaufeln ſeiner Vorausſetzung gemäß richtig findet. Ich will die Summe dieſer Momente $= S$, den Halbmeſſer des Krumzapfens $= \varrho$ ſetzen, ſo giebt dies am Umfang des Krumzapfens eine Kraft $V = \frac{S}{\varrho}$, und nach Hn. Weidlers Bericht iſt $\varrho = 2\frac{1}{2}$ Fuß. Seine Rechnung giebt $V = 71471$ Pf. und daß dieſe Zahl viel zu groß ſey, läſt ſich ſo überſehen.

Die Räder laufen in einer Minute zweymal (Weidler a. a. O. 32 §. 25 S.) und ihr Halbmeſ-

ſer

ſer iſt 18 Fuß groß, alſo iſt die Geſchwindigkeit der Schaufeln $= \frac{2\pi . 18}{30''}$ = 3,7 Fuß faſt genau $\frac{1}{6}.20$ Fuß, alſo nur halb ſo groß, als ſie bey der vortheilhafteſten Einrichtung ſeyn müſte. Indeſſen giebt dies die reſpective Geſchwindigkeit des Waſſers = 16,3 Fuß, die zugehörige Höhe iſt $\frac{16,3^2}{4.15,1} =$ 4,4, und der ſenkrechte Stoß gegen eine Schaufel iſt eigentlich = 4,4 × 4 × 70 = 1232 Pf. Will man nun um deswillen, weil mehr als eine Schaufel vom Waſſer getroffen wird, den Stoß etwas gröſſer rechnen, ſo wird man ihn doch der angeführten Gründe halber ſchwerlich mehr als doppelt ſo groß ſchätzen können, zumahl da das Rad ſehr eng geſchaufelt iſt, und nach der Regel des 117 §. nur 19 bis 20 ſtatt 32 Schaufeln haben müſte. Wenn ich alſo 2464 Pf. annehme, ſo giebt dies am Umfang des Krumzapfens die Kraft $V = \frac{36}{5} . 2464 =$ 17741 Pf. Hr. Weidlers Zahl 71471 Pf. iſt alſo gewiß wenigſtens 4 mahl gröſſer, als ſie nach einer richtigen Beſtimmung ſeyn ſollte. Multipliciret man die Weidleriſche Zahl 71471 mit 14 als der Anzahl aller Räder, ſo erhält man 1000594 Pf. für die geſammte Gewalt, womit alle Krumzapfen zuſammen nach Hr. Weidlers Rechnung in die Geſtänge würken. Hiebey aber muß ich bemerken, daß dies noch nicht die Stärke des Drucks ſeyn würde, womit die Kolben gegen das Waſſer in den Stiefeln preſſen. Die untern 64 Kolben haben 4 Fuß Hub, (Weidler a. a. O. 32 §. 24 S.) alſo durchläuft jeder Kolben einen Weg von 8 Fuß binnen der

Zeit, da die Warze des Krumzapfens einen Weg von $2\pi \cdot 2\frac{1}{2} = 15,7$ Fuß durchläuft, und es iſt $\frac{15,7}{8}$ faſt $= 2$. Der geſammte Druck aller Kolben wäre alſo 2×1000594 Pf., wenn alle einerley Hub hätten, und Hrn. Weidlers Zahl die richtige wäre.

400 §.

Es ſey ABHI wie im 345 §. der Stiefel einer 65
Druckpumpe, der Druck des Kolbens gegen CD ſey Fig.
$= K = \frac{1}{4}\pi aak$, wo die Buchſtaben die Bedeutung des 350 §. haben; die Steigröhre KHPQ ſey ſehr kurz, und die Oefnung PQ ſey ſehr wenig über die Horizontalfläche FE erhaben, ſo daß $f = EG$ in Vergleichung mit k ungemein klein iſt: überdem ſey die Oefnung PQ in Vergleichung mit den Querſchnitten des Stiefels ungemein klein: ſo wird das Waſſer beynahe beſtändig mit der Geſchwindigkeit hervorſprützen, die der Höhe k zugehört; und wenn es nach verticaler Richtung aufwärts ſpringt, ſo wird es, alle Hinderniſſe beyſeit geſetzt, auf die Höhe $= k$ ſteigen. Von der Richtigkeit dieſes Satzes kann man ſich ganz kurz, vermittelſt der Differentialgleichung des 345 §. überzeugen. Es war nemlich $n\upsilon dr + (Haa + b - r)\,d\upsilon = (k - f + b - r)\,dr$, und $n = \frac{a^4}{h^4}$. Hier iſt alſo $n\upsilon dr$ in Vergleichung mit $(Haa + b - r)\,d\upsilon$ ſehr groß, folglich beynahe $n\upsilon dr = (k - f + b - r)\,dr$, oder $n\upsilon = \frac{a^4}{h^4}\upsilon = k - f + b - r$ beynahe $= k$, weil f, b, r, insgeſammt gegen k ſehr klein angenommen werden. Ich werde ſogleich im

Anfang des folgenden Abſchnitts Gelegenheit haben dieſen Satz näher zu erläutern. Herr Daniel Bernoulli brauchte ihn a. a. O. Sect. IX. §. 1. und 27. p. 163. u. 182. die Berechnung der Kraft darauf zu gründen, welche bey einem Druckwerk erfordert wird, eine gegebene Menge Waſſer auf eine gegebene Höhe zu heben; und ſeine Gedanken hängen ſo zuſammen.

Es ſoll in einer Secunde die Menge Waſſer A auf die Höhe k gebracht werden. In ſolcher Abſicht nehme man an, es ſoll durch eine Oefnung $= \frac{1}{4}\pi h^2$ vertical aufwärts ſpringen: ſo muß die Geſchwindigkeit deſſelben $= 2\sqrt{gk}$ ſeyn, und es wird $A = \frac{1}{4}\pi h^2 \cdot 2\sqrt{gk}$, folglich $\frac{1}{4}\pi h^2 = \frac{A}{2\sqrt{gk}}$. Die Geſchwindigkeit des Kolbens, welcher gegen CD drückt, ſey $= \beta$, und jeder Querſchnitt des Stiefels $= \frac{1}{4}\pi a^2$, ſo iſt $2\sqrt{gk} = \frac{a^2}{h^2}\beta$, und $a^2 = \frac{2\sqrt{gk}}{\beta} \cdot h^2$.

Daraus giebt ſich $K = \frac{1}{4}\pi aak$. Dafern nun der Kolben vermittelſt einer Maſchine bewegt wird, und die Kraft F in den angegriffenen Punct würkt, deſſen Geſchwindigkeit $= \alpha$ iſt; ſo hat man $F = \frac{\beta}{\alpha} K = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{4}\pi aak$; und wenn $\frac{2\sqrt{gk}}{\beta} \cdot h^2$ ſtatt a^2 geſetzt wird; ſo hat man

$$\frac{F}{k} = \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{2\sqrt{gk}}{\alpha} \cdot h^2.$$

Dieſer Ausdruck giebt eine Fläche; wovon ich annehmen will, daß es ein Kreis, und der zugehörige

Durch-

Durchmeſſer $= \delta$ ſey, ſo hat man $\frac{1}{4}\pi\delta\delta = \frac{F}{k}$, und $\frac{1}{4}\pi\delta\delta . k = F$.

Wie weit ſich dieſe Regel bey den bisher betrachteten Druckwerken anwenden laſſe, werde ich im folgenden Abſchnitt zu prüfen Gelegenheit haben. Hier werde ich nur zeigen, wie Hr. Bernoulli ſeine Theorie auf die Maſchine zu Marly anwendet, und wie er ſie hätte anwenden müſſen. Er ſetzt zum Grunde, daß die Maſchine binnen 24 Stunden 11700000 Pf. Waſſer auf die Höhe von 500 Fuß hebe, wie ich ſchon im vor. §. bemerkt habe. Dieſe Zahl der Pfunde durch 72 dividirt, giebt 162500 Cubikfuß, (weil Bernoulli 1 Cubikfuß 72 Pf. ſchwer annimmt,) alſo iſt für 1 Secunde die Waſſermenge $= \frac{162500}{24 . 3600} = 1,8808$ C. F. $= A$.
Ferner wird $2\sqrt{gk} = 2\sqrt{15,1 . 500} = 173$ Fuß, alſo $\frac{1}{4}\pi h^2 = \frac{1,8808}{173} = 0,0108$. Nun nimmt Hr Bernoulli die Geſchwindigkeit der Kraft $=$ $3\frac{3}{4}$ Fuß an, und dies iſt, wie er ſelbſt ſagt, die Geſchwindigkeit der Schaufeln des Waſſerrades. (Die Zahl $3\frac{3}{4}$ kommt auch mit der im vor. §. aus der Umlaufszeit gefundenen Zahl 3,7 überein). Bey dieſer Maſchine iſt alſo $\alpha = 3,75$ Fuß, folglich $\frac{2\sqrt{gk}}{\alpha} = \frac{173}{3,75} = 46,35$ und es wird $\frac{1}{4}\pi\delta\delta =$ $\frac{1}{4}\pi . \frac{2\sqrt{gk}}{\alpha} . h^2 = 46 . 0,0108 = 0,4968$ Quad.

Fuß $= \frac{F}{k}$. Demnach erhält man $F = 0{,}4968 \cdot k = 0{,}4968 \cdot 500 = 248{,}4$ Cub. Fuß. Das Gewicht davon iſt $248{,}4 \cdot 72 = 17885$ Pf. Es iſt offenbar, daß dies F mit dem Druck des Waſſers gegen die Schaufeln einerley ſeyn müſte, wenn keine Kraft verlohren gienge. Weil nun nach H. Weidlers Rechnung dieſer Druck $= 11592 \cdot 14 = 162288$ Pfund, und hievon die gefundene Zahl 17885 Pfund ohngefehr der 9te Theil iſt, ſo wäre der Verluſt ohngefehr $\frac{8}{9}$ der ganzen Kraft. Weil aber die Zahl 11592 mehr denn viermahl gröſſer iſt, als ſie eigentlich ſeyn ſollte; ſo kommt man wieder auf das Reſultat des vor. §. Die Kraft des Waſſerſtoſſes gegen die Schaufeln iſt nur $2464 \cdot 14 = 34496$ Pf., und davon iſt die Zahl 17885 Pf. ohngefehr die Hälfte. Herr Bernoulli aber vergleicht die von ihm eben ſo wie hier berechnete Zahl 17885 Pf. mit der Zahl 1000594 Pf., und weil jene $\frac{1}{56}$ von dieſer iſt, ſo ſchlieſt er daraus, daß $\frac{55}{56}$ der Kraft verlohren gehen. Es liegt nun ganz deutlich zu Tage, daß dies ein Verſehen ſey. Denn dieſe Kraft von 1000594 Pf. iſt nach Hr. Weidlers Rechnung nicht am Umfang des Waſſerrades, ſondern an der Warze der Kurbel angebracht, und die Geſchwindigkeit dieſer Warze iſt $= \frac{5}{36} \cdot 3{,}75$ (399 §.) $= 0{,}52$ Fuß. Dieſe Zahl hätte Herr Bernoulli ſtatt $3\frac{3}{4}$ Fuß brauchen müſſen, ſo wäre $\frac{2\sqrt{gk}}{\alpha} = \frac{173}{0{,}52} = 329$, und $\frac{1}{4}\pi\delta\delta = 329 \cdot 0{,}0108 = 3{,}5532$ Qu. Fuß, alſo $F = 3{,}5532 \cdot 500 = 1776$ Cubikfuß gefunden worden.

Das

Das Gewicht hievon iſt 127872 Pf., und das iſt etwa $\frac{1}{8}$. 1000594 Pf. Dieſer Rechnung gemäß hätte Hr. Bernoulli den Verluſt der Kraft nur $\frac{7}{8}$ des Ganzen gefunden: in der That iſt er nur die Hälfte des Ganzen, weil die Kraft der Warze der Kurbel nur auf den vierten Theil derjenigen geſchätzt werden kann, die Hr. Weidler angiebt.

Ich ſchlieſſe dieſe Unterſuchung mit der Erinnerung, daß ich meine Berechnung der Kraft, womit das Waſſer in die Räder dieſer Maſchine würkt, gar nicht für ſicher halte, weil ich bey den Schriftſtellern, die ich habe zu Rath ziehen können, ganz und gar keine Uebereinſtimmung in Abſicht auf die Abmeſſungen der Räder antreffe. Herr Belidor ſagt nichts von der Gröſſe der Schaufeln, in ſeinem Riß aber ſind ſie nach dem beygefügten Maaßſtab 7 Fuß lang gezeichnet. De la Force ſagt, ſie ſind 5 bis 6 Fuß lang, (Weidler a. a. O. p. 23.) indeſſen nimt eben dieſer Schriftſteller ihre Fläche 4 Qu. Fuß groß an; (a. a. O. p. 33.) ihre Höhe muß alſo wohl kleiner als 1 Fuß ſeyn; andrer Verſchiedenheiten nicht zu gedenken. Leupolds Nachricht von dieſer Maſchine im Theatro Machin. Hydraul. T. II. p. 38. u. f. ſcheint ſehr unrichtig zu ſeyn. Daß übrigens keine überflüßige Kraft da ſey, und die Maſchine die vollkommenſte Einrichtung nicht habe, erhellet aus dem langſamen Umlauf der Waſſerräder, der nur halb ſo ſchnell iſt, als er eigentlich ſeyn müſte, vorausgeſetzt, daß die Geſchwindigkeit des Waſſers von Herrn Weidler richtig angegeben worden. Meine Abſicht iſt nur geweſen, durch dieſe Unterſuchung theils die bisherigen Lehren von den Hydrauliſchen

Maſchinen zu erläutern, theils die Weidleriſchen und Bernoulliſchen Rechnungen zu berichtigen.

Der XXIX. Abſchnitt.

Theorie der Feuer-Sprützen.

401 §.

Bey den bisher betrachteten Druckwerken geht die Abſicht eigentlich nur dahin, das Waſſer in Röhren zum Steigen zu bringen, damit es ſich aus der oberſten Mündung derſelben in einen Waſſerbehälter ergieſſe, aus dem er hiernächſt zu dieſer oder jener beſondern Abſicht weiter abgeleitet wird. Hiebey iſt es nicht nöthig, daß das Waſſer aus der oberſten Mündung ſchnell hervorſtröme: ja es iſt vielmehr ein Fehler, wenn es geſchicht, weil alsdenn ein Theil der Kraft unnöthiger Weiſe darauf verwandt wird, dem Waſſer die überflüßige Schnelligkeit mitzutheilen, da ſtatt deſſen eine gröſſere Menge Waſſer gehoben werden könnte. In andern Fällen aber hat man zur Abſicht, das Waſſer zu nöthigen, daß es wie aus einem Springbrunnen mit einer beträchtlich groſſen Geſchwindigkeit aus der Mündung der Aufſatz-Röhre hervorſpringe, damit es hiernächſt noch in freyer Luft zu einer beträchtlichen Höhe ſteige. Dieſe Abſicht hat man bey allen Arten von Sprützen, und insbeſondere bey den Feuerſprützen, die daher den Nahmen führen, weil

weil man ſich ihrer bey Feuersbrünſten zum Löſchen bedienet. Eine ſolche Feuerſprütze iſt an ſich nichts anders, als ein Druckwerk, woran ſtatt der Aufſatz-Röhre ein bewegliches Gußrohr angebracht iſt, damit daſſelbe, wie es die jedesmalige Nothwendigkeit erfordert, nach allen Seiten gewandt werden könne. Das Druckwerk ſelbſt iſt entweder einfach, oder zuſammengeſetzt. Wenn das einfache Druckwerk zu der gedachten Abſicht ſo eingerichtet iſt, daß nur eine Perſon erfordert wird, den Kolben in die nöthige Bewegung zu ſetzen, ſo heiſt es eine Handſprütze. Die groſſen Feuerſprützen ſind gemeiniglich doppelte Druckwerke, und beyde mit einer gemeinſchaftlichen Steigröhre vereinigte Stiefel AB und CD ſtehen in 70
einem hinlänglich groſſen Gefäß EF, das auf einem Fig.
Wagen, oder einer Schleife befeſtiget iſt, damit es deſto ſchneller von einem Ort zum andern gebracht werden könne. Ueber den Stiefeln liegt die um ihren Mittelpunct K bewegliche Druckſtange GH, oder der ſogenannte Wagebalken-Drückel, auf einem gehörigen Geſtelle, und an jedem Arm hängt bey M und N eine Kolbenſtange, die von einigen am äuſſerſten Ende eines jeden Arms arbeitenden Perſonen in die nöthige Bewegung geſetzt wird, indem ſie den Wagebalken-Drückel wechſelsweiſe nieder drücken. Damit die Leute, welche dieſen Wagebalken bewegen ſollen, in gleichem Abſtande vom Mittelpunct arbeiten können, wird den beyden äuſſerſten Enden deſſelben die Geſtalt einer Gabel gegeben, und dieſe ſo eingerichtet, daß ſich eine Querſtange durchſtechen läſt, woran mehr Perſonen zugleich ziehen können. Die Zeichnung ſtellt auch noch bey OP und QR die Gurgeln oder

Kropfröhren vor, die entweder nach Art einer Gabel ſich in der Steigröhre vereinigen, oder (wie man ſeit einiger Zeit angefangen hat, die Einrichtung zu machen,) das Waſſer aus den Stiefeln in den ſogenannten Windkeſſel ST leiten, von deſſen Nutzen ich unten beſonders reden werde. Anfangs werde ich hier dieſen Windkeſſel beyſeit ſetzen, und annehmen, daß beyde Gurgeln OP und QR unmittelbar mit der Steigröhre zuſammen hängen, wobey ich noch bemerke, daß dergleichen mit einem ſtehenden Rohr verſehene Feuerſprützen auch Giebelſprützen heiſſen. Von andern Einrichtungen werde ich im folgenden Abſchnitt reden.

402 §.

Wenn die Stärke der Kraft gegeben iſt, die den Kolben in dem zu einer Giebelſprütze gehörigen Stiefel abwärts drückt, nebſt allen Abmeſſungen der Sprütze: die Geſchwindigkeit zu finden, womit das Waſſer aus der Mündung des Gußrohrs hervorſpringt.

Aufl. Wenn alle Buchſtaben die Bedeutung behalten, die ſie im 345 §. hatten, ſo läſt ſich die dort gefundene Gleichung

$$v = \frac{1}{n}(k - f + b - A)\left(1 - \frac{Z^n}{A^n}\right) + \frac{A - r}{n - 1}\left(1 - \frac{Z^{n-1}}{A^{n-1}}\right)$$

auf den gegenwärtigen Fall ebenfalls anwenden. Die Abſicht iſt, vermittelſt der Sprütze das Waſſer auf eine

eine beträchtlich große Höhe zu treiben, und deswegen muß es mit großer Geſchwindigkeit zur Mündung des Gußrohrs herausſtrömen. Dieſe Abſicht wird dadurch erhalten, daß man die oberſte Mündung des Gußrohrs ſehr viel kleiner macht, als die Mündung des Stiefels iſt; und eben dieſer Umſtand giebt hier zu einer bequemen Verkürzung der Rechnung Anlaß. Es iſt nämlich bey der angenommenen Vorausſetzung $\frac{a^2}{h^2}$, alſo noch um ſo mehr $\frac{a^4}{h^4}$ eine ſehr große Zahl, und deswegen iſt man berechtiget, $\frac{a^4}{h^4} - 1$ beynahe $= \frac{a^4}{h^4}$ zu ſetzen. In der obigen aus dem 345 §. genommenen Gleichung iſt $n = \frac{a^4}{h^4} - 1$, und $n - 1 = \frac{a^4}{h^4} - 2$; alſo kann man wegen der angeführten Urſache $n = n - 1 = \frac{a^4}{h^4}$ annehmen, und ſo verwandelt ſich die Gleichung in folgende

$$v = \frac{1}{n}(k - f + b - r)\left(1 - \frac{Z^n}{A^n}\right).$$

Ferner iſt $\frac{Z}{A} = \frac{Haa + b - r}{Haa + b}$, alſo wird $v = 0$, wenn $r = 0$ iſt, wie erfordert wird, ſobald aber r in Vergleichung mit $Haa + b$ nur ein wenig beträchtlich wird, ſobald wird $\frac{Z}{A}$ ein eigentlicher Bruch,

 und

und $\frac{Z^n}{A^n}$ wird ſehr klein, weil n eine ſehr große Zahl iſt. Folglich hat man beynahe $v =$

$\frac{1}{n}(k - f + b - r)$. Daß die Differential-Gleichung eben daſſelbe unmittelbar gebe, iſt ſchon im 400 §. bemerkt worden. Weil übrigens auch $b - r$ in Vergleichung mit $k - f$ ſehr klein ſeyn muß, ſo wird die Geſchwindigkeit des Kolbens allemal beynahe der Höhe $\frac{1}{n}(k - f)$ zugehören, ſobald der Kolben in Bewegung gebracht iſt.

Um v genauer zu haben, könnte man die im 346 §. für $1 - \frac{Z^n}{A^n}$ berechnete Reihe gebrauchen: es iſt aber bequemer, wenn man v aus der Differentialgleichung ſelbſt auf folgende Art ſucht. Man erwege, daß $k - f + b - r$ ſowohl, als auch $Haa + b - r$ ſich nicht beträchtlich ändern, wenn ſich r ändert, weil auch hier das Integral Haa in Vergleichung mit b ziemlich groß iſt. Deswegen kann man aus dieſen beyden Factoren r weglaſſen, und

$$\frac{a^4}{h^4} v dr + (Haa + b) dv = (k - f + b) dr$$

ſetzen. Ich will nun $\frac{a^2}{h^2} = n$ annehmen, ſo wird

$$dr = \frac{(Haa + b) dv}{k - f + b - nnv}, \text{ oder } dr =$$

Haa

$\frac{Haa+b}{nn} \cdot \frac{dv}{(k-f+b):nn-v}$, und die Integration giebt $r = C - \frac{Haa+b}{nn} \cdot l\left(\frac{k-f+b}{nn} - v\right)$.

Weil r und v zugleich verſchwinden müſſen, ſo wird

$$C = \frac{Haa+b}{nn}\, l\, \frac{k-f+b}{nn}, \text{ alſo}$$

$$r = \frac{Haa+b}{nn} - l\, \frac{k-f+b}{k-f+b-nnv}.$$

Daraus folgt

$$e^{\frac{nnr}{Haa+b}} = \frac{k-f+b}{k-f+b-nnv}, \text{ und es wird}$$

$$v = \frac{k-f+b}{nn}\left(1 - e^{-\frac{nnr}{Haa+b}}\right).$$

Dieſe Gleichung giebt $v = 0$ für $r = 0$, wie erfordert wird: ſobald aber r nur einen ſehr kleinen beſtimmten Werth hat, iſt ſehr nahe $v = \frac{k-f+b}{nn}$. So wie r wächſt, wird die Exponentialgröſſe kleiner, folglich v gröſſer. Demnach rückt der Kolben würklich mit beſchleunigter Bewegung fort. Indeſſen bleibt ſehr nahe $v = \frac{k-f+b}{nn}$, wenn n eine etwas große Zahl iſt.

Wenn die Höhe q derjenigen Geſchwindigkeit zugehört, womit das Waſſer zur Mündung des Gußrohrs

rohrs heraus ſprüzt, ſo iſt $q = \frac{a^4}{h^4} v = nnv$, alſo beynahe $q = k + b - f$. Dafern demnach die Bewegung des Waſſers durch keine Hinderniſſe aufgehalten würde, ſo würde es ſo hoch ſteigen, als eine Waſſerſäule auf der Mündung des Stiefels ſeyn müſte, wenn ihr Gewicht ſo groß ſeyn ſollte, als die Kraft, die den Kolben abwärts preſt. In der That aber wird das Waſſer dieſe Höhe lange nicht erreichen. Der Widerſtand der Luft iſt bey großer Geſchwindigkeit des Waſſers ſehr groß, ſo wie auch das Reiben des Waſſers an der inwendigen Fläche der Steigröhre die Bewegung deſſelben ſehr verzögert.

Die Exponential-Gröſſe e^z iſt beynahe $= 1 + z$, wenn z eine ſehr kleine Zahl iſt. Denn alsdenn iſt e^z beynahe $= 1$, und wenn man $e^z = 1 + \omega$ ſetzt, ſo iſt $z = l(1 + \omega)$ beynahe $= \omega$, folglich $e^z = 1 + z$.

Demnach iſt $e^{-\frac{nnr}{Haa+b}}$ alsdenn beynahe $= 1 - \frac{nnr}{Haa + b}$, wenn Haa ſehr groß, aber n nicht beträchtlich groß iſt. Setzt man dieſen Werth in die für v gefundene Gleichung, ſo wird

$$v = \frac{k-f+b}{nn}\left(1 - e^{-\frac{nnr}{Haa+b}}\right) =$$

$\frac{(k-f+b)r}{Haa+b}$, wie im 345 §., welches der dortigen Vorausſetzung gemäß war.

403 §.

Den Druck zu finden, welchem Stiefel und Steigröhre ausgeſetzt ſind, wenn die Kraft, die den Kolben treibt, nebſt allen Abmeſſungen der Sprütze gegeben ſind.

Aufl. In die allgemeine Gleichung des 345 §.

$$p = k - x + b - r - \frac{(b-r)dv}{dr} - \frac{a^2 dv}{dr}\int\frac{dw}{zz} - \left(\frac{a^4}{z^4} - 1\right)v$$ ſetze man die Werthe

$$v = \frac{k-f+b}{nn}\cdot\left(1 - e^{-\frac{nnr}{Haa+b}}\right)$$ und

$$\frac{dv}{dr} = \frac{k-f+b-nnv}{Haa+b},$$ ſo iſt der geſuchte Druck für jeden Querſchnitt $= \frac{1}{4}\pi zzp$.

In den Fällen, wo nn in Vergleichung mit $Haa + b$ ſehr groß iſt, kann beynahe $\frac{dv}{dr} = 0$, und $v = \frac{k-f+b}{nn}$ geſetzt werden: und weil überdem $b - r$ in Vergleichung mit k ſehr klein iſt, ſo iſt beynahe beſtändig

$$p = k - x - \left(\frac{a^4}{z^4} - 1\right)\cdot\frac{k-f+b}{nn}.$$

Iſt nun für die unterſte Stelle der Steigröhre $z = c$, ſo hat man zugleich $x = 0$, alſo für dieſe Stelle

$$p = k - \frac{k-f+b}{nn}\left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right).$$

Für

Für die Querſchnitte des Stiefels findet man $p = k - x$, weil $z = a$ wird, folglich überhaupt für die beiden letzten Fälle beynahe $p = k$: es wäre denn, daß auch a gegen c ſehr groß wäre, alsdenn würde der Druck auf die unterſte Stelle der Steigröhre viel kleiner ſeyn, als derjenige, welcher der Höhe k zugehört.

Auf die Fälle, wo nn in Vergleichung mit $Haa + b$ nicht ſo ſehr groß iſt, daß man ſich dieſer Näherungen bedienen kann, wendet man den allgemeinen Ausdruck für p ebenfalls leicht an. Will man den Druck für den erſten Anfang der Bewegung haben, ſo ſetzt man $r = 0$: für den Augenblick aber, da der Kolben ſeine unterſte Stelle erreicht hat, ſetzt man $r = b$. Verlangt man den Druck auf die unterſte Stelle der Steigröhre, ſo muß man $x = 0$, $z = c$ und $\int \frac{dw}{zz} = 0$ ſetzen, und man hat für den erſten Anfang der Bewegung $p = k + b\left(1 - \frac{dv}{dr}\right)$, d. i. $p = k + b\left(1 - \frac{k - f + b}{Haa + b}\right)$. Für den Augenblick aber, da der Kolben ſeine unterſte Stelle erreicht, wird

$$p = k - \left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right) \cdot \frac{k - f + b}{nn} \cdot \left(1 - e^{-\frac{nnb}{Haa + b}}\right).$$

Dieſe Formuln finden ihre Anwendung, wenn man die Unterſuchung anſtellen will, wie dick Stiefel und Röhren gemacht werden müſſen, damit ſie Feſtigkeit genug haben, dem Druck des Waſſers hin-

hinlänglich zu widerſtehen. Die Unterſuchung ſelbſt wird nach den Regeln angeſtellet, die ſchon im 226 u. f. §§. vorgetragen ſind.

404 §.

Die Zeit zu finden, worin der Kolben einen gegebenen Weg zurück legt.

Aufl. In die allgemeine Gleichung $dt = \frac{dr}{2\sqrt{g}\sqrt{v}}$ (117 §. Mech.) muß man den Werth $v = \frac{k-f+b}{nn}\left(1 - e^{-\frac{nnr}{Haa+b}}\right)$ ſetzen, und alsdenn integriren. Man ſetze um abzukürzen $\frac{n}{2\sqrt{g(k-f+b)}} = A$, und $\frac{nn}{Haa+b} = B$; ſo wird $dt = \frac{Adr}{\sqrt{(1-e^{-Br})}}$. Man ſetze ferner $e^{-\frac{1}{2}Br} = z$, ſo wird $-\frac{1}{2}Be^{-\frac{1}{2}Br}dr = dz$ (316 §. Mech.) und $dr = -\frac{2dz}{Bz}$, folglich $dt = -\frac{2Adz}{Bz\sqrt{(1-zz)}}$. Endlich ſey $1 - zz = yy$, alſo $z = \sqrt{(1-yy)}$, ſo wird $-zdz = ydy$, und $-dz = \frac{ydy}{\sqrt{(1-yy)}}$. Dieſe Werthe in die Differentialgleichung geſetzt geben $dt = \frac{2A}{B}.\frac{dy}{1-yy}$. Es iſt aber $\int\frac{dy}{1-yy} =$

$\frac{1}{2} l \frac{1+y}{1-y}$ (319 §. Mech.), alſo wird $t =$

$$C + \frac{A}{B} l \frac{1+\sqrt{(1-zz)}}{1-\sqrt{(1-zz)}}.$$ Weil nun r und t zugleich verſchwinden müſſen, und alsdenn $z = 1$ wird, ſo erhält man $C = 0$, folglich $t =$

$$\frac{Haa+b}{2n\sqrt{g(k-f+b)}} l \frac{1+\sqrt{(1-e^{-Br})}}{1-\sqrt{(1-e^{-Br})}}.$$

Ferner wird

$$\frac{1+\sqrt{(1-e^{-Br})}}{1-\sqrt{(1-e^{-Br})}} = \frac{(1+\sqrt{(1-e^{-Br})})^2}{e^{-Br}}$$

$= e^{Br}(1+\sqrt{(1-e^{-Br})})^2$, und dies giebt $t =$
$$\frac{Haa+b}{2n\sqrt{g(k-f+b)}}\left(le^{Br} + 2l(1+\sqrt{(1-e^{-Br})})\right),$$
da dann $le^{Br} = Br = \frac{nnr}{Haa+b}$, alſo $t =$

$$\frac{nr}{2\sqrt{g(k-f+b)}} + \frac{Haa+b}{n\sqrt{g(k-f+b)}} l(1+\sqrt{(1-e^{-Br})})$$
gefunden wird.

Wenn B eine ſehr große Zahl iſt, ſo wird $1+\sqrt{(1-e^{-Br})}$ beynahe $= 2$, und es iſt alsdenn $l2 = 0{,}693147 \ldots$ Dafern überdem $k-f$ beträchtlich groß, und Haa noch in Vergleichung mit

n

n ziemlich klein iſt, ſo wird ſehr nahe $t = \frac{nr}{2\sqrt{g(k-f+b)}}$. Dieſer letzte Fall hat gewöhnlich bey den Giebelſprützen ſtatt, und es iſt auch überdem die Höhe des Kolbenzuges b in Vergleichung mit k ſehr klein. Deswegen kann man für die Giebelſprütze $t = \frac{nr}{2\sqrt{g(k-f)}}$ annehmen. Wenn Haa in Vergleichung mit k und nn beträchtlich groß iſt, ſo wird auch b in Vergleichung mit Haa ſehr klein ſeyn, und man erhält überhaupt $t =$

$$\frac{nr}{2\sqrt{g(k-f)}} + \frac{\mathrm{H}aa}{n\sqrt{g(k-f)}}\, l\left(1+\sqrt{\left(1-e^{-\frac{nnr}{\mathrm{H}aa}}\right)}\right).$$

Die Zeit eines ganzen Kolbenzuges wird gefunden, wenn man $r = b$ ſetzt. Dieſe iſt alſo für die Giebel-Sprütze $= \frac{nb}{2\sqrt{g(k-f)}}$, und wenn man hinführo die Zeit eines ganzen Kolbenſpiels $= t$ ſetzt; ſo wird $t = \frac{nb}{\sqrt{g(k-f)}}$. Binnen dieſer Zeit ergieſt die Sprütze die Menge Waſſer $\frac{1}{2}\pi aab$. Wenn alſo M die Menge bedeutet, die ſie in der Zeit T ergieſt, ſo iſt $\mathrm{M} = \frac{\frac{1}{2}\pi aab\mathrm{T}}{t} = \frac{\frac{1}{2}\pi aa\mathrm{T}\sqrt{g(k-f)}}{n}$, oder $\mathrm{M} = \frac{1}{2}\pi hh\mathrm{T}\sqrt{g(k-f)}$.

405 §.

Alle Abmeſſungen einer Giebelſprütze ſind gegeben, und man weis, wie ſtark die ange-

brachte Kraft während der Bewegung in den angegriffenen Punkt würkt: man ſucht, wie hoch ſie das Waſſer treibt, und wie viel Waſſer ſie in gegebener Zeit ergießen wird.

Aufl. Es ſey das mechaniſche Moment der angebrachten Kraft $= F\alpha$, und α die Geſchwindigkeit des angegriffenen Punkts. Ferner ſey der Druck, womit der Kolben gegen das Waſſer preſt $= K$; ſo iſt überdem die Geſchwindigkeit des Kolbens $= \frac{2b}{t}$, und $F\alpha = \frac{2Kb}{t}$. Es ſey $\frac{2b}{t} = \beta$, ſo iſt $\frac{\alpha}{\beta}$ ein bekanntes Verhältniß, weil angenommen wird, daß die Einrichtung der Maſchine bekannt ſey; und man erhält $K = \frac{F\alpha}{\beta}$, woraus ſich $k = \frac{K}{\frac{1}{4}\pi aa}$ ergiebt. Ferner ſetze man $\frac{\alpha}{\beta} = \mu$, ſo iſt $\alpha = \mu\beta = \frac{2\mu b}{t}$: und weil $t = \frac{nb}{\sqrt{g(k-f)}}$ iſt, (404 §.) ſo wird $\alpha = \frac{2\mu\sqrt{g(k-f)}}{n}$. Ueberdem war im vor. §. $\frac{b}{t} = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi aa T}$, alſo wird $F\alpha = \frac{K.M}{\frac{1}{4}\pi aa T}$; und wenn $K = \frac{1}{4}\pi aak$ geſetzt wird, ſo ergiebt ſich $F\alpha = \frac{k.M}{T}$, folglich $M = \frac{F\alpha.T}{k}$.

Die

Die Höhe k wäre nun zugleich einerley mit der Höhe, die der Waſſerſtrahl erreichen würde, von der unterſten Stelle der Steigröhre angerechnet; und die Länge des Waſſerſtrahls ſelbſt wäre $= k - f$, wenn die Bewegung des Waſſers durch keine Hinderniſſe verzögert würde. Allein je ſtärker der Druck K iſt; je ſchneller alſo das Waſſer aus der Mündung des Gußrohrs hervorſprützt; deſto mehr iſt die ſenkrechte Höhe des Waſſerſtrahls von der Höhe $k - f$ unterſchieden, und ſie iſt allemahl viel kleiner, als $k - f$. Um dieſe würkliche Höhe zu finden, müſte man die Friction und den Widerſtand der Luft, nebſt demjenigen Hinderniß in Rechnung bringen, welches das im Steigen begriffene, und hiernächſt von der gröſten Höhe wieder zurückfallende Waſſer dem nachfolgenden entgegen ſetzt. Weil dies aber ſeine groſſen Schwierigkeiten hat, und Mariotts Regel (27 §), nach welcher aus der Höhe, die der Waſſerſtrahl, alle Hinderniſſe beyſeit geſetzt, erreichen ſollte, ſeine wahre Höhe gefunden wird, gut genug mit dem würklichen Erfolg überein kommt; ſo kann man auch hier nach eben der Regel die Rechnung anſtellen. Man ſetze, dieſe würkliche Höhe ſey $= e$, ſo wird $e = \sqrt{(E(k-f) + \frac{1}{4}E^2)} - \frac{1}{2}E$, wenn E die Bedeutung des 27 §. hat, da dann nach Mariotts Verſuchen (28 §.) E $= 300$ iſt. Ich nehme an, daß hier $k-f$ das ſey, was a. a. O. die Waſſerhöhe war; denn dort würde, alle Hinderniſſe der Bewegung beyſeit geſetzt, die Geſchwindigkeit des durch die Mündung ſprützenden Waſſerſtrahls der Waſſerhöhe, und hier der Höhe $k - f$ zugehören. Die Urſachen, welche dieſe Höhe vermindern, ſind in beyden Fällen groſſentheils alsdenn allererſt vorhanden,

wenn das Waſſer ſchon im Steigen begriffen iſt, und in ſo fern ſind die Fälle einerley: nur dürfte hier die Friction des in der Steigröhre hinaufſteigenden Waſſers an der innern Fläche der Röhre eine noch ſtärkere Verzögerung verurſachen, als in den Fällen der Mariottiſchen Verſuche, und in ſo fern wären die Fälle doch nicht völlig einerley. Indeſſen iſt die Verſchiedenheit ſo groß nicht, und man muß auch hier zufrieden ſeyn, wenn man der Wahrheit nur einigermaſſen nahe kommt.

406 §.

Weil hier k allemahl beträchtlich gröſſer iſt, als diejenige Höhe, worauf die Sprütze das Waſſer hebt, (wenn es wie ich hier annehme lothrecht hinauf ſteigt) und die hier $= e+f$ iſt; ſo iſt $M = \frac{F\alpha . T}{k}$ allemahl ſehr viel kleiner als $\frac{F\alpha . T}{e+f}$, und man kann dieſen letzten Ausdruck hier nicht einmahl als eine Grenze betrachten, der man die Waſſermenge durch eine vortheilhafte Einrichtung der Maſchine ſehr nähern könnte. Man hat es ſchlechterdings nicht in ſeiner Gewalt, den Widerſtand der Luft zu vermindern, der hier die vornehmſte Urſache der ſo ſehr groſſen Verzögerung der Bewegung des Waſſers iſt. Zwar hat die Geſtalt und Weite der Steigröhre ihren Einfluß auf die Geſchwindigkeit des herausſprützenden Waſſers, wie ich bald noch ausführlicher zeigen werde. Allein wenn man auch in Rückſicht auf dieſen Umſtand die Maſchine aufs vortheilhafteſte einrichtet, ſo wird dennoch die Regel, welche ſonſt

bey Hydrauliſchen Maſchinen angenommen wird, hier eine ſtarke Einſchränkung leiden, vermöge der das Product aus der Waſſermenge in die Höhe, auf welche ſie in gegebener Zeit gehoben wird, ſo groß ſeyn müſte, als das Product der Kraft in den Weg, den der angegriffene Punct in eben der Zeit zurück leget (315 §.)

407 §.

Im luftleeren Raum, und bey dem gänzlichen Mangel aller Hinderniſſe der Bewegung wäre $Mk = F\alpha . T$, und $k = e + f$ wäre die Höhe ſelbſt, welche das Waſſer erreichte. Man nehme an, mit dem Stiefel ſey gar keine Steigröhre, ſondern etwa bey HK (65 F.) nur eine kurze horizontale Knieröhre verbunden, aus welcher das Waſſer durch eine kleine oberwärts befindliche Oefnung vertical aufwärts ſpringt; ſo iſt das, was bisher f bedeutet hat, $= 0$, und k iſt die Länge und Höhe des Waſſerſtrahls. Iſt nun die Fläche der kleinen Oefnung $= \frac{1}{4}\pi hh$, ſo wird das Waſſer durch ſelbige mit der Geſchwindigkeit $2\sqrt{gk}$ hervorſpringen, da dann in einer Secunde die Waſſermenge $= \frac{1}{4}\pi hh . 2\sqrt{gk}$ ausſprützt: alſo in der Zeit T die Menge $\frac{1}{4}\pi hh . T . 2\sqrt{gk}$. Setzt man dieſen Ausdruck ſtatt M, ſo wird

$\frac{1}{4}\pi hh . \frac{2\sqrt{gk}}{\alpha} = \frac{F}{k}$. Dieſe Gleichung giebt eine Fläche, und wenn man annimmt, daß es ein Kreis, und ſein Durchmeſſer $= \delta$ ſey; ſo hat man $\frac{1}{4}\pi\delta\delta = \frac{F}{k}$, und $\frac{1}{4}\pi\delta\delta k = F$. Dies wird meine Erinnerungen rechtfertigen, die ich im 400 §. gegen

 die

die dort angeführte Bernoulliſche Rechnung vorgetragen habe. Setzt man aber $F = \frac{K\beta}{\alpha}$ (405 §.), ſo wird $\frac{1}{4}\pi hh \cdot \frac{2\sqrt{gk}}{\beta} = \frac{K}{k} = \frac{1}{4}\pi aa$, und β iſt die Geſchwindigkeit des Kolbens ſelbſt, welches alles meiner Rechnung im 400 §. gemäß iſt.

408 §.

Bey der Anwendung dieſer Theorie auf die Ausübung iſt nun vornämlich noch die Frage zu unterſuchen, wie hoch man die Kraft der Arbeiter bey einer gewiſſen Geſchwindigkeit der angegriffenen Querſtangen des Wagebalkens ſchätzen könne. Dafern die Arbeiter, indem ſie die erwähnten Querſtangen niederdrücken, zum Theil mit dem Gewicht ihres Körpers würken; ſo ſcheint es, daß die Kraft eines jeden wohl etwas größer, als nach der Regel des 317 §. angenommen, und vielleicht bis auf das Gewicht eines Cubikfußes Waſſer geſchätzt werden könne, wenn gleich die Geſchwindigkeit der angegriffenen Querſtangen 2 bis 3 Fuß in einer Secunde betrüge. Hiebey kommt überdem noch ein andrer Umſtand in Betrachtung, der die Art und Weiſe betrift, wie die Arbeiter eigentlich ihre Kräfte anwenden. Mir iſt es bey den Proben, die ich geſehen habe, ſo vorgekommen, als wenn die eine Hälfte allemal ausruhet, wenn die andre Hälfte niederdruckt: ich habe mit einigen von dieſen Leuten zuweilen darüber geſprochen, und aus ihren Aeußerungen eben das ſchließen müſſen. Indem die eine Hälfte die angegriffene Querſtange ſo tief niedergedruckt hat, als es die

die Stellung des Körpers zuläſt, ſo hören alle dieſe Querſtangen angreifende Arbeiter auf, ferner in dieſelbe zu würken, und laſſen ſie frey in die Höhe gehen, ſo lange die andre Hälfte der Arbeiter die entgegengeſetzte Querſtange niederdrückt. Bey dieſer Art der Arbeit iſt es ſo viel, als wenn nur die Hälfte der ganzen Anzahl ununterbrochen in die Maſchine würkte. Wäre alſo die Anzahl aller Arbeiter $= 2m$, und die Kraft eines jeden $= \eta$ Cub. Fuß, ſo könnte man nicht $F = \eta \,.\, 2m$ ſetzen, ſondern es wäre $F = \eta \,.\, m$. Dafern aber jeder Theil der Arbeiter die angegriffene Querſtange nicht blos niederdruckt, ſondern zugleich mit eben der Gewalt wieder aufwärts hebt; ſo würken alle Arbeiter ununterbrochen in die Maſchine, und man muß $F = \eta \,.\, 2m$ ſetzen. Weil aber die letzte Art der Arbeit den Leuten ohne Zweifel ſchwerer wird, als wenn ſie wechſelsweiſe ruhen können, und blos niederdrücken, ohne zugleich wieder eben ſo ſtark zu heben; ſo kann man auch wohl die Kraft eines jeden bey dieſer letzten Art der Arbeit bey einerley Geſchwindigkeit nicht ſo hoch in Anſchlag bringen.

409 §.

Dafern man bey einer Sprützen-Probe die Höhe beobachtet, welche der ſenkrecht hinauf ſteigende Strahl erreicht, und zugleich die Waſſermenge, welche die Sprütze in gegebener Zeit auf die Höhe bringt, ſo läſt ſich die Gleichung $Mk = F\alpha T$ gebrauchen, die Kraft zu finden, womit jeder Arbeiter in die angegriffene Querſtange gewürkt hat, wenn auch die Geſchwindigkeit bekannt iſt, womit die Querſtangen ſind bewegt worden. Die beobachtete ſenk-

rechte Höhe des Strahls ſey $= e$, ſo hat man $k - f = e + \frac{e^2}{E}$ (27 §.), alſo $k = f + e + \frac{e^2}{E}$. Wenn nun auch M, T, α, aus der Beobachtung bekannt ſind, ſo hat man $F = \frac{Mk}{\alpha T}$. Dieſen Ausdruck ſetze man $= \eta m$, und verſtehe durch m die halbe Anzahl der Arbeiter, dafern ſie blos gedruckt, und nicht gehoben haben. Iſt aber beydes geſchehen, ſo verſtehe man durch m die ganze Anzahl der Arbeiter, und man erhält $\eta = \frac{Mk}{m\alpha T}$. Man muß es alſo bey einer ſolchen Probe mit den Leuten ausdrücklich verabreden, auf welche Art ſie ſich bey der Arbeit verhalten ſollen, und wenn alsdenn dergleichen Proben bald auf die eine, bald auf die andere Art angeſtellet werden, ſo wird die Vergleichung ergeben, welche Art der Arbeit die vortheilhafteſte ſey, wobey man nicht vergeſſen muß, auch mit darauf zu ſehen, welche Art der Arbeit die Leute am wenigſten ermüde.

Weil es ſeine Schwierigkeiten hat, die ſenkrechte Höhe des Strahls genau zu beobachten; ſo kann man auch das Gußrohr horizontal richten, und alsdenn nach dem 23 §. aus der gemeſſenen Weite, die der Strahl erreicht, die der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe berechnen, womit das Waſſer hervorgeſprützt iſt. Die Höhe, welche man ſo findet, wird ſchon etwas größer ſeyn, als diejenige, welche der ſenkrechte Strahl erreichen würde. Man kann auch das Gußrohr unter einem Winkel von 45° gegen den Horizont neigen, und wiederum die Weite meſ-

ſen, die der Strahl erreicht. Im leeren Raum würde dieſe Weite doppelt ſo groß ſeyn, als die der Geſchwindigkeit des hervorſprützenden Waſſers zugehörige Höhe (73 §. Mech.), vorausgeſetzt, daß man dieſe Weite auf einer horizontalen Ebene meſſen könnte, die durch die Mündung des Gußrohrs gelegt wäre. Man wird ſie aber auf der Ebene der Erdfläche meſſen, über welche die Mündung des Gußrohrs ungefähr 8 Fuß wird erhaben ſeyn, und dieſe Weite würde im leeren Raum ſchon etwas gröſſer ſeyn, als die doppelte der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe, die man eigentlich ſucht (79 §. Mech.). Weil nun der Widerſtand der Luft dieſe Weite vermindert, ſo kann man annehmen, daß k ungefähr halb ſo groß ſey, als die Weite, die der Waſſerſtrahl bey einer Neigung von 45° erreicht.

410 §.

Wenn alle Abmeſſungen der Sprütze bekannt ſind, womit man den Verſuch angeſtellet hat; und man hat auch die Zeit eines Kolbenſpiels beobachtet; ſo läſt ſich daraus die Kraft ſicherer finden, welche ſowohl in die Kolben, als auch in den angegriffenen Punkt der Maſchine gewürkt hat. Die Gleichung $t = \frac{nb}{\sqrt{g(k-f)}}$ giebt nämlich $\sqrt{g(k-f)} = \frac{nb}{t}$, und daraus folgt $k = f + \frac{n^2 b^2}{g t^2}$. Dies giebt ferner $K = \frac{1}{4}\pi aak$, und $F = \frac{K\beta}{\alpha}$. Bey der Rechnung aus dieſen Formuln muß man die Höhe des Kolbenzuges b kennen. Weil man aber den Arbei-

tern ſo genau nicht vorſchreiben kann, wie tief ſie jedesmahl den Wagebalken niederdrücken ſollen, ſo iſt es am beſten, auch dieſe Höhe aus der Beobachtung zu ſuchen. Man beobachte nemlich die Menge Waſſer, welche die Sprütze in gegebener Zeit hebt, und zugleich die Anzahl der in eben der Zeit geſchehenen Kolbenzüge, ſo hat man einmahl die Zeit eines ſolchen Kolbenzuges, wenn man die verfloſſene Zeit durch die Anzahl der Schläge dividirt. Fürs zweyte reducire man die gehobene Waſſermenge auf einen Cylinder, deſſen Grundfläche die Mündung des Stiefels iſt; ſo giebt die Höhe dieſes Cylinders durch die Anzahl der Züge dividirt, die Höhe eines Kolbenzuges. Dieſe Rechnung gründet ſich auf die Vorausſetzung, daß ſich jedesmahl der ganze Raum des Kolbenzuges mit Waſſer fülle: und wenn die Sprütze eine ſo fehlerhafte Einrichtung hätte, daß ſich nicht dieſer ganze Raum jedesmahl anfüllte, ſo würden die gegebenen Regeln keine Anwendung finden. Woher dieſer Fehler bey vielen Sprützen entſtehe, und wie er vermieden werden müſſe, werde ich unten ausführlicher zeigen.

Wenn man die Beobachtung auf die eben beſchriebene Art anſtellet, ſo läſt ſich daraus zugleich die Geſchwindigkeit α finden, womit die angegriffenen Querſtangen ſind bewegt worden. Man erhält nemlich $\beta = \frac{2b}{t}$, wenn t die Zeit eines ganzen Kolbenſpiels bedeutet, alſo $\alpha = \mu\beta = \frac{2\mu b}{t}$. Wenn man alles genau nehmen wollte, ſo müſte man erwegen, daß der Weg, um welchen jede Querſtange

ſinkt

ſinkt und ſteigt, eigentlich ein Kreisbogen ſey. Wenn dieſer $= w$ geſetzt wird, ſo wäre eigentlich b die Sehne eines Bogens $= \frac{1}{\mu} w$. Weil aber dieſer Bogen in Vergleichung mit ſeiner ganzen Peripherie nur klein iſt, und dieſe Rechnung ohnehin keine große Schärfe zuläſt, ſo kann man $b = \frac{1}{\mu} w$ annehmen, woraus ſich alſo zugleich die Tiefe ergiebt, um welche die Arbeiter jedesmal die Querſtangen niederdrücken, nämlich $w = \mu b$.

Bey Anwendung der Formul $k = f + \frac{n^2 b^2}{g t^2}$ iſt übrigens noch zu bemerken, daß zwar das Verhältniß $\frac{aa}{hh} = n$ bekannt ſey, wenn man die Einrichtung der Sprütze und ihre Abmeſſungen kennet; daß man aber eigentlich durch h nicht den Durchmeſſer der Mündung des Gußrohrs, ſondern des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls verſtehen müſſe, dafern die Aufſatz-Mündung eine ſolche Geſtalt hat, daß eine Zuſammenziehung zu erwarten iſt. Man muß dies nach den Lehren beurtheilen, die im 36 u. f. §§. vorgetragen ſind, ob eine Zuſammenziehung des Waſſerſtrahls und in welchem Verhältniß ſie ſtatt gehabt habe.

411 §.

Außer dieſer Geſtalt der Gußrohr-Mündung kommen in den Formuln des 405 §., alſo auch bey den bisher daraus hergeleiteten Folgen, keine Gröſſen in

Be-

Betrachtung, die von der Geſtalt und Gröſſe der Steigröhre abhängen. Der Grund davon liegt in der angenommenen Vorausſetzung, daß nn gegen Haa ſehr groß ſey, denn eben deswegen konnte man in den Formuln für v und t (402. 404 §.) die Glieder, welche Haa enthielten, weglaſſen. Dies Integral Haa iſt deſto gröſſer, je länger die Steigröhre, und je enger ſie iſt. Wäre ſie cylindriſch, ihre Länge $= l$, und der Durchmeſſer ihrer Querſchnitte $= c$, ſo wäre $Haa = \frac{aa}{cc} l$. Nun wird zwar die Länge der Steigröhre bey einer Giebelſprütze an ſich nie ſonderlich groß ſeyn, und gewöhnlich ungefähr 10 bis 12 Fuß betragen: wenn man aber c in Vergleichung mit a ſehr klein nehmen wollte, ſo könnte doch Haa ziemlich groß werden. Dies würde die Geſchwindigkeit des hervorſprützenden Waſſers merklich vermindern, wie die Gleichung

$$v = \frac{k-f}{nn}\left(1 - e^{-\frac{nnr}{Haa}}\right)$$ im 402 § ergiebt.

Man muß deswegen die Steigröhre nicht leicht ſo eng machen, daß ihr Durchmeſſer weniger als die Hälfte vom Durchmeſſer des Stiefels beträgt; denn alsdenn ſind ihre Querſchnitte ſchon viermal kleiner, als die Querſchnitte des Stiefels. Je näher die Weite der Steigröhre der Weite des Stiefels kommt, deſto ſchneller wird jedesmal beym Anfang eines neuen Kolbenzuges die Geſchwindigkeit des Kolbens bis zu dem Werth $\sqrt{\frac{k-f}{nn}}$ anwachſen. Hiezu kommt noch der beſondre Grund,

weswe-

weswegen man enge Steigröhren vermeiden muß, weil das Waſſer in engen Steigröhren einer weit ſtärkern Friction ausgeſetzt iſt, als in weitern Steigröhren, und um deswillen ein groſſer Theil der Kraft, dieſe Friction zu überwinden, erfordert wird, wenn die Steigröhre nicht eine zulängliche Weite hat.

412 §.

In der 71 Figur ſtellt BCDEF die Steigröhre vor. Damit man das Gußrohr EF in jede Lage bringen könne, wird die Steigröhre mit einem Knie DE verſehen: bey G befindet ſich ein Gewinde, oder ſo genannter Korb, der dazu dient, daß das Knie-Rohr DE um die Steigröhre CG ſich drehen laſſe. Das Knierohr iſt bey H mit einem zweyten Korbe verſehen, damit das Gußrohr EF auch um das Knierohr DE gedrehet, und auf ſolche Art in jede Lage gebracht werden könne. Die Steigröhre BCD und das Knie werden gewöhnlich cylindriſch, die bewegliche Gußröhre EF aber coniſch gemacht, ſo daß ſie ſich nach und nach bis zur kleinſten Oefnung oben bey F verengert. Es würde aber ſicher weit vortheilhafter ſeyn, wenn man auch dies Gußrohr völlig cylindriſch, und $2\frac{1}{2}$ bis 3 Zoll weit machte. Am äuſſerſten Ende bey F könnte man alsdenn eine hinlänglich ſtarke durchlöcherte Platte ſtatt des Aufſatzes brauchen. Dies rathen nicht allein die im 26 §. angeführten Erfahrungen an, ſondern auch ſelbſt die hier vorgetragene Theorie, weil das Integral H bey der coniſchen Röhre gröſſer, als bey der cylindriſchen wird. Auch weiß man, daß die Friction weit gröſſer in der ſich ſo ſehr verengernden coniſchen Röhre, als in der cylindriſchen ſey. Hiezu kommt noch der

Umſtand, daß man eben um deswillen, damit die Verjüngung nur allmählig geſchehen ſoll, das Rohr wohl 6 bis 7 Fuß lang macht, da doch eben ſo gut ein kürzeres gebraucht werden könnte. Dies würde ebenfalls zur Verminderung des Wehrts von H das ſeinige beytragen, deſſen zu geſchweigen, daß es nicht ſo unbequem ſeyn würde, eine kürzere Röhre zu lenken.

413 §.

Eine vortheilhafte Einrichtung einer Giebelſprütze anzugeben, wenn die Arbeit, wie allemahl gewöhnlich iſt, durch Menſchen verrichtet werden ſoll.

Aufl. Aus der Höhe derjenigen Gebäude, zu deren Rettung bey etwa entſtandener Feuersbrunſt die Sprütze gebraucht werden ſoll, beurtheile man, wie hoch dieſelbe das Waſſer treiben muß. Wenn nun dieſe Höhe $= e$ iſt; ſo ſuche man ferner die derjenigen Geſchwindigkeit zugehörige Höhe, womit das Waſſer aus der Mündung des Gußrohrs hervorſprützen muß, wenn es die Höhe e erreichen ſoll, und ſetze dieſelbe $= k - f$; nun muß $k - f = e + \frac{e^2}{E}$ ſeyn (27 §.), und dies giebt $k = f + e + \frac{e^2}{E}$. Hiernächſt beſtimmt die Gleichung $M = \frac{\eta m \alpha T}{k}$ (409 §.) die Menge Waſſer, welche in der Zeit T zu der Höhe e gebracht werden kann, aus der Anzahl der Arbeiter, und der Geſchwindigkeit der angegriffenen

Querſtangen. Ferner war $M = \frac{1}{2}\pi hh T \sqrt{g(k-f)}$, (404 §.) und dieſe Gleichung beſtimmt den Durchmeſſer für die oberſte Mündung des Gußrohrs, nämlich $h = \sqrt{\frac{M}{\frac{1}{2}\pi T \sqrt{g(k-f)}}}$, da dann für die Mündung des Stiefels $a = h\sqrt{n}$ wird. Die Geſchwindigkeit α der angegriffenen Querſtangen, muß der Beſchaffenheit der angebrachten Kraft gemäß ſeyn, alſo ſcheint es, daß im gegenwärtigen Fall dieſe Geſchwindigkeit etwa 2 bis 3 Fuß betragen müſſe. Man erhält überdem $\beta = \frac{2\sqrt{g(k-f)}}{n}$, und hiedurch wird das Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta} = \mu$ beſtimmt. Wenn demnach jede Kolbenſtange in der Entfernung ϱ, und die Kraft in der Entfernung r vom Mittelpunkt der Bewegung des Wagebalkens angebracht wird, ſo hat man $\frac{r}{\varrho} = \frac{\alpha}{\beta} = \mu$, und es muß $r = \mu\varrho$ genommen werden. Dieſe Schlüſſe führen alſo auf fünf Gleichungen,

1) $\eta m \alpha T = M . k$, 2) $M = \frac{1}{2}\pi hh T \sqrt{g(k-f)}$,

3) $\beta = \frac{2\sqrt{g(k-f)}}{n}$, 4) $\alpha = \mu\beta$,

5) $aa = nhh$,

und die drey Gröſſen η, k, α, ſind als gegeben anzuſehen, auch richtet ſich f einigermaßen nach der Gröſſe der übrigen Theile der Maſchine. Nachdem man übrigens die eine, oder die andre der Vorausſetzungen des 408 §. annehmen, und η derſelben

gemäß

gemäß beſtimmen will, muß man durch m die halbe, oder ganze Anzahl der Arbeiter verſtehen. Hiernächſt bleiben noch ſieben Gröſſen übrig, nemlich M, m, a, h, n, β, μ, wovon fünf durch die obige Gleichungen beſtimmt werden, und man kann zwey davon willkührlich annehmen. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß man hiezu nicht zwey von denjenigen erwählen müſſe, die ſich ſchon einander für ſich beſtimmen, wie z. E. M und h, μ und β.

414 §.

Mir hat es bisher an Gelegenheit gefehlet, eigene Verſuche darüber anzuſtellen, wie hoch man n in der erſten Gleichung des vor. §. ſchätzen könne, und wie groß die Geſchwindigkeit α ſeyn müſſe, damit die Arbeiter ihre Kraft am vortheilhafteſten anwenden können. Bey andern Schriftſtellern habe ich nichts dahin gehöriges gefunden, und dennoch verdienen dieſe Maſchinen, die oft ſo ſehr wichtige Dienſte leiſten müſſen, eine vorzügliche Aufmerkſamkeit. Mir iſt es bey einigen Sprützenproben, wobey ich gegenwärtig geweſen bin, ſo vorgekommen, als wenn man bey dieſer Art der Arbeit das mechaniſche Moment der Kraft eines Menſchen um ein beträchtliches gröſſer annehmen könne, als man es gewöhnlich ſchätzt, wenn die Arbeiter eine Kurbel drehen. (317 §.) Doch iſt bey den Proben nicht auf alle Umſtände ſo genau geſehen worden, wie ich es gewünſcht hätte. Die Hamburgiſche Geſellſchaft zur Beförderung der Künſte und nützlichen Gewerbe hatte vor etwa zweyen Jahren demjenigen einen Preiß von 100 Spec. Ducaten verſprochen, der die beſte Feuerſprütze liefern würde:

und die Herrn Vorſteher der Geſellſchaft haben dem Königl. Däniſchen Hof-Mechanicus, Herrn Neubert zu Hamburg den Preis zuerkannt, weil derſelbe mit zwoen neuen gelieferten Sprützen der Preisaufgabe nach ihrem Urtheil ein völliges Genüge geleiſtet hat. Mit dieſen Neubertſchen Sprützen hat man am 19 Sept. vor. Jahrs eine Probe auf der Admiralitäts-Weide angeſtellt, und die Geſellſchaft hat die Nachricht davon in dem 76 St. der Hamb. Addreß-Comtoir-Nachrichten, und im 153 Stück des Hamburgiſchen Correſpondenten vom J. 1769 bekannt machen laſſen. Eine dieſer Sprützen hat ein kupfernes 25 Cubikfuß haltendes Gefäß mit 108 Schlägen oder Zügen in 2 Min. 10 Sec. gefüllet, und da man in die Weite ſprützte, reichte der Strahl bis auf 125 Fuß weit, bey einer Neigung des Rohrs von 45°. In der erſten Erzählung hievon an den angef. Orten iſt nicht beſtimmt angegeben, durch wieviel Mannſchaft die Sprütze ſey bearbeitet worden; allein aus einer im 187 Stück des Hamburgiſchen Correſpondenten befindlichen neuen hieher gehörigen Anzeige ſiehet man, daß acht Arbeiter ſind gebraucht worden. Die Sprütze hat alſo in einer Minute $11\frac{1}{2}$ Cubikfuß Waſſer ohngefehr 62 bis 63 Fuß hoch gebracht (409 §.) Wegen des Widerſtandes der Luft und andrer Hinderniſſe der Bewegung kann man alſo für die Höhe k wohl 70 Fuß annehmen, wenn man die Formuln des 409 §. auf dieſe Probe anwenden will. Weil die Geſellſchaft bisher noch keine Beſchreibung von der ganzen Anordnung der Sprütze, und ihren Abmeſſungen bekannt gemacht hat; ſo kann ich die Schlüſſe des 410 §. nicht anwenden, um b und α zu finden.

Indeſſen iſt die Zeit eines Kolbenzuges $1\frac{1}{5}$ Secunde geweſen: und weil die Arbeiter die angegriffenen Querſtangen gewöhnlich um eine Tiefe von 3 bis $3\frac{1}{2}$ Fuß, oder höchſtens 4 Fuß niederdrücken, ſo iſt ohngefehr $\alpha = 3$ Fuß geweſen. Wenn man nun $M = 25$ Cubikfuß, $k = 70$ Fuß, $\alpha = 3$ Fuß, $T = 130$ Sec. ſetzt, ſo erhält man $\eta m = \frac{Mk}{\alpha T}$ (409 §.) $= \frac{25 \cdot 70}{3 \cdot 130} = 4{,}5$. Nimmt man $m = 4$ an, ſo wird $\eta = \frac{45}{40}$ Cubikfuß; wenn man aber $m = 8$ ſetzt, ſo hat man $\eta = \frac{45}{80}$ Cubikfuß. Wenn ich nun nur Hamburger Maaß verſtehe, welches viel kleiner, als das Rheinländiſche iſt, ſo wiegt ein Cubikfuß Waſſer ohngefehr 50 Pf. Hätten alſo die Leute blos gedruckt, nicht gehoben, ſo müſte jeder mit einer Kraft von 65 Pf. gegen die angegriffenen Stangen gedruckt haben, welches bey der Geſchwindigkeit von 3 Fuß viel zu ſeyn ſcheinet. Hätten aber die Leute ununterbrochen gehoben, und wieder niedergedruckt, ſo hätten ſie beſtändig eine Kraft von 28 Pf. anwenden müſſen. Auch dieſe Arbeit ſcheint zu ſchwer zu ſeyn, als daß die Leute nicht bald ermüden ſollten. Zu einer ſolchen Probe ſind vermuthlich nicht die ſchwächſten Leute vom Hrn. Neubert gewählt worden, und deswegen zweifle ich noch, ob man einen ſolchen Effect allemahl von 8 Mann erwarten könne. Soviel ſcheint indeſſen dieſe Probe zu beſtättigen, daß man bey 3 Fuß Geſchwindigkeit die Kraft eines Mannes bey dieſer Arbeit wohl auf 1 Cub. Fuß Waſſer ſchätzen könne, wenn man alsdenn ſtatt m die halbe Anzahl Arbeiter ſetzt, oder auf $\frac{1}{2}$ Cubikfuß,

wenn man durch m die ganze Anzahl derſelben verſtehen will. Ich will annehmen, daß m die Anzahl der Paare bedeutet, ſo iſt für jedes Paar $\eta = 1$.

415 §.

Man nehme nun an, eine Sprütze ſoll das Waſſer 75 Fuß hoch treiben, und man will nicht mehr, als acht Mann ſie zu bearbeiten brauchen, ſo wird man auf folgende Art die Anordnung ihrer Theile finden. Die Steigröhre wird ungefähr 9 Fuß Höhe bekommen; und weil $f + e = 75$ ſeyn ſoll, ſo wird $e = 66$ Fuß. Dies giebt $k = f + e + \frac{e^2}{E} = 90$ Fuß, und $k - f = 81$ Fuß. Ferner hat man $M = \frac{\eta m \alpha T}{k} = \frac{4 . 3 . 60}{90} = 8$ Cub. Fuß, wenn man für T eine Minute nimmt. Man nehme an, die Siefel ſollen 6 Zoll $= \frac{1}{2}$ Fuß weit ſeyn, ſo wird $M = \frac{1}{2}\pi . \frac{aa}{n} . T\sqrt{g(k-f)}$ und $n = \frac{\frac{1}{2}\pi aa T\sqrt{g(k-f)}}{M}$. Damit nun die Kraft der Arbeiter ſicher nicht zu groß geſchätzt werde, will ich Hamburger Maaß annehmen, welches ſich zum Rheinländiſchen wie 1270 zu 1391,2 verhält; ſo wird $g = 17{,}117$, und $\sqrt{g} = 4{,}137$. Ueberdem iſt $\sqrt{(k-f)} = 9$, alſo wird $n = \frac{1}{8} . \frac{11}{7} . \frac{1}{4} . 60 . 4{,}137 . 9 = 110$, und $\sqrt{n} = 10{,}48$, folglich $h = \frac{a}{\sqrt{n}} = \frac{72}{10{,}48} = 7$ Linien. Ferner findet man

$\beta = \frac{2 \cdot 4{,}137 \cdot 9}{110} = 0{,}677$ Fuß, und dies giebt

$\mu = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{0{,}677} = 4{,}5.$ Will man alſo die Kolbenſtangen 1 Fuß weit vom Mittelpunkt anbringen, ſo müſſen die Querſtangen, welche die Arbeiter angreifen $4\frac{1}{2}$ Fuß weit vom Mittelpunkt entfernt, alſo der ganze Wagebalken 9 Fuß lang ſeyn. Was den gefundenen Werth von h betrift, ſo muß ich noch erinnern, daß dies eigentlich der Durchmeſſer des zuſammen gezogenen Waſſerſtrahls ſeyn würde, dafern man ſtatt des Aufſatzes auf dem Gußrohr, das übrigens nach Vorſchrift des 412 §. eingerichtet ſeyn muß, eine durchlöcherte Platte brauchte. Dafern man das Verhältniß der Zuſammenziehung $= \sqrt{2} : 1$ annimmt, ſo muß man $h = 7\sqrt{\sqrt{2}}$ ungefähr $= 8\frac{1}{3}$ Linien annehmen, wenn h den Durchmeſſer der Oefnung der Platte bedeuten ſoll (38 §.).

416 §.

Wenn die Sprütze nur mit einem Stiefel verſehen iſt, ſo bedient man ſich ſtatt des Wagebalkens wohl nur einer Druckſtange, welche die Natur eines
70 Hebels der zweyten Art hat, dergleichen GK allein
Fig. wäre, wenn man den andern Arm HK wegließe. Man ſiehet wohl, daß der Guß einer Sprütze, die nur einen Stiefel führt, während der Zeit, da der Kolben wieder gehoben wird, aufhören muß, der im Gegentheil alsdenn wenigſtens größtentheils ununterbrochen bleibt, wenn die Sprütze mit zweyen Stiefeln verſehen iſt, die ihr Waſſer wechelsweiſe ergieſſen. Wenn die Sprützen mit einem Stiefel

dieſer

dieſer Unbequemlichkeit nicht unterworfen wären, ſo würden ſie um deswillen vor den Sprützen mit zweyen Stiefeln einen anſehnlichen Vorzug haben, weil ſie einen doppelt ſo groſſen Effect leiſten könnten, ohne daß man mehr Mannſchaft nöthig hätte. Ich ſetze voraus, daß jeder Arbeiter mit einer Kraft von 50 und mehrern Pfunden drücken kann, wenn die Einrichtung ſo gemacht iſt, daß zum Heben des Druckbalkens nur eine ſehr geringe Kraft nöthig iſt. Dafern nun die Anzahl der Arbeiter bey einer Sprütze mit dem einfachen Stiefel = m iſt, ſo iſt ihre geſammte Kraft bey 3 Fuß Geſchwindigkeit ſo groß, als das Gewicht von m Cubikfuß Waſſer. Wenn dagegen eben die Anzahl die Sprütze mit dem doppelten Stiefel bearbeitet, ſo iſt ihre geſammte Kraft bey eben der Geſchwindigkeit nur halb ſo groß. Dennoch wird die Sprütze mit dem einfachen Stiefel bey jedem Kolbenzuge doppelt ſo viel Effect thun, als wenn ſie zwey Stiefel hätte. Wäre nun eben ſo viel Zeit nöthig, den Kolben wieder zu heben, als zum niederdrücken erfordert wird, ſo würde dies freylich den Effect, im ganzen genommen, wieder ſehr vermindern. Brächte ſie während eines Kolbenzuges die doppelte Waſſermenge auf eben der Höhe, worauf die Sprütze mit doppelten Stiefel binnen eben der Zeit die einfache Waſſermenge brächte; ſo würde doch binnen der folgenden eben ſo langen Zeit die erſtere Sprütze gar nichts, die zweyte aber eben dieſelbe einfache Menge wieder auf eben die Höhe bringen. Im ganzen genommen, würden demnach beyde Effecte gleich ſeyn. Könnten aber die Arbeiter den Kolben des einfachen Stiefels binnen halb ſo vieler oder noch kürzerer Zeit wieder heben,

ſo würde der Effect des einfachen Stiefels doch um ein anſehnliches gröſſer ſeyn, als wenn man zwey Stiefel gebrauchte. Unter den hieſigen Stadtſprützen iſt eine ſolche befindlich, die nur einen Stiefel führt, und ich habe bey verſchiedenen Proben bemerkt, daß die Schläge ſehr ſchnell auf einander folgen, ohne daß der Waſſerſtrahl ſehr merklich unterbrochen wird. (Vorläufig muß ich hiebey erinnern, daß die Sprütze mit keinem Windkeſſel verſehen iſt). Genaue Verſuche darüber habe ich noch nicht anſtellen können: indeſſen iſt es mir nach einer ohngefehren Schätzung ſo vorgekommen, daß zum Heben des Kolbens nicht mehr, als ohngefehr der vierte Theil der Zeit nöthig geweſen iſt, die zum Niederdrucken erfordert ward. Dafern dies ſeine Richtigkeit hat, ſo wird eine ſolche Sprütze in 5 Zeittheilen eben ſo viel Waſſer auf eben die Höhe bringen können, wozu die Sprütze mit doppelten Stiefel 8 eben ſo groſſe Zeittheile nöthig hat, und der Effect jener Sprütze wird $\frac{8}{5}$ des Effects von dieſer Sprütze ſeyn.

417 §.

Dafern eine ſolche Sprütze mit dem einfachen Stiefel von 6, 8 und mehrern Leuten bearbeitet werden ſoll, ſo kann es in engen Gaſſen an Platz fehlen, wenn alle Arbeiter an einer einzigen Querſtange bey einander ſtehen ſollen. Um dies zu vermeiden, laſſen ſich auch zwey Druckbalken ſo anbringen, daß jeder ſein beſonderes Geſtelle hat. An jedem Druckbalken wird alsdenn eine eigene Kolbenſtange in der gehörigen Entfernung vom Mittelpunct gehängt: die Geſtelle werden ſo angeordnet, daß die Druckbalken eine entgegen geſetzte Lage bekommen,

und der eine von K nach G zu liegt, wenn ſich der andre von K nach H zu erſtreckt. Wenn alsdenn die Bewegungspuncte um den doppelten Abſtand einer jeden Kolbenſtange von dem zugehörigen Bewegungspunct von einander entfernt ſind; ſo werden beyde Kolbenſtangen neben einander herab hängen, und man kann ſie alle beyde mit dem Kolben gehörig verbinden. Hat nun jeder Druckbalken ſeine eigene Querſtange, ſo kann jede derſelben von der Hälfte der Arbeiter angegriffen werden. Und wenn alsdenn alle zugleich drücken und wieder heben, ſo iſt es eben ſo viel, als wenn alle an einer und eben derſelben Druckſtange arbeiteten. Die hieſige im vor. §. erwehnte Stadtſprütze iſt ſo eingerichtet: ſie hat den Ruf, daß ſie unter allen die beſte, und am leichteſten zu bearbeiten ſey. Ich habe ſelbſt verſchiedenemahl geſehen, daß ſie das Waſſer um ein anſehnliches höher treibt, als die übrigen.

418 §.

Die Formuln des 413 §. laſſen ſich ohne weitere Aenderung gebrauchen, die Anordnung einer ſolchen Sprütze zu berechnen, wenn man nur bemerkt, daß $\eta = 1$ geſetzt werden könne, wenn gleich durch m die ganze Anzahl aller einzelnen Arbeiter verſtanden wird. Man kann während der Rechnung die Sprütze als eine ſolche betrachten, die ihr Waſſer ununterbrochen ergieſt: nur muß man am Ende der Rechnung folgende Aenderung machen, wenn man von ihrem Effect richtig urtheilen will. Wenn die Zeit eines Kolbendrucks $= \vartheta$ und die Zeit des darauf folgenden Kolbenhubs $= \frac{1}{\nu}\vartheta$ iſt, ſo hebt die

Sprütze die während der Rechnung gebrauchte Waſſermenge M nicht in der Zeit T, ſondern in der Zeit $T + \frac{1}{\nu} T$ auf die Höhe $f+e$; folglich hebt ſie in der Zeit T eigentlich die Waſſermenge $\frac{\nu}{\nu+1} M$ auf dieſe Höhe, wenn M diejenige Menge bedeutet, die man während der Rechnung gebraucht hat. Zur vollſtändigen Theorie dieſer Sprützen würde alſo noch erfordert werden, die Zeit genau zu wiſſen, welche den Kolben wieder zu heben erfordert wird. Was die Theorie hievon lehren kann, wird folgende Aufgabe ergeben.

419 §.

Die Sprütze hat die zuletzt beſchriebene Einrichtung, man ſucht die Zeit, welche den Kolben wieder zu heben erfordert wird, vorausgeſetzt, daß die Kraft gegeben ſey, welche den Kolben aufwärts zieht.

Aufl. Um erſtlich die Geſchwindigkeit des Kolbens zu finden, muß man die allgemeine Aufgabe des 292 §. auf dieſen beſondern Fall folgendermaßen anwenden. Weil hier keine Saugröhre vorhanden iſt, (ich rede noch nicht von derjenigen Einrichtung, die man Zubringer nennt), ſo hat man $mH = 0$, und der 292 §. giebt $q = \frac{(k-f)w - \frac{1}{2}w^2}{\varepsilon + w}$, da dann ε die Höhe des niedrigſten Kolbenſtandes über die unterſte Oefnung des Stiefels iſt. Ferner hat man der dortigen Bezeichnung gemäß $f = \beta + \varepsilon - a$, und hier iſt $\beta = 0$, alſo $f = \varepsilon - a$, folglich

$q =$

$q = \frac{(k+a-\varepsilon)w - \frac{1}{2}w^2}{\varepsilon + w}$, da dann a die Höhe des Waſſers im Behälter, oder dem ſo genannten Kumm, über die untere Oefnung des Stiefels iſt. Ueberdem iſt hier ε ſehr klein, und beträgt ungefähr 6 bis 9 Zoll; alſo kann man die im 304 §. für t gefundene Formul nicht brauchen, und man müſte die Gleichung

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{dw\sqrt{(\varepsilon+w)}}{\sqrt{(k+a-\varepsilon)w - \frac{1}{2}w^2}}$$

integriren, um t zu finden. Wäre der Stiefel anfangs ganz leer, ſo wäre $\varepsilon = 0$, und die Gleichung verwandelte ſich alsdenn in folgende,

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{dw}{\sqrt{(k+a-\frac{1}{2}w)}}.$$

Weil nun ε hier ſehr klein iſt, ſo wird das Waſſer noch beynahe eben ſo ſteigen, als wenn $\varepsilon = 0$ wäre, und man kann die letzte Gleichung ſtatt der erſten, ohne ſehr beträchtlich zu fehlen, gebrauchen, um die Schwierigkeit der Integration zu vermeiden. Ich will nun f ſtatt a ſchreiben, um Verwirrung zu vermeiden, weil in dieſem Abſchnitt a allemal den Durchmeſſer des Stiefels bedeutet. Setzt man alsdenn $k+f-\frac{1}{2}w=z$, ſo wird $dw = -2dz$, und $dt = \frac{1}{\sqrt{g}} z^{-\frac{1}{2}} dz$, alſo $t = C - \frac{2}{\sqrt{g}} z^{\frac{1}{2}}$. Für $w=0$, muß $t=0$, und $z=k+f$ ſeyn. Demnach wird $C = \frac{2}{\sqrt{g}} \sqrt{(k+f)}$, und $t =$

$\frac{2}{\sqrt{g}}$

$\frac{2}{\surd g}(\surd(k+f)-\surd(k+f-\frac{1}{2}w))$. Iſt nun die Höhe des Kolbenzuges $= b$, ſo wird die Zeit des ganzen Kolbenzuges

$$t = \frac{2}{\surd g}(\surd(k+f)-\surd(k+f-\tfrac{1}{2}b)).$$

Dieſer Ausdruck wird deſto kleiner, je gröſſer $k+f$, und deſto größer, je kleiner $k+f$ iſt, wenn b einerley bleibt. Es kann aber $k+f$ nicht kleiner, als $\frac{1}{2}b$ ſeyn, weil ſonſt t unmöglich würde.

420 §.

Der Kolben ſoll in gegebener Zeit t um eine gegebene Höhe b gehoben werden: man frägt, wie ſtark die Kraft ſeyn muß, die den Kolben zu heben ſtrebt.

Aufl. Man darf nur die im vor. §. gefündene Gleichung umkehren. Wenn nämlich, vermöge der dort angenommenen Vorausſetzung, der Stiefel anfangs beynahe ganz leer iſt; ſo hat man $\frac{1}{2}t\surd g = \surd(k+f)-\surd(k+f-\frac{1}{2}b)$, oder $\frac{1}{2}t\surd g+\surd(k+f-\frac{1}{2}b)=\surd(k+f)$. Man quadrire, und ziehe auf beyden Seiten $k+f$ ab, ſo wird

$$\tfrac{1}{4}gtt+t\surd g(k+f-\tfrac{1}{2}b)-\tfrac{1}{2}b=0,$$

und dies giebt

$$\surd(k+f-\tfrac{1}{2}b) = \frac{b}{2t\surd g}-\tfrac{1}{4}t\surd g.$$

Quadrirt man aufs neue, ſo findet man

$$k+f=\tfrac{1}{2}b+\left(\frac{b}{2t\surd g}-\tfrac{1}{4}t\surd g\right)^2.$$

Die

Die Folgen aus dieſer Gleichung kommen mit den vorhin bemerkten überein. Es wächſt $k+f$, wenn t abnimmt, und umgekehrt, wenn t gröſſer wird, ſo nimmt $k+f$ ab, kleiner aber als $\frac{1}{2}b$ kann $k+f$ nicht werden. Dem Anſehen nach könnte auch $k+f$ mit t wachſen, wenn $\frac{1}{4}t\sqrt{g} > \frac{b}{2t\sqrt{g}}$ wäre. Aber dies würde $tt > \frac{2b}{g}$ geben, und dies kann deswegen nicht ſeyn, weil der gröſste Werth, den t haben kann, $= \frac{2\sqrt{(k+f)}}{\sqrt{g}}$ iſt, und alsdenn hat man $k+f = \frac{1}{2}b$, alſo $t = \sqrt{\frac{2b}{g}}$.

421 §.

Wenn man dieſe Rechnungen auf die gegenwärtige Unterſuchung anwenden will; ſo muß man folgendes erwägen. Indem die Arbeiter bey einer Sprütze, ſo wie ſie jetzt betrachtet wird (416 §.), den Kolben heben, müſſen ſie nicht allein die Friction des Kolbens an der innern Fläche des Stiefels, ſondern auch denjenigen Widerſtand überwinden, der vom Gewicht des Kolbens, der Kolbenſtange, und des Druckbalkens abhängt. Dieſen geſammten Widerſtand ſetze ich jetzt beyſeite, und frage, ob außerdem noch Kraft nöthig ſey, den Kolben in gegebener Zeit um eine gewiſſe Höhe zu heben, ſo wie dergleichen Kraft beym Saugwerk nöthig iſt. Die Antwort auf dieſe Frage ergiebt ſich aus dem 419. und 420 §. Im Anfang der Arbeit, ſo lange der

Kumm noch ganz oder beynahe angefüllet iſt, erfordert dies gar keine Kraft, weil das Waſſer, welches außerhalb des Stiefels noch beträchtlich hoch über dem niedrigſten Kolbenſtand ſtehet, für ſich hineindringen, und den Kolben heben würde, wenn die erwähnten Hinderniſſe nicht da wären. Es ſey im 419 §. $k = 0$, ſo wird $t = \frac{2}{\sqrt{g}}(\sqrt{f} - \sqrt{(f - \frac{1}{2}b)})$. Nimmt man nun $f = 2$ Fuß, $b = 1$ Fuß an, ſo wird $\frac{2}{\sqrt{g}}$ ungefähr $\frac{1}{4}$ und $t = 0{,}0947$ Sec. ungefähr $\frac{1}{10}$ Sec. Könnten alſo die Arbeiter den Druckbalken ſo ſchnell heben, daß der Kolben binnen $\frac{1}{10}$ Sec. um 1 Fuß ſtiege, ſo würden ſie dabey keine andre Kraft anzuwenden nöthig haben, als diejenige, welche die ſchon erwähnten Hinderniſſe zu überwinden erfordert wird. Die hiezu nöthige Kraft würde ſich nach dem 162 §. Mech. berechnen laſſen. Sollte der Kolben langſamer ſteigen, und etwa in $\frac{1}{4}$ Sec. um 1 Fuß gehoben werden, ſo findet man aus dem 420 §.

$$k = \tfrac{1}{2}b + \left(\frac{b}{2t\sqrt{g}} - \tfrac{1}{4}t\sqrt{g}\right)^2 - f = -1\tfrac{7}{16}\ \text{F.}$$

Der negative Werth von k ergiebt, daß keine Kraft den Kolben zu heben, ſondern vielmehr ihn unterwärts zu drücken erfordert werde, wenn das Waſſer ſo langſam ſteigen ſoll. Der Druck deſſelben gegen den Kolben hebt alſo zum Theil ſchon die übrigen Hinderniſſe der Bewegung.

Wäre der Kumm ſchon mehrentheils ausgeleert, ſo würde zwar eine Kraft, den Kolben zu heben nöthig

thig ſeyn; ſie bliebe aber doch ſo geringe, daß ſie für die Arbeiter faſt gar nicht in Anſchlag kommen dürfte. Wenn man $f=0$ ſetzt, und die übrigen Zahlen, wie im letzten Exempel beybehält, ſo findet man $k = \frac{9}{16}$ Fuß. Wegen der zu überwindenden Hinderniſſe wird alſo die Arbeit den Sprützendrückern nicht zu ſchwer ſeyn, wenn man annimmt, daß ſie bey der Sprütze mit einem Stiefel den Kolben etwa binnen dem vierten Theil der Zeit heben können, welche ihn niederzudrücken erfordert wird. Die angegriffenen Querſtangen würden freylich mit einer Geſchwindigkeit von ohngefehr 12 Fuß in einer Secunde gehoben werden müſſen, indeſſen ſcheint es, daß die Arbeiter ihnen dieſe Geſchwindigkeit wohl mittheilen können, weil die zu überwindende Laſt wenig oder nichts zubedeuten hat, und ein Menſch ſeine Hände noch wohl um ein beträchtliches ſchneller bewegen kann.

422 §.

Wenn man die durch das äuſſerſte Ende der Druckbalken durchgeſteckten Querſtangen ſo lang machen wollte, daß ſechs, acht und mehr Perſonen daran Platz hätten, ſo würde es oft in etwas engen Gaſſen an hinlänglichen Raum fehlen. Dennoch wird eine ziemliche Anzahl erfordert, wenn man eine beträchtliche Menge Waſſer ziemlich hoch treiben will. Um deswillen ſcheint die Einrichtung einige Vorzüge zu haben, welche bey einer zu Ipern verfertigten Feuerſprütze angebracht iſt, und wovon Hr. Belidor in der Architectura Hydraul. III Buch IV Cap. 1086 §. folgende Beſchreibung mittheilt. Der Wagebalken CD iſt bey dieſer Sprütze nur ſo lang, 72 Fig.
als

als die Entfernung beyder Kolbenſtangen CE und DF von einander erfordert. An der Welle AB deſſen hängt zu beyden Seiten ein ſtarkes Bleuel Eiſen BO herab, welches hier den zweyten Hebelsarm abgiebt, ùm vermittelſt deſſelben die Welle AB hin und wieder zu drehen. Unten bey O hängt an jedem Bleuel-Eiſen ein langer hölzerner Baum LM ſo, daß derſelbe um O beweglich iſt, übrigens aber ſich ſelbſt im Gleichgewicht hält, ſo daß ſein Schwerpunkt in O fallen muß. Dieſe beyden Bäume geben hier die Schiebſtangen ab: an denſelben ſind in gleichen Entfernungen von einander hölzerne Zapfen ſo befeſtiget, daß zwiſchen jeden zweyen ein Arbeiter zum Schieben Platz hat. Sie ſind nach Art eines Handgriffs geformet, damit die Arbeiter ſie bequem angreifen, und vermittelſt derſelben die Schiebſtange hin und wieder bewegen können. Die ganze Sprütze iſt auf einer Schleife ſtatt des ſonſt gewöhnlichen Wagens befeſtiget, und dies hat nicht allein den Nutzen, daß die Arbeiter an der Stange bequemer ankommen können; ſondern es iſt auch deswegen hier nöthig, weil bey dieſer Art des Schiebens der Wagen nicht ſo gut feſt ſtehen würde. Die Anzahl der Schiebnägel richtet ſich nach der Anzahl Arbeiter, die man brauchen will. An der Ipernſchen Sprütze befinden ſich zehn Nägel an jeder Stange, ſo daß zwanzig Perſonen an der Sprütze Arbeiten können. Dieſe Leute ſchieben alle zugleich, und würken insgeſammt mit gleicher Kraft in die Kolben.

423 §.

Die Abmeſſungen aller Theile der Sprütze hat Hr. Belidor nicht angegeben. Jedoch befindet

ſich

ſich bey den Zeichnungen ein Maaßſtab, und nach demſelben ſcheinen die Abmeſſungen folgende zu ſeyn. Die Weite der Stiefel beträgt im Durchmeſſer 9 Zoll, die Länge des Bleueleiſens zwiſchen den Mittelpunkten der beyden bey B und O befindlichen Zapfen, alſo der Abſtand der Kraft, iſt 27 Zoll, der Abſtand der Kolbenſtangen vom Mittelpunkt der Bewegung aber 9 Zoll. Dies giebt $\mu = 3$. Hieraus findet man $k = \frac{\eta m \mu}{\frac{1}{4}\pi aa}$ (408 §.), und man kann durch m die ganze Anzahl der Arbeiter verſtehen, wenn man $\eta = \frac{1}{2}$ ſetzt. Dies giebt $k = \frac{\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 3}{\frac{22}{28} \cdot \frac{9}{16}} =$ 68 Fuß. Nach der Zeichnung zu urtheilen, beträgt f auf 14 Fuß, alſo wäre $k - f = 54$ Fuß, und man findet die würkliche Länge des Waſſerſtrahls = $\sqrt{(300 \cdot 54 + \frac{1}{4} 300^2)} - 150 = 46$ Fuß. Aus der Zeichnung iſt nicht wohl zu erkennen, wie weit die Mündung des Gußrohrs angenommen ſey. Deswegen wird es am beſten ſeyn durch Rechnung zu ſuchen, wie weit dieſelbe ſeyn müſſe, wenn die Sprütze den ganzen Effekt würklich leiſten ſoll, der dadurch zu erhalten iſt.

Dafern man $\alpha = 3$ Fuß annimmt, ſo wird $\beta = \frac{\alpha}{\mu} = 1$ Fuß, alſo $n = \frac{2\sqrt{g(k-f)}}{\beta} = 2 \cdot \sqrt{15{,}1 \cdot 54} = 57$, und $\sqrt{n} = 7{,}5$, woraus $h = \frac{a}{\sqrt{n}} = \frac{9}{7\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{5}$ Zoll gefunden wird, und für eine Minute

nute iſt die Waſſermenge $= \frac{\eta m \alpha T}{k} = 26\frac{1}{2}$ C. F. Vielleicht aber darf man bey dieſer Art der Arbeit nur $\alpha = 2$ Fuß annehmen, und dies würde $M =$ 18 Cub. Fuß, $h = 85{,}5$, $\sqrt{n} = 9{,}2$, und $h = \frac{a}{\sqrt{n}}$ = beynahe 1 Zoll geben.

Der XXX. Abſchnitt.

Von Sprützen mit dem Wind-Keſſel.

424 §.

Obgleich bey Sprützen mit doppeltem Stiefel der eine ſein Waſſer binnen der Zeit ergießt, da der andre ſich anfüllt, ſo kann dadurch doch nicht zuwege gebracht werden, daß die Sprütze ihr Waſſer völlig ununterbrochen ergießt. In dem Augenblick, da die Kolben umkehren, kommt alles in Ruhe, und dadurch wird auch die Bewegung des hinaufſteigenden Waſſers ſo lange gehemmet, bis der andre Kolben wieder in Bewegung iſt. Deswegen nennt man auch dergleichen Sprützen gewöhnlich Stoß-Sprützen, weil ſie ihr Waſſer ſo zu ſagen Stoßweiſe ergießen. Das iſt die Urſache, weswegen man darauf bedacht geweſen iſt, den Feuerſprützen eine ſolche Einrichtung zu geben, wobey ein ununterbrochener Waſſerguß erhalten werden könnte. In ſolcher Abſicht wird die Sprütze mit einem ſo genann-

ten

ten Windkeſſel verſehen. Man ſtellet zwiſchen beyden Stiefeln AB und CD ein ſtarkes metallenes Gefäß IL, und verbindet daſſelbe mit den Stiefeln vermittelſt der Knie- oder Kropfröhren OP und QR, damit das Waſſer, welches die Kolben aus den Stiefeln durch die Knieröhren hinaus drücken, in dieſen Windkeſſel trete. Die Knieröhren ſind mit Klappen verſehen, die dem Waſſer den Rückweg verſchließen. Indem nun das Waſſer in dem Windkeſſel nach und nach höher ſteigt, treibt es die darin befindliche Luft über ſich hinauf, und preſt ſie in einen engern Raum zuſammen, als ſie vorher im natürlichen Zuſtande einnahm. Mit eben dem Windkeſſel hängt nun auch die Steigröhre ſo zuſammen, wie es die 71 Fig. vorſtellt. Es iſt nämlich die 70 Figur ein Durchſchnitt oder Profil der ganzen Sprütze mit einer durch die Mittellinie des Wagebalkens vertical geſetzten Ebene. Wenn man ſich nun durch K eine andre verticale Ebene vorſtellt, die auf der vorigen ſenkrecht iſt; ſo giebt ſich eine Durchſchnitts-Figur, ſo wie ſie die 71 Figur vorſtellt. Daſelbſt iſt AB der Durchſchnitt mit dem Windkeſſel, womit die Steigröhre BCDEF zuſammen hängt. Dieſe Steigröhre iſt bey C mit einem Hahn M verſehen, um ſie alsdenn zu verſchließen, wenn die Sprütze nicht als Giebelſprütze gebraucht werden, ſondern zu andrer Abſicht dienen ſoll, wovon im folgenden Abſchnitt ſoll gehandelt werden. Eben dieſer Hahn kann auch ſo lange verſchloſſen gehalten werden, bis in den Windkeſſel ſo viel Waſſer hinein gedrungen iſt, als erfordert wird, die Luft gehörig zuſammen zu preſſen; ſo weit nämlich, bis der Ueberſchuß ihrer Federkraft über die Federkraft der

71 Fig.

natürlichen Luft beynahe dem Gewicht einer Waſſerſäule gleicht, wozu die Höhe *k* gehört. Man ſiehet leicht, daß die Arbeiter durch das Einpumpen des Waſſers die eingeſchloſſene Luft zwar bis zu dem erwehnten Grad der Dichtigkeit, aber nicht weiter zuſammen preſſen können, wenn man gleich den Hahn länger verſchloſſen halten wollte. Wird nun dem Waſſer durch Oefnung des Hahns der Durchgang durch die Steigröhre verſtattet, und der Abgang des Waſſers durch das fortgeſetzte Pumpen beſtändig erſetzt; ſo behält die eingeſchloſſene Luft beynahe beſtändig einerley Federkraft, und treibt das Waſſer auch binnen der Zeit, da die Kolben umkehren, zum Gußrohr hinaus. Beym Belidor a. a. O. im 1087 §. findet man eine vollſtändige Beſchreibung und Zeichnung von einer ſolchen mit einem Windkeſſel verſehenen Feuerſprütze.

425 §.

Wenn man dieſe Betrachtungen mit dem 262 §. vergleicht, ſo ergiebt ſich daraus, daß das Waſſer von der eingeſchloſſenen Luft während der wenigen Zeitmomente, darin die Kolben umkehren, beynahe auf eben diejenige Höhe werde gehoben werden, auf welche es der Druck der Kolben treibt. Zwar dehnt ſich binnen dieſen Zeitmomenten die Luft etwas wieder aus, und verliert dadurch einen Theil ihrer Federkraft: ſie wird aber durch den gleich darauf folgenden Kolbendruck wieder in eben den vorigen Raum zuſammen gepreſt. Damit dieſe Ausdehnung in Vergleichung des ganzen Raums, den ſie im völlig zuſammen gepreſten Zuſtande einnahm, nicht beträchtlich ſey, muß der Windkeſſel nicht zu klein

klein ſeyn. Gewöhnlich giebt man ihm die Geſtalt eines Cylinders, macht ihn alsdenn eben ſo hoch, als die Stiefel ſind, und etwa nochmal ſo weit im Durchmeſſer.

Man findet leicht, wie hoch das Waſſer in den Windkeſſel hinein treten werde, wenn ſeine Abmeſſungen gegeben ſind. Es ſey VZ die ganze Höhe 71
deſſelben über die Oefnung BV des Steigrohrs, ſo Fig.
wird der Raum AZVY mit Luft von natürlicher Dichtigkeit angefüllet ſeyn, wenn das Waſſer bis an VY geſtiegen iſt. Die geſuchte gröſte Höhe ſey VX, und die der natürlichen Federkraft der Luft zugehörige Höhe $= p$, ſo hat man $k : p = VZ : XZ$, weil im völlig zuſammengepreſten Zuſtande der Federkraft der Luft die Höhe k zugehört. Dies giebt $k - p : k = VZ - XZ : VZ = VX : VZ$, alſo wird $VX = \frac{k-p}{k} . VZ$.

426 §.

Binnen der Zeit, da die Kolben umkehren, ſinke die Oberfläche des Waſſers WX in wx, und man ſetze $Xx = \omega$, ſo läſt ſich ω finden, wenn die Geſchwindigkeit des aus dem Gußrohr ſprützenden Waſſers bekannt iſt, und die Zeit, worin die Kolben umkehren. Dieſe Zeit ſey $= \tau$, ſo ſprützt aus der Gußrohr-Mündung binnen dieſer Zeit die Menge Waſſer $\frac{1}{4}\pi hh . 2\tau\sqrt{gx}$, wenn x die der Geſchwindigkeit des Waſſers zugehörige Höhe iſt. Des Windkeſſels Durchmeſſer ſey $= \delta$, ſo tritt binnen eben dieſer Zeit aus demſelben die Menge Waſſer $\frac{1}{4}\pi\delta\delta\omega$, und dieſe muß der vorigen gleich ſeyn. Demnach erhält man die Gleichung $2hh\tau\sqrt{gx} = \delta\delta\omega$, und es wird $\omega =$

$\frac{hh}{\delta\delta} . 2\tau\sqrt{gx}$. Je größer alſo δ in Vergleichung mit h iſt, deſto kleiner wird ω ſeyn. Wie groß nun eigentlich τ ſey, läßt ſich nicht wohl beſtimmen. Es ſcheint indeſſen, daß dieſe Zeit nicht über den 16ten, vielleicht nicht den 20ſten Theil, von der Zeit ϑ des ganzen Kolbenzuges betragen werde. Setzt man $\tau = \frac{1}{\nu}\vartheta$, ſo wird $\delta\delta\omega = \frac{2}{\nu}\vartheta hh\sqrt{gx}$, und $\delta\delta = \frac{2\vartheta hh\sqrt{gx}}{\nu . \omega}$. Dieſe Gleichung würde beſtimmen, wie groß $\delta\delta$ genommen werden müſſe, damit ω eine gegebene Gröſſe werde.

Weil binnen der Zeit eines Kolbenzuges die Waſſermenge $\frac{1}{4}\pi aab$ in den Windkeſſel tritt, und binnen eben dieſer Zeit die Menge $\frac{1}{4}\pi\delta\delta\omega$ darin zurückbleibt, die in der Zeit τ ausſprützt, ſo wird $2\vartheta hh\sqrt{gx} = aab - \delta\delta\omega$, alſo $\nu\delta\delta\omega = aab - \delta\delta\omega$, und daraus folgt $aab = (\nu + 1)\delta\delta\omega$, oder $\frac{\delta\delta\omega}{aab} = \frac{1}{\nu + 1}$. Demnach würde es nur darauf ankommen, die Zahl ν zu kennen, um δ aus ω und umgekehrt zu finden.

427 §.

Wenn man die Einrichtung des Windkeſſels ſo macht, daß ω ſehr klein ausfällt; ſo läßt ſich die Theorie dieſer mit einem Windkeſſel verſehenen Sprützen auf die vorige bringen. Während eines Kolbenzuges wird die Waſſerſäule WXVY im Windkeſſel beynahe in beſtändiger Ruhe bleiben: aber das unter VY im Windkeſſel befindliche Waſſer wird gegen die Oefnung BV der Steigröhre ſtrömen. Man kann

kann ſich alſo die Vorſtellung machen, daß zwiſchen der Oefnung P oder R desjenigen Knie-Rohrs, welches jetzt ſein Waſſer ergieſt, und der Oefnung BV ein Canal entſtehe, der beyde das Knierohr und Steigrohr als zuſammenhängende Röhren verbindet. Um alsdenn die Geſchwindigkeit des Waſſers genau zu berechnen, müſte man die Geſtalt dieſes Canals kennen, und das Integral H für die Steigröhre, für den erwähnten Canal und die Knieröhre ſuchen, nicht anders, als wenn dieſe drey Stücke eine einzige in einem Stück fortgehende Röhre ausmachten. Man ſiehet aber wohl, daß derjenige Theil dieſes Integrals, welcher von dem im Windkeſſel entſtehenden Canal abhängen würde, nicht beträchtlich ſeyn könne, zumal da die Querſchnitte dieſes Canals gröſſer, als die Querſchnitte der übrigen Steigröhre ſind. Deswegen finden die vorigen Formuln insgeſammt ihre Anwendung, nur mit dem einzigen Unterſchied, daß das Waſſer nicht völlig die Höhe erreichen wird, die es nach den vorigen Regeln erreichen ſollte. Denn es dringt nicht in völlig gleicher Zeit durch die Mündung des Gußrohrs eben ſo viel Waſſer, als durch die Querſchnitte des Stiefels, weil bey jedem neuen Kolbenzuge die eingeſchloſſene Luft nachgiebt, und deswegen ein Theil des Waſſers im Windkeſſel zurück bleibt, der hiernächſt allererſt von der Luft nachgetrieben wird, indem die Kolben umkehren. Indeſſen bleibt beynahe

die Geſchwindigkeit des Kolbens $= \frac{1}{n}\sqrt{(k-f)}$,

und die Zeit eines Kolbenzuges $= \frac{nb}{2\sqrt{g(k-f)}}$,

 wie

wie im 404 §.: auch wird die Menge Waſſer, welche die Sprütze in gegebener Zeit ergieſt, nach den obigen Regeln richtig gefunden, weil das während eines Kolbendrucks in den Windkeſſel hinein getretene Waſſer binnen der Zeit hinaus getrieben wird, da der Guß einer Stoß-Sprütze ſonſt aufhören würde.

428 §.

Die Höhe zu finden, auf welche eine mit dem Windkeſſel verſehene Giebelſprütze das Waſſer treiben wird.

Aufl. Es ſey wie bisher, die Höhe des Kolbenzuges $= b$, und die Zeit eines Kolbenzuges $= \vartheta$, ſo tritt in der Zeit ϑ in den Windkeſſel die Menge Waſſer $= \frac{1}{4}\pi aab$. Wenn nun δ und ω die Bedeutungen des 426 §. behalten, ſo bleibt im Windkeſſel die Menge Waſſer $\frac{1}{4}\pi\delta\delta . \omega$ zurück, und in der Zeit ϑ ergieſt das Guß-Rohr die Menge Waſſer $\frac{1}{4}\pi(aab - \delta\delta\omega)$. Die Geſchwindigkeit, womit es zum Gußrohr herausſprützt, gehöre der Höhe x, ſo ergieſt es in der Zeit t die Waſſermenge $\frac{1}{4}hh . \vartheta . 2\sqrt{gx}$. Weil nun dieſe der vorigen gleich ſeyn muß; ſo erhält man $hh . \vartheta . 2\sqrt{gx} = aab - \delta\delta\omega$.

Ferner iſt $\vartheta = \frac{nb}{2\sqrt{g(k-f)}}$ (416 §.) $=$

$\frac{aab}{2hh\sqrt{g(k-f)}}$, alſo $2hh\vartheta\sqrt{g} = \frac{aab}{\sqrt{(k-f)}}$.

Dies in die vorige Gleichung geſetzt, giebt

$\frac{aab}{\sqrt{(k-f)}}\sqrt{x} = aab - \delta\delta\omega$, und daraus folgt

$\sqrt{x}$

$\sqrt{x} = \sqrt{(k-f)} - \frac{\delta\delta\omega}{aab}\sqrt{(k-f)}$; folglich wird

$x = \left(1 - \frac{\delta\delta\omega}{aab}\right)^2 (k-f)$. Aus dieſer der Geſchwindigkeit des hervorſprützenden Waſſers zugehörigen Höhe, wird diejenige Höhe, welche es würklich erreicht, eben ſo wie im 405 §. gefunden. Wenn nemlich e dieſe Höhe iſt, ſo erhält man $e = \sqrt{(Ex + \frac{1}{4}E^2)} - \frac{1}{2}E$, da dann $E = 300$ iſt (28 §.).

Je kleiner demnach $\delta\delta\omega$ in Vergleichung mit aab iſt, deſto weniger wird die Höhe, auf welche die Sprütze das Waſſer treibt, von derjenigen unterſchieden ſeyn, worauf ſie es heben würde, wenn der Windkeſſel fehlte. Wenn alles übrige gehörig eingerichtet iſt, ſo wird der Bruch $\frac{\delta\delta\omega}{aab}$ deſto kleiner, je kürzer die Zeit iſt, binnen der die Kolben umkehren (426 §.). Es ſcheinet alſo, daß hiebey das meiſte auf die Leute ſelbſt ankomme, welche die Sprütze bearbeiten. Weil die eine Hälfte der Arbeiter mit der andern im Niederdrucken abwechſelt; ſo gehört einige Uebung dazu, wenn der eine Theil in demſelben Augenblick einen neuen Druck anfangen ſoll, da der andre Theil mit dem Drücken nachläſt. Uebrigens wird auch der erwähnte Bruch deſto kleiner, je gröſſer b iſt, wenn alles übrige einerley bleibt: alſo ſcheint es rathſam zu ſeyn, die Einrichtung ſo zu machen, daß b wenigſtens nicht kleiner als 1 Fuß ausfalle.

429 §.

Man wird nunmehro aus dem bisherigen leicht den allgemeinen Schluß ziehen, daß eine Sprütze, die mit dem Windkeſſel verſehen iſt, allemal einen kleinern Effekt leiſte, als eine andre ohne Windkeſſel, wenn ſonſt alles übrige einerley iſt. Zwar kann die Sprütze mit dem Windkeſſel eben ſo viel Waſſer in eben der Zeit ergießen, allein ſie wird es nicht völlig zu eben der Höhe bringen, wie eine andre ohne Windkeſſel. Wenn die Sprütze zwey Stiefel führet, und alles übrige recht eingerichtet iſt, ſo hat der Unterſchied der Höhe von derjenigen, die ſie ohne Windkeſſel erreichen könnte, ſo gar viel nicht zu ſagen, wenn die Leute nur die Bewegung ſchnell genug in die entgegengeſetzte verwandeln. Geſetzt, indem die Kolben umkehren, vergeht der 20ſte Theil der Zeit eines Kolbenzuges, ſo iſt im 426 §. $\nu =$ 20, und $\frac{\delta\delta\omega}{aab} = \frac{1}{21}$. Dies giebt im 428 §.

$$x = \frac{20^2}{21^2} = (k-f) = \frac{9}{10}(k-f).$$

Wenn dagegen die Sprütze nur einen Stiefel führt, und man verſiehet ſie mit einem Windkeſſel, um einen aneinanderhängenden Waſſerſtrahl zu erhalten, ſo vermindert dies die Höhe gar ſehr, die der Strahl ſonſt erreichen würde. Wenn man die Zeit eines Kolbendrucks $= \vartheta$, und die Zeit, welche zum Heben nöthig iſt, $= \frac{1}{\nu}\vartheta$ ſetzt, ſo finden die bisherigen Schlüſſe ebenfalls ihre Anwendung. Kleiner, als $\frac{1}{4}\vartheta$, kann man die zum Heben nöthige Zeit wohl nicht

nicht annehmen, und dies würde doch $\frac{\delta\delta\omega}{aab} = \frac{1}{5}$, alſo $x = \frac{16}{25}(k-f) = \frac{64}{100}(k-f)$ geben. Die Höhe alſo, die das Waſſer erreicht, würde nur ungefähr $\frac{2}{3}$ der Höhe betragen, auf welche es die Sprütze ohne Windkeſſel gebracht hätte. Ich muß alſo aufrichtig ſagen, daß ich nicht abſehe, was der Windkeſſel bey einer Sprütze für ſonderlichen Nutzen ſchaffen ſoll. Etwa, um der Sprütze das Anſehen eines Springbrunnens zu geben? Allein die Abſicht iſt nicht, daß die Würkung der Sprütze das Auge beluſtigen, ſondern unter göttlichem Beyſtand der Einäſcherung ganzer Städte zur Zeit der Noth begegnen ſoll. Ein einziger Grund dürfte den Windkeſſel rechtfertigen, und das iſt dieſer. Bey jedem neuen Kolbendruck muß das Waſſer von neuen beſchleuniget werden: Das, was zuerſt aus der Mündung des Gußrohrs heraus tritt, hat noch eine viel geringere Geſchwindigkeit, als es haben müſte, um zu der Höhe zu gelangen, welche es eigentlich erreichen ſoll. Dieſer Theil des herausſprützenden Waſſers wird alſo nicht bis an den Ort hingelangen, wo er das Feuer löſchen ſoll, und folglich unnütz verlohren gehen. Iſt aber die Sprütze mit dem Windkeſſel gehörig verſehen, ſo erhält man dadurch einen völlig ununterbrochenen Guß ins Feuer, und es geht nichts verlohren.

430 §.

Es würde demnach, wenn man den Windkeſſel beybehalten will, noch darauf ankommen, eine ſichere Regel zu geben, wornach man die richtige Abmeſſung des Windkeſſels nach Proportion der Stiefel

und übrigen Anordnung der Sprütze finden könne. Ich muß geſtehen, daß mir die bisher vorgetragene Theorie nicht zulänglich ſcheint, eine ſolche Regel daraus herzuleiten. Der Windkeſſel ſoll ziemlich weit ſeyn, aus der im 425 und 427 §. ſchon angeführten Urſache, damit das Waſſer in demſelben beſtändig beynahe auf einerley Höhe ſtehen bleibe. Bey einer Sprütze, die nur einen Stiefel führt, iſt dies nöthiger, als bey einer ſolchen, die mit zweyen Stiefeln verſehen iſt, weil bey jener ein weit gröſſerer Theil des Waſſers durch die zuſammen gepreſte Luft fortgetrieben werden muß, als bey dieſer. Bey jener Sprütze würde ſich alſo die Federkraft der Luft beträchtlich vermindern, wenn der Windkeſſel nur eben ſo weit, als der Stiefel wäre. Auf der andern Seite aber hat der Windkeſſel die ſchädliche Würkung, daß deſto mehr Kolbenzüge anfangs dazu gehören, ihn auf die gehörige Höhe zu füllen. Und wenn man nicht während der erſten Kolbenzüge den Hahn an der Steigröhre ſo lange verſchlieſt, bis die Luft hinlänglich zuſammen gepreſt iſt, ſo dauret es anfangs ziemlich lange, bevor der Waſſerſtrahl die rechte Höhe erreicht, weil ſich die Würkung der Kraft in die Zuſammenpreſſung der Luft, und die Beſchleunigung des Waſſers in der Steigröhre theilt. Bey der Sprütze mit zweyen Stiefeln dürfte daher ein Windkeſſel von eben der Weite, wie die Stiefel, völlig genügen, wenn er eben ſo hoch wäre. Indeſſen getraue ich mir nicht, darüber etwas mit Gewißheit zu entſcheiden. Eine nähere von der Hamburgiſchen Geſellſchaft zu erwartende Bekanntmachung der im 414 §. angeführten Neubertſchen Sprützen, und ihrer ganzen Anordnung, wird davon vielleicht mehr Licht geben.

431 §.

431 §.

Bey der Anordnung einer ſolchen mit einem Windkeſſel verſehenen Sprütze iſt übrigens ein Umſtand in Erwägung zu ziehen, der deswegen eine vorzügliche Bemerkung verdienet, weil man ihn gewöhnlich aus der Acht läßt. Man muß die Knie-Röhren *OP* und *QR*, welche die Stiefel mit dem Windkeſſel verbinden, eben ſo weit, oder doch ſehr wenig enger im Durchmeſſer machen, als die Stiefel ſind. Dieſe Regel hat Hr. Dan. Bernoulli ſchon gegeben (Hydrod. Sect. IX. §. 16. p. 171 ſqq.) und folgende Gründe werden ſie rechtfertigen. Bey der geſammten bisherigen Theorie von der Bewegung des Waſſers durch Röhren, liegt die Vorausſetzung zum Grunde, daß ſich die Querſchnitte der Röhre nach dem Geſetz der Stetigkeit ändern. Da, wo es Stellen der Röhre giebt, die auf einmahl ſehr viel enger, als die vorhergehenden werden, fließt das Waſſer nicht frey genug durch, und wenn ſich der Canal bald darauf plötzlich wieder erweitert, ſo entſtehen macherley Aenderungen in der Richtung und Geſchwindigkeit der durchfließenden Waſſertheilchen, welche ſchwerlich einer theoretiſchen Rechnung fähig zu ſeyn ſcheinen, und die obigen bisher auf die Theorie der Sprützen angewandten allgemeinen Formuln müſſen um deswillen von dem würklichen Erfolg deſto mehr abweichende Reſultate geben, je öfter das Waſſer durch ſolche Stellen der Röhre durchfließen muß, die ſehr viel enger, als die vorhergehenden und nachfolgenden ſind. Ich darf alſo wohl nicht weiter erinnern, daß auch die Oefnungen der an den Knieröhren bey *P* und *R* angebrachten Klappen-Ventile

70 Fig.

tile völlig ſo weit im Durchmeſſer ſeyn müſſen, als die Knieröhren ſelbſt ſind.

71 Fig. Wenn demnach die Steigröhre BCDEF bey C mit einem Hahn M verſehen iſt, ſo muß auch die Oefnung dieſes Hahns, durch welche das Waſſer durchflieſſen ſoll, vollig ſo weit ſeyn, als die Steigröhre ſelbſt iſt. Kein Fehler iſt nachtheiliger, und der guten Würkung einer Sprütze hinderlicher, als wenn die Oefnung dieſes Hahns, oder eine andere ähnliche Oefnung, ſehr eng gemacht wird. Es muß überhaupt bey der ganzen Sprütze keine Stelle ſeyn, die dem Waſſer den Durchgang erſchweret.

432 §.

Ich muß demnach auch dies noch als einen der gewöhnlichſten Fehler bey den Feuerſprützen bemerken, daß man unten in den Stiefeln bey *S* und *T* Muſchel-Ventile braucht. Dieſe ſind hier um deswillen vorzüglich ſchädlich, weil die Zeit eines Kolbenzuges gewöhnlich ſehr kurz und auf 1 bis 1½ Secunden eingeſchränkt iſt. Ja wenn die Sprütze ſchnell und eifrig bearbeitet wird, ſo währet jeder Kolbenzug kaum eine ganze Secunde. Nun kann aber in dieſer ſo kurzen Zeit durch den engen Ring zwiſchen der Ventilhülſe und der Muſchel nicht ſo viel Waſſer von unten hinauf dringen, als den ganzen Raum des Kolbenzuges füllet. Daher kommt es denn, daß die Sprütze auf jeden Schlag lange nicht ſoviel Waſſer giebt, als ſie bey einer beſſern Einrichtung der Ventile geben würde. Dies hat überdem noch den ſchlimmen Erfolg, daß die Arbeiter, indem ſie den einen Kolben niederdrücken, und zugleich den andern heben, die ganze Laſt der auf den letzten Kolben drückenden Atmoſphäre mit überwinden

winden müſſen, daß alſo lange nicht der ganze Druck dazu verwandt wird, das Waſſer vermittelſt des niedergehenden Kolbens in die Höhe zu treiben. Dieſe Gründe gegen die Muſchel-Ventile finden alſo vorzüglich alsdenn ihre Anwendung, wenn die Sprütze nur einen Stiefel führt, und die Druckbalken ſehr ſchnell wieder gehoben werden. Die Belidorſchen Balancier-Klappen (391 §.) würden hier unſtreitig mit dem beſten Erfolg zu gebrauchen ſeyn. Doch dürfte wohl nicht jeder Künſtler ſie mit der nöthigen Genauigkeit verfertigen können, in welchem Fall auch einfache Gewindeklappen ſtatt jener ſehr gute Dienſte leiſten würden.

433 §.

Es iſt im 411 §. ſchon eine Regel gegeben, welche die Geſtalt des Gußrohrs betrift, und ich kann nicht umhin, ihrer hieſelbſt nochmahl zu erwehnen. **Man muß das Gußrohr wenigſtens nicht völlig coniſch machen, ſo daß es ſich von *E* bis zur oberſten Mündung beſtändig verengert.** Man mache es entweder völlig cylindriſch, etwa 2 bis 3 Zoll weit, und ſchlieſſe es oben mit einem durchlöcherten Deckel, deſſen Oefnung nach den Regeln des 410 §. zu berechnen iſt; oder wenn es etwa bey E noch auf 3 Zoll Weite hat, und man will ihm die Geſtalt eines abgekürzten Kegels geben, der ſich gegen die oberſte Mündung zu verjüngt; ſo richte man es wenigſtens ſo ein, daß die obere kleinſte Grundfläche dieſes abgekürzten Kegels im Durchmeſſer zum wenigſten nochmahl ſo weit bleibe, als die Oefnung des Deckels, durch welche das Waſſer ausſprützen ſoll. Wenn alſo z. E. dieſe Oefnung 9 Linien im Durchmeſſer hielte, ſo muß das Rohr

71 Fig.

ſelbſt

ſelbſt an ſeiner oberſten Stelle noch $1\frac{1}{2}$ Zoll weit ſeyn. Uebrigens iſt es nicht nöthig das Rohr über 4 Fuß lang zu machen. Wenn es alsdenn nicht unnöthig dick von Metall, ſondern nur ſo ſtark gemacht wird, daß es den Druck des Waſſers aushalten kann, welcher nach den 403 §. gefunden wird; ſo wird es leicht und bequem gelenket werden können, und nicht unnöthig ſchwer ſeyn.

Ich habe nach dieſen Regeln verſchiedene Feuerſprützen in hieſiger Gegend blos durch Erweiterung ſowohl des Gußrohrs ſelbſt, als auch der oberſten Gußrohr Mündung, anſehnlich verbeſſert. Die erſte Probe iſt zu Güſtrow gemacht worden, woſelbſt ich dem bey einer Sprütze beſtellten Rohrführer anrieth, ſein Gußrohr erweitern zu laſſen, und es alsdenn mit einer durchlöcherten Platte zu ſchlieſſen. Er folgte dieſem Rath, und kam nach einiger Zeit zu mir mit der Nachricht, daß ſeine Sprütze jetzt wenigſtens anderthalb mahl ſoweit reiche als vorher, daß der Strahl ſich jetzt auf eine viel gröſſere Strecke zuſammen halte als vorher, bevor er ſich in Tropfen zertheile, und daß die Sprütze leichter als vorher zu bearbeiten ſey; alles wie ich es ihm vorher geſagt hatte *). Jetzt ſehe ich mit ungemeinem Vergnügen aus den Göttingſchen Allgemeinen Unterhaltungen 86 Stück 678. 679 S. daß die Verſuche, welche Herr Kampe zu Göttingen angeſtellt hat, hiemit aufs ſchönſte übereinſtimmen. Er machte vor einigen Jahren an einer der alten Götting-

*) Dieſer Verſuch iſt nach der Zeit mehrmahls wiederhohlt worden, und man hat es noch beſſer gefunden, wenn ſtatt dieſer Platte ein cylindriſches Mundſtück von 4 bis 6 Zoll Länge aufgeſetzt wird.

tingiſchen Sprützen eine Veränderung mit dem alten ſpitzzugehenden Rohr, ſo daß ſtatt des alten ſpitzzugehenden Rohrs ein kupfernes Rohr von gleicher Weite 2½ Zoll im Durchmeſſer haltend angeſetzt wurde, worauf Aufſätze von ½ Zoll, ¾ Zoll und 1 Zoll Oefnung geſchraubt werden konnten. Die Würkung davon war folgende: der erſte Aufſatz von ½ Zoll brachte den Strahl auf das Dach des Göttingiſchen Kaufhauſes, der zweyte Aufſatz von ¾ Zoll auf die Mitte des Dachs, und der Dritte von 1 Zoll Weite bis an den Gipfel des Dachs von eben dieſem Hauſe. Die Höhe des Gipfels beträgt 86½ Calenbergiſche Fuß, welches etwa 80 Rheinländiſche Fuß ausmacht, (nach einer genauen Meſſung, die Herr Kampe nach der Zeit hat anſtellen laſſen, und wovon er in einem neuern Aufſatz Nachricht giebt, der im 99 u. 100 Stück der Allgemeinen Unterhaltungen abgedruckt iſt), und die Neigung des Waſſerſtrahles war zwiſchen 60 und 70 Grad, alſo kann die ſenkrechte Höhe deſſelben wohl auf 83 Rh. Fuß gerechnet werden.

434 §.

Herr Kampe widerlegt durch dieſe Verſuche das ſehr allgemeine Vorurtheil, als wenn ein ſtärkerer Waſſerſtrahl mehr Kraft brauche, als ein dünnerer Strahl, wenn beyde gleich hoch gehen ſollen. Dies iſt allerdings falſch, wenn ſonſt die übrige Anordnung der Sprütze für beyde Fälle einerley iſt: indeſſen dürfte es doch auch bedenklich ſcheinen, wenn Hr. Kampe a. a. O. 677 S. folgendes hinzuſetzt. „Wer aber die Sache von der rechten Seite betrachtet, der wird vielmehr umgekehrt ſchlieſſen, und geſtehen müſſen, daß der groſſe Strahl, den eine

„Sprütze nach ihrer Anordnung und nach Maaßgabe „der Gröſſe ihrer Stiefel, imgleichen der Weite der „Röhren und Schlangen leiden kann, auch mit glei„chen Kräften weiter getrieben werden könne „und müſſe". Der Beweis wird daher genommen, weil die Hinderniſſe der Bewegung, als der Widerſtand der Luft, und das Reiben in dem ſpitzzugehenden Rohr beym dünnern Strahl ſtärker ſind, als beym dickern Strahl. Dies hat nun freylich ſeine Richtigkeit: allein es iſt nicht alles, was hiebey in Erwägung gezogen werden muß. Eigentlich hat es damit folgende Bewandniß. Wenn man annimmt, daß die Weite der Stiefel, nebſt der ganzen Anordnung der Sprütze für beyde Fälle einerley iſt, ſo wird der dünne Strahl eben ſo hoch als der dickere ſteigen, wenn das, was hier eigentlich Kraft heißt, d. i. der Druck der Kolben gegen das unter ihm befindliche Waſſer für beyde Fälle einerley iſt, und gar keine Hinderniſſe der Bewegung vorhanden ſind, auch die gröſte Oefnung nur ſo weit iſt, daß die Zahl $n^2 = \frac{a^4}{h^4}$ (402 §.) noch ſehr groß bleibt. Allein dennoch wird ein gröſſeres mechaniſches Moment eben der Kraft erfordert, um den dickern Strahl eben ſo hoch zu treiben, als den dünnern Strahl. Wenn der Strahl dicker iſt, ſo giebt die Sprütze in gleicher Zeit mehr Waſſer, die Stiefel werden ſchneller ausgeleert, deswegen ſinken die Kolben ſchneller, und der angegriffene Punkt, oder wie man gewöhnlich redet, die Kraft muß ſich ſchneller bewegen. Aus dieſer Urſache kann man doch dem Aufſatz nicht jede willkührliche Weite geben, wenn es gleich ſonſt die übrigen Umſtände zu-

lieſſen, und man weiß, daß der gröſte Vortheil erhalten werde, wenn der angegriffene Punct grade ſo geſchwinde gehet, daß das mechaniſche Moment der Kraft am gröſten wird. Bey gröſſerer Dicke des Strahls, als dieſe Bewegung leidet, weicht der angegriffene Punct dem Druck der Arbeiter zu ſchnell aus, der Druck wird geringer, als er bey geringerer Geſchwindigkeit und dünnerm Strahl ſeyn würde, und alsdann geht der dickere Strahl nicht ſo hoch, als der dünnere. Eben daſſelbe hat auch Hr. Kampe am Ende der angeführten Abhandlung 681 S. ſehr wohl erinnert. Es heiſt daſelbſt: „Es verſtehet ſich aber „von ſelbſt, daß dergleichen Oefnung nur ſo groß „gemacht werden könne, daß zu jedem Druck oder „Zuge in der ganzen Höhe des Stiefels nicht weni„ger als $1\frac{1}{4}$ bis 1 Secunde Zeit erfordert wird, weil „widrigenfals die Strahlhöhe wieder abnehmen muß, „indem der Druck ſonſt zu geſchwinde gehet, und „nicht mit den gehörigen Kräften der druckenden „Perſonen verrichtet werden kann.“ Man wird gegen dieſe Regeln nicht verſtoſſen, wenn man ſich an die Vorſchriften des 413 §. hält, und das im 415 §. gegebene Exempel kannn dazu dienen, dieſe Schlüſſe zu erläutern. Es war bey der dort berechneten Sprütze $a = 6$ Zoll und $h = \frac{7}{12}$ Zoll, $n = 110$, $n^2 = 12100$, $k - f = 81$, $\mu = 4\frac{1}{2}$, $g = 17,117$, und dies giebt $\alpha = \frac{2\mu\sqrt{g(k-f)}}{n} = 3$ Fuß. Wollte man nun $h = 1$ Zoll nehmen, ſo würde, wenn alles übrige einerley bliebe, die Sprütze in eben der Zeit dreymahl ſoviel Waſſer geben. Man hätte nun $\frac{a}{h} = 6$, $\frac{a^2}{h^2} = n = 36$, und $n^2 = 1296$. Ob

 nun

nun gleich dieſe Zahl noch ſo groß iſt, daß der Werth von v beynahe $= \frac{1}{nn}(k-f)$ bleiben würde (402 §); ſo würde man doch $\alpha = \frac{2 \cdot 4,5 \cdot 4,137 \cdot 9}{36} = 9,3$ Fuß erhalten, und dies müſte die Geſchwindigkeit des angegriffenen Puncts ſeyn, die unſtreitig zu groß wäre, als daß die Arbeiter noch mit eben der Kraft, wie bey der Geſchwindigkeit von 3 Fuß in denſelben würken könnten.

435 §.

Der neuere am Ende des 433 §. erwehnte Aufſatz des Herrn Kampe im 99 und 100 Stück der Allgemeinen Unterhaltungen enthält ſehr nützliche das Sprützenweſen betreffende Anmerkungen und Nachrichten. Ich hätte indeſſen an einigen Stellen noch etwas mehr beſtimmte Nachrichten gewünſcht, um die hieſelbſt erzehlten Verſuche deſto beſſer nutzen zu können. Auf der 795 S. meldete Hr. Kampe folgendes von der Sprütze, womit die oben im 433 §. angeführten Verſuche angeſtellet ſind: „Es „iſt eine Sprütze nach der alten Art, mit Stiefeln „von 7 Zoll Weite, und daneben hat dieſelbe ſo wenig eine Windblaſe, als Schlangen-Schläuche, „ſondern ſie iſt nur mit einem Wenderohr verſehen, „und hat ſehr lange hölzerne Druckbalken, welche 1 „Fuß hoch Waſſer aus den Stiefeln ausdrücken kön„nen, u. ſ. f.“ Hier hätte ich eine genauere Anzeige des Verhältniſſes beyder Hebelsarme gegen einander gewünſcht. Bey ſehr langen Druckbalken iſt gewöhnlich die Höhe des Kolbenzuges weit unter einen

Fuß; und weil die Tiefe, um welche die Arbeiter ihre angegriffenen Querſtangen niederdrücken, ſchwerlich mehr als 4 Fuß beträgt, ſo kann bey 1 Fuß Kolbenhub der Abſtand der Kraft wohl nicht mehr denn 4mahl gröſſer, als der Abſtand der Kraft ſeyn. Auch hätte ich gerne eine Anzeige davon geleſen, durch wie viel Mann die Sprütze bey den oberwähnten Verſuchen iſt bearbeitet worden. Vermuthlich ſind es 16 Mann geweſen. Eine andre hieſelbſt mitgetheilte Nachricht von einer Probe, welche mit der neuen Göttingiſchen Univerſitäts-Sprütze zu Hannover angeſtellt iſt, ſcheint mir auch noch nicht ſo ganz vollſtändig zu ſeyn, als man wohl wünſchen möchte. Dieſe Sprütze hat gleichfalls 7 Zoll weite Stiefel, und die Arme des Druckbalkens ſind $5\frac{4}{5}$ mahl länger, als die Entfernung der Kolbenſtangen vom Bewegungspunct. Man hat den Sprützenkaſten aufs genaueſte gefüllet, und befunden, daß ſelbiger $16\frac{1}{2}$ Cubikfuß Waſſer gehalten. Hierauf iſt die Sprütze mit 16 Mann bearbeitet worden, und dieſe haben in 58 Secunden mit 108 Schlägen den angefüllten Kaſten leer geſprützet, der Strahl ſelbſt aber iſt von dem Waſſerkaſten ab 135 bis 140 Fuß weit fort getrieben worden. Es wird nicht gemeldet, wie weit die Gußrohr-Mündung geweſen ſey, und es iſt Schade, daß Hr. Kampe dieſen weſentlichen Umſtand anzuzeigen, vermuthlich nur vergeſſen hat. Die Mündung des Stiefels beträgt $\frac{539}{2016}$ Qu. Fuß, und wenn man $16\frac{1}{2}$ Cub. Fuß durch dieſen Flächen-Inhalt dividirt, ſo findet man 61,7 Fuß für die Höhe eines Waſſer-Cylinders auf dieſer Grundfläche, deſſen Inhalt $16\frac{1}{2}$ Cub. Fuß ausmacht. Dieſe 61,7 Fuß durch 108, als die Anzahl der Schläge,

dividirt, giebt $\frac{617}{1080}$ Fuß, oder 7 Zoll, für die Höhe des Zuges, und $5\frac{4}{5} \cdot 7$ Zoll, d. i. 3 Fuß $4\frac{3}{5}$ Zoll, für die Tiefe, um welche die Arbeiter das angegriffene Ende des Wagebalkens nieder gedruckt haben. Die Zeit eines Kolbenzuges hat $\frac{58}{108} = \frac{29}{54}$ Sec. betragen, alſo die Geſchwindigkeit der Kraft oder der angegriffenen Querſtangen, $6\frac{3}{10}$ Fuß. Weil ein weſentliches datum fehlt, ſo kann ich nach dem 410 §. das dortige k nicht berechnen: da indeſſen die Neigung des Rohrs 45° betragen hat, ſo läſt ſich nach dem 409 §. folgender Ueberſchlag machen. Aus der Weite von 140 Fuß, die der Strahl erreicht hat, würde $k = 70$ Fuß folgen: aber wegen des Widerſtandes der Luft und andrer Hinderniſſe der Bewegung kann man wohl 16 bis 20 Fuß mehr rechnen. Dies giebt $K = \frac{1}{4}\pi aak = \frac{11}{14} \cdot \frac{49}{144} \cdot 90 =$ 24 Cub. Fuß, und $F = \frac{K\beta}{\alpha} = \frac{24 \cdot 5}{29} = 4$ C. Fuß. In der Vorausſetzung alſo, daß die Arbeiter wechſelsweiſe gedrückt, nicht wieder gehoben haben, man muß für m (414 §.) die halbe Anzahl der Arbeiter nehmen, und ſo giebt dieſer Verſuch $\eta = \frac{1}{2}$ Cubikfuß. Dies kommt auch mit H. Kampens Rechnung überein, der für jeden Mann eine Kraft von $\frac{1}{3}$ Centner herausbringt. Das mechaniſche Moment der Kraft wäre alſo hier ohngefehr eben ſo groß geweſen, wie bey der Hamburgiſchen Probe der Neubertſchen Sprütze (414 §.), nur daß hier eine doppelte Kraft mit halb ſo viel Geſchwindigkeit gewürkt hat. Doch iſt dies Moment bey der Neubertſchen Sprütze würklich noch etwas gröſſer, und die Kraft mehr als doppelt ſo groß geweſen, wie die Vergleichung mit dem 414 §. ergiebt, zumahl wenn

man

man erwägen will, daß ich dort *k* nur 70 Fuß groß angenommen habe, da ich es wohl auf 75 bis 80 Fuß hätte ſchätzen können. Auch war der Effekt der Neubertſchen Sprütze würklich größer, als der Effekt der Göttingiſchen Univerſitäts-Sprütze. Bey jener haben acht Mann 25 Cub. Fuß Waſſer in 2 Min. 10 Sec. auf die Höhe von $62\frac{1}{2}$ Fuß gebracht; alſo $11\frac{2}{13}$ Cub. Fuß in 58 Secunden. In eben der Zeit von 58 Secunden hat die Göttingiſche Sprütze, die von ſechszehn Mann bearbeitet ward, $16\frac{1}{2}$ Cub. Fuß Waſſer 70 Fuß hoch gebracht. Wären beyde Effekte gleich zu ſchätzen, ſo müſte das Produkt aus der Waſſermenge in die Höhe bey der Göttingiſchen Sprütze nochmal ſo groß, als bey der Neubertſchen ſeyn, weil jene mit doppelt ſo viel Mannſchaft iſt bearbeitet worden. Man findet aber für die Neubertſche Sprütze $11\frac{2}{13} \times 62\frac{1}{2} = 697\frac{3}{26}$, und für die Göttingiſche $16\frac{1}{2} \times 70 = 1155$. Hievon iſt die Hälfte nur $577\frac{1}{2}$, alſo behält die Neubertſche Sprütze den Vorzug. An den Umſtand, daß die Neubertſche Sprütze nur von acht Mann iſt bearbeitet worden, hat ſich Herr **Rampe** wohl nur nicht erinnert, ſonſt hätte ſeine Vergleichung der Effekte nicht zum Vortheil der Göttingiſchen Sprütze ausfallen können. Ob es übrigens den Arbeitern leichter ſey, einige 60 Pfund Kraft bey 3 Fuß Geſchwindigkeit, oder einige 30 Pf. Kraft bey 6 Fuß Geſchwindigkeit anzuwenden, verdienet durch Verſuche noch nähere Prüfung, wobey vornämlich darauf zu ſehen wäre, welche Art der Arbeit die Leute am längſten, ohne zu ermüden, ertragen können.

Der XXXI. Abſchnitt.

Von den mit Schlangen verſehenen Feuer-Sprützen.

436 §.

Zu der bey einer Feuerſprütze nöthigen Geräthſchaft gehört noch der ſo genannte Schlauch, oder die Schlange. Dies iſt eine aus ſtarkem Leder oder dichtem Lein gemachte beträchtlich lange Röhre, um vermittelſt derſelben das Waſſer bey entſtandener Feuersbrunſt an ſolche Oerter zu leiten, dahin man es durch das gewöhnliche Sprützen aus dem ſtehenden Rohr nicht wohl bringen kann; wie wenn etwa in den innern Theilen eines Gebäudes ein Brand entſtanden wäre. Das Holländiſche Segeltuch iſt dazu vorzüglich brauchbar, und zu Hamburg hat man vor kurzem im dortigen Zuchthauſe eine Fabrik angeleget, wo dergleichen Schläuche ohne Nath von jeder beliebigen Länge verfertiget werden. Mit den ledernen Schläuchen, die nicht ohne Nath gemacht werden können, iſt die Unbequemlichkeit verbunden, daß die Nath wenigſtens Anfangs ſo lange viel Waſſer durchdringen läſt, bis alles zulänglich durchgenäßt und verquollen iſt. Man muß auch das Leder durch Beſtreichen mit Fett geſchmeidig erhalten, welches beym Segeltuch nicht nöthig iſt. Am bequemſten iſt es, wenn der Schlauch aus mehrern Theilen beſtehet, die vermittelſt der nöthigen Ringe und Schrauben an einander gefügt werden. Dafern

ſern die Sprüte mit einem Windkeſſel AB verſehen 71 Fig.
iſt, ſo wird unten an demſelben eine mit einem Hahn verſehene Röhre IK angebracht, auf der Seite, die der Steigröhre BCDEF entgegen geſetzt iſt, und an dieſer Röhre IK wird der Schlauch mittelſt einer Schraube befeſtiget. Das andre äuſſerſte Ende des Schlauchs wird mit einem eigenen Gußrohr verſehen, welches eine Perſon tragen und nach Erfordern wenden kann. Dafern nun alles Waſſer, was die Stiefel ſchöpfen, durch den Schlauch hinaus getrieben werden ſoll, ſo muß die Steigröhre vermittelſt des Hahes M verſchloſſen werden. Wenn die Sprütze keinen Windkeſſel hat, und doch mit einem Schlauch verſehen iſt, ſo wird gewöhnlich die Einrichtung ſo gemacht. In der 73 Fig. ſtelle man 73 Fig.
ſich über A und C die beyden Stiefel vor. Anſtatt daß die Knieröhren OP und QR ſonſt eine ſogenannte Gabel bilden, und ſich in der gemeinſchaftlichen Steigröhre vereinigen, machen ſie nun eine und eben dieſelbe horizontal liegende Röhre OPQR aus, welche beyde Stiefeln vereinbaret. Dieſe Röhre wird aber alsdenn von einer andern BK nach einem rechten Winkel geſchnitten, wovon das eine Ende mit der Steigröhre zuſammenhängt, die man ſich über B vorſtellen muß, das andre Ende aber, welches ſich nach K erſtreckt, dasjenige iſt, woran der Schlauch, wenn er gebraucht werden ſoll, befeſtiget wird. Das Waſſer geht alsdenn nach B, wenn K verſchloſſen iſt, und umgekehrt.

437 §.

Es iſt nicht nöthig, daß das Waſſer aus der am Schlauch befindlichen Gußröhre mit ſehr groſſer Ge-

ſchwindigkeit hervorſpringe, weil dieſe Einrichtung wenigſtens bey uns unter ſolchen Umſtänden gebraucht wird, wo der Rohrführer ſich dem Feuer ziemlich nähern kann, welches man löſchen will. Indeſſen ſcheint es, daß man bey einigen Feueranſtalten, auch beym Gebrauch der mit Schlangen verſehenen Sprützen, erfordere, daß das Waſſer durch die Mündung des Schlangenrohrs mit großer Schnelligkeit hervor ſprütze, und bis zu einer beträchtlichen Weite und Höhe gelange. Im Jahr 1760 iſt eine **Sammlung der bey der Stadt Hamburg eingeführten Feuer-Veranſtaltungen und Ordnungen** bey Piſcator im Druck erſchienen, und im Jahr 1768 aufs neue herausgegeben. Dieſer Sammlung ſind Zeichnungen beygefüget, und ich ſehe daraus, daß keine einzige von den Hamburgiſchen Feuerſprützen mit einem ſtehenden Rohr verſehen iſt. Man muß alſo bey den daſelbſt ſehr vortreflichen Feuer-Anſtalten den Gebrauch der ſtehenden Röhre für unnöthig halten. Dennoch aber thun die Giebelſprützen in manchen Fällen gute Dienſte, wenn z. E. bey ſtürmiſcher Luft ein Feuer ausbricht, und der Wind allerhand brennende Materien auf die Dächer und Giebel der umſtehenden Häuſer wirft. Wird das Gußrohr mit einer kurzen Schlange verbunden, ſo vertritt die Schlange die Stelle des Steigrohrs, der Rohrführer kann auf der Gaſſe bleiben, das Rohr ganz bequem, wohin er will, wenden, auch ſeinen Platz nach Erfordern verändern. Bey der in den vor. Abſchnitten beſchriebenen Giebelſprütze muß der Rohrführer ſeinen Platz oben auf der Sprütze ſelbſt nehmen, und das vermittelſt der beyden Gewinde mit der Steigröhre verbunde-

bundene Gußrohr läßt ſich nicht ſo bequem in jede nöthige Lage bringen. Dies ſind vermuthlich die Gründe, weswegen man die Hamburgiſchen Feuerſprützen mit keinen ſtehenden Röhren verſehen hat.

438 §.

Wenn die Schlange nur kurz iſt, ſo läſt ſich die ganze vorhin vorgetragene Theorie von den Giebelſprützen auch hier anwenden. Das Integral Haa (404 §.) bleibt alsdenn in Vergleichung mit nn ſehr klein, und die Zeit eines Kolbenſpiels bleibt $= \frac{nb}{\sqrt{g(k-f)}}$ (405 §.). Damit indeſſen das Integral Haa nicht zu groß ausfalle, muß der Schlauch nicht ſehr viel enger als der Stiefel ſeyn. Gewöhnlich wird der Schlauch nur 3 Zoll weit gemacht, wenn gleich die Stiefel 5 bis 6 Zoll weit ſind: und ich würde anrathen, den Schlauch noch weiter als 3 Zoll zu machen, wenn dies nicht andre Unbequemlichkeiten, beſonders bey ſehr langen Schlauchen hätte, die von der Laſt des darin enthaltenen Waſſers zerreiſſen würden; auch nicht ohne Beſchwerde in die Höhe gebracht werden können, wenn der Rohrführer ſich auf ein hohes Gebäude hinauf begeben muß, um daſelbſt einen Brand zu löſchen. Wenigſtens aber müſſen folgende Maximen beobachtet werden. Das Rohr IK, welches dem Schlauch das Waſſer zuführet, muß ſchlechterdings nicht enger ſeyn, als der Schlauch ſelbſt iſt, und eben deswegen muß auch die Oefnung des daſelbſt befindlichen Hahns L eben ſo groß ſeyn, als die Querſchnitte der Röhre IK ſind: und was die Geſtalt des Gußrohrs betrift,

trift, ſo muß man ſich an die Regeln des 419 §. halten. Ein langes nnd ſchweres Rohr iſt hier um ſo viel unnützer, weil es der Rohrführer in der Hand tragen muß.

439 §.

Dafern die Schlange auf 100 und mehrere Fuße lang iſt, ſo werden die Reſultate, welche die Formuln des 405 und 410 §. geben, ſchon merklich von dem Erfolg abweichen, wofern man nicht alles ſo angeordnet, daß die Zahl $nn = \frac{a^4}{h^4}$ dennoch ſehr viel größer bleibt, als das Integral Haa. Es ſey z. E. der Stiefel 6 Zoll, und der Schlauch 3 Zoll weit, letzterer aber 150 Fuß lang, ſo wird Haa = $150 \times 4 = 600$. Wäre nun $h = 1$ Zoll, ſo würde $nn = 1296$, und $\frac{nn}{\mathrm{H}aa} = 2\frac{1}{6}$. Weil nun $q = (k-f)\left(1 - e^{-\frac{nnr}{\mathrm{H}aa}}\right)$ iſt (402 §.), ſo wird $q = (k-f)\left(1 - \frac{1}{e}\right)$, wenn r ungefähr $= \frac{1}{2}$ iſt. Da nun e noch nicht völlig $= 3$ iſt, ſo iſt die Höhe, welche der Geſchwindigkeit des ausſprützenden Waſſers zugehört, noch nicht völlig $\frac{2}{3}(k-f)$, wenn der Kolben ſchon um einen halben Fuß geſunken iſt. Wenn dagegen $h = \frac{1}{2}$ Zoll angenommen wird, ſo erhält man $nn = 20736$, und $\frac{nn}{\mathrm{H}aa} = 34\frac{1}{2}$. Wenn nun nur r etwa 4 bis 5 Linien groß iſt, ſo wird ſchon $q = \frac{2}{3}(k-f)$; und ſo bald r etwas

was weniges über 1 Zoll groß iſt, ſo wird $q = (k-f)\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) = \frac{19}{20}(k-f)$. Demnach iſt bey dieſem Verhältniß zwiſchen a und k die Beſchleunigung ſchon ſo ſchnell, daß die Formuln des vorigen Abſchnitts ohne ſehr beträchtlichen Fehler gebraucht werden können. Wenn man nun die fünf Fundamentalgleichungen des 413 §. zu Rath ziehet, welche bey Anordnung der ganzen Sprütze zur Richtſchnur dienen, ſo ſiehet man wohl, daß die Anordnung in ſolchen Fällen, wenn f von k nicht viel unterſchieden iſt, ganz anders ſeyn müſſe, als in ſolchen Fällen, wenn k ſehr viel gröſſer als f iſt. Der letzte Fall hat bey den Giebelſprützen ſtatt, der erſtere aber gewöhnlich beym Gebrauch der Schlangen, weil der Rohrführer oft 30, 40 und mehr Fuſſe über die Kolben der Sprütze erhaben iſt, wenn er ſich in die oberſten Stockwerke eines in Brand gerathenen Gebäudes hinein begeben hat, oder auf das Dach deſſelben hinauf geſtiegen iſt. Wenn demnach eine Sprütze, als Giebelſprütze gebraucht, gute Dienſte thut, ſo wird ſie doch um deswillen nicht, als Schlangenſprütze gebraucht, eben ſo gute Dienſte thun, dafern nicht im letzten Fall nicht noch mehr Arbeiter gebraucht werden. Es iſt nemlich die Waſſermenge $M = \frac{1}{4}\pi hh T\sqrt{g(k-f)}$ (413 §.), und $k - f$ iſt bey einer gleichen Anzahl Arbeiter für die Schlangenſprütze viel kleiner, als für die Giebelſprütze, alſo auch M viel kleiner, wenn h für beyde einerley iſt. Ueberdem ergiebt die Gleichung $\beta = \frac{2\sqrt{g(k-f)}}{n}$ (413 §.), daß die Kolbenzüge viel

langſamer ausfallen. Soll demnach das Schlangen-Rohr, wenn es in einer etwas beträchtlichen Höhe gebraucht wird, noch eben ſo viel Waſſer geben, als die Giebelſprütze gab, ſo muß man entweder mehr Arbeiter haben, damit k gröſſer werde, oder die Mündung des Schlangenrohrs muß gröſſer ſeyn, als die Mündung des ſtehenden Rohrs, wenn die Anzahl der Arbeiter dieſelbe bleibt. Dies letztere hat nun zwar die Unbequemlichkeit, daß dadurch die Zahl n kleiner wird, weil man bey einerley Sprütze die Weite der Stiefel nicht ändern kann. Wenn indeſſen der Schlauch nicht ungemein lang, und $k-f$ ſehr klein iſt, ſo läſt ſich noch wohl h etwas gröſſer nehmen, ohne daß die Reſultate der Formuln des 413 §. ſehr beträchtlich von dem Erfolg abweichen werden. Die im 415 §. angeführte Anordnung einer Sprütze ſoll hier wieder zum Beyſpiel dienen.

440 §.

Daſelbſt war $k=90$ Fuß, und für die Giebelſprütze $k-f=81$ Fuß. Man ſetze, die Schlange ſoll gebraucht werden, wenn der Rohrführer 40 Fuß hoch über dem Boden der Stiefel erhaben iſt, ſo iſt $f=40$ und $k-f=50$. Wenn nun für das Schlangenrohr $h=\frac{7}{12}$ Zoll bleibt, ſo erhält man

$$M=\tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{7^2}{144^2}\, 60.4.7,$$ weil beynahe $\sqrt{g}=4$,

und $\sqrt{(k-f)}=7$ iſt, alſo $M=6{,}28$ Cub. F., und für die Giebelſprütze war $M=8$ Cub. Fuß. Man muß indeſſen bemerken, daß die Schlange dagegen das Waſſer etwas höher bringe, als die Giebelſprütze. Die ſenkrechte Höhe des Waſſerſtrahls, alle Hin-

Hinderniſſe beyſeit geſetzt, wäre 50 Fuß, alſo wird nach Mariotts Regel die würkliche Höhe 44 Fuß, und die geſammte Höhe, worauf das Waſſer gehoben wird, 84 Fuß, und dieſe war bey der Giebelſprütze nur 75 Fuß (415 §.). Bey dem allen aber bleibt doch der Effekt der Schlange geringer, als der Effekt der Giebelſprütze; denn jener iſt $= 84 \times 6{,}28 = 528$, und dieſer $= 75 \times 8 = 600$. Hiezu kommt noch dies, daß die mechaniſche Einrichtung der Sprütze, welche für die Giebelſprütze vortheilhaft war, für die Schlange nicht ſo vortheilhaft bleibt. Es wird nämlich $\beta = \frac{2\sqrt{g(k-f)}}{n} = \frac{2.4.7}{110}$, und

$$\alpha = \mu\beta = \frac{2.4.7.4{,}5}{110} = \frac{252}{110} \text{ beynahe} = 2{,}3.$$

Bey der Giebelſprütze war $\alpha = 3$ Fuß. Dafern nun dieſe Geſchwindigkeit für die Kraft am vortheilhafteſten war, ſo wird die Geſchwindigkeit von 2,3 Fuß es nicht mehr ſeyn. Eben dies iſt die Urſache, weswegen die Schlange nicht eben ſo viel Waſſer giebt, als das ſtehende Rohr gab. Soll eben die Waſſermenge von dem Schlangenrohr ergoſſen werden, ſo muß die Geſchwindigkeit α eben ſo groß bleiben, als ſie vorher war. Daß dies alles der Erfahrung völlig gemäß ſey, beſtätiget eine zu Göttingen angeſtellte Sprützen-Probe, wovon Herr Kampe in der oben (435 §.) angeführten Abhandlung die Umſtände erzählt. Allgem. Unterh. 199 St. 794 S.

Um alſo den Effekt der Schlange zu vergrößern, verfahre man nach folgenden Regeln.

Ich

Ich ſetze voraus, daß die Geſchwindigkeit α der angegriffenen Querſtangen an der Giebelſprütze diejenige ſey, wobey das Moment der Kraft $F\alpha$ am gröſten wird, und daß man die zugehörige Stärke der Kraft F kenne, welche k beſtimmt. Weil nun $\beta = \frac{2\sqrt{g(k-f)}}{n}$, und $\alpha = \mu\beta$, alſo $\alpha = \frac{2\mu\sqrt{g(k-f)}}{n}$ iſt, ſo ſuche man n aus der Gleichung $n = \frac{2\mu\sqrt{g(k-f)}}{\alpha}$, dies wird für die Mündung des Schlangenrohrs $hh = \frac{1}{n}aa$ beſtimmen, damit das Schlangen-Rohr eben ſo viel Waſſer ergieße, als das ſtehende Rohr. Wenn die Schlange nicht überaus lang iſt; ſo werden die obigen Formuln noch immer der Wahrheit ſehr nahe kommen, es wäre denn, daß auch der Schlauch in Vergleichung mit der Weite des Stiefels ſehr eng wäre, welcher Umſtand doch eben nicht eintreten wird, da man den Schlauch nicht leicht unter $2\frac{1}{2}$ bis 3 Zoll weit macht, auch ſonſt zu viel Friction zu überwinden wäre.

Im vorigen Exempel erhält man $n = \frac{2 \cdot 4{,}5 \cdot 4 \cdot 7}{3} = 84$, wenn $\alpha = 3$ Fuß genommen wird (ob dies grade die vortheilhafteſte Geſchwindigkeit ſey, entſcheide ich hier nicht). Weil nun $a =$ 6 Zoll war, ſo wird $hh = \frac{36}{84} = 0{,}428571$, und

$h =$

$h = 0,654$ Zoll $= 7,848$ Lin., alſo beynahe 8 Linien. Zur genauern Rechnung werden die folgenden Lehren Anleitung geben.

441 §.

Die Einrichtung einer Feuerſprütze anzugeben, wenn die Schlange ſehr lang iſt, und das Waſſer ſehr hoch gebracht werden ſoll.

Aufl. Die Schlüſſe des 413 §. finden hier zwar ebenfalls ihre Anwendung, nur würden die dortigen Rechnungen bey gegenwärtiger Vorausſetzung zu ſehr fehlerhafte Reſultate geben, wenn man die Zeit eines Kolbenſpiels $t = \frac{nb}{\sqrt{g(k-f)}}$ annehmen wollte. Man muß aus dem 404 §. die Gleichung $t = \frac{nb}{\sqrt{g(k-f)}} + \frac{2Haa}{n\sqrt{g(k-f)}}$.

$$l\left(1+\sqrt{\left(1-e^{-\frac{nnb}{Haa}}\right)}\right)$$ brauchen. Man ſchreibe Kürze halber λ ſtatt

$$l\left(1+\sqrt{\left(1-e^{-\frac{nnb}{Haa}}\right)}\right),$$ ſo hat man

$t = \frac{nnb + 2Haa\lambda}{n\sqrt{g(k-f)}}$, und dies giebt $\beta = \frac{2b}{t} = \frac{2bn\sqrt{g(k-f)}}{nnb + 2Haa\lambda}$, oder $\beta = \frac{nnb}{nnb + 2Haa\lambda} \cdot \frac{2\sqrt{g(k-f)}}{n}$. Ferner war $M = \frac{\frac{1}{2}\pi aab\Gamma}{t}$

(404 §.)

(404 §.) $= \frac{1}{4}\pi aa T\beta$; wenn alſo der gefundene Werth ſtatt β, und Kürze halber $\frac{nnb}{nnb + Haa\lambda} = \zeta$ geſetzt wird, ſo erhält man $M = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{aa}{n} \cdot T\zeta\sqrt{g(k-f)}$, oder $M = \frac{1}{2}\pi hh T\zeta\sqrt{g(k-f)}$. Die übrigen Gleichungen des 413 §. bleiben unverändert, und man hat nun folgende fünf Gleichungen 1) $\eta m\alpha T = Mk$, 2) $M = \frac{1}{2}\pi hh T\zeta\sqrt{g(k-f)}$, 3) $\beta = \zeta \cdot \frac{2\sqrt{g(k-f)}}{n}$, 4) $\alpha = \mu\beta$, 5) $aa = nhh$.

Wenn die Länge des Schlauchs $= l$, und ſein Durchmeſſer $= c$ geſetzt wird, ſo hat man $Haa = \frac{aa}{cc} \cdot l$, da dann die vier Gröſſen, k, f, l, α, als gegeben anzuſehen ſind. Um nun die erwähnten Gleichungen anzuwenden, wäre es wohl am bequemſten, wenn man die Zahlen $\frac{aa}{cc}$, und $\frac{aa}{hh} = n$, nebſt b willkührlich annähme, weil dieſe drey Gröſſen in der zweyten und dritten Gleichung mit den übrigen ſo ſehr verwickelt ſind: indeſſen tritt bey der gewöhnlichen mechaniſchen Einrichtung der Sprützen mit dem Druckbalken noch der Umſtand ein, daß man b nicht annehmen kann, ohne dadurch zugleich β zu beſtimmen. Die Höhe des Kolbenzuges b hängt hier von dem Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta} = \mu$ und der Gröſſe des Weges ab, den der angegriffene Punkt bey jedem Kolbenzuge zurück leget. Es ſey die Tieſe, um welche

che die Arbeiter die angegriffenen Querſtangen jedesmal niederdrücken, $= w$, ſo wird $b = \frac{\beta}{\alpha} w = \frac{1}{\mu} w$ (410 §.). Zu den Beſtimmungen, welche die obigen fünf Gleichungen geben, kommt alſo noch dieſe als die ſechſte hinzu, die bey einer andern Einrichtung, wo Rad und Getriebe abwechſeln, wegfallen würde.

Der oben angenommene Werth von ζ läſt ſich ſo ausdrücken $\zeta = \frac{nnb}{Haa} : \left(\frac{nnb}{Haa} + 2\lambda\right)$, und es iſt $\lambda = l\left(1 + \sqrt{\left(1 + e^{-\frac{nnb}{Haa}}\right)}\right)$.

Man nehme demnach die Zahl $\frac{nnb}{Haa}$ willkührlich an, und ſetze $\frac{nnb}{Haa} = B$, ſo wird dadurch ζ beſtimmt, und zugleich erhält man

$\beta = \zeta \cdot \frac{2\sqrt{g(k-f)}}{n}$, da dann $\zeta^2(k-f) = \frac{n^2\beta^2}{4g}$ die derjenigen Geſchwindigkeit zugehörige Höhe iſt, womit das Waſſer aus dem Guß-Rohr ſprützt, alle Hinderniſſe beyſeit geſetzt. Man muß demnach nun k ſo annehmen, daß dieſer Ausdruck wenigſtens 16 bis 20 Fuß beträgt. Weil nun H $= \frac{l}{cc}$ iſt, ſo giebt die erſte Gleichung $\frac{nnbcc}{aal}$

 $= B$,

$= B$, und wenn man nhh ſtatt aa, $\frac{\beta}{\alpha}w$ ſtatt b ſetzt; ſo wird $\frac{n\beta cc}{\alpha hhl}.w = B$. Hat man nun $\frac{n^2\beta^2}{4g} = A$ angenommen, ſo giebt dieſe Gleichung $\alpha hhBl = 2ccw\sqrt{gA}$. Nun kann man noch zwey Beſtimmungen willkührlich annehmen, und dazu wählt man am füglichſten c, ſo giebt ſich $h = \sqrt{\frac{2ccw\sqrt{gA}}{\alpha Bl}}$: und wenn man hiernächſt auch $\frac{\alpha}{\beta} = \mu$, oder b, willkührlich annimmt; ſo wird $n = \frac{\alpha Bhhl}{\beta ccw} = \frac{\mu Bhhl}{cc.w}$, oder $n = \frac{Bhhl}{bcc}$, und daraus wird ferner $a = h\sqrt{n}$ gefunden. Hiedurch iſt nun zugleich die Waſſermenge $M = \frac{1}{2}\pi hhT\zeta\sqrt{g(k-f)}$ beſtimmt, und die Anzahl der Arbeiter $m = \frac{Mk}{\eta\alpha T}$.

Hieraus ergiebt ſich nun, wie man die ganze Anordnung berechnen müſſe, wenn die Höhe A gegeben wäre, wozu die Geſchwindigkeit des hervorſprützenden Waſſers gehören ſoll, nebſt der Waſſermenge M. Es iſt nemlich $A = \frac{n^2\beta^2}{4g} = \zeta^2(k-f)$, alſo $\zeta\sqrt{(k-f)} = \sqrt{A}$, und $M = \frac{1}{2}\pi hhT\sqrt{gA}$. Dies giebt $h = \sqrt{\frac{M}{\frac{1}{2}\pi T\sqrt{gA}}}$. Nimmt man nun

wieder-

wiederum c willkührlich an, ſo hat man $B = \frac{2ccw\sqrt{gA}}{\alpha hhl}$, und $\zeta = \frac{B}{B + 2l\left(1 + \sqrt{\left(1 - e^{-B}\right)}\right)}$,

woraus $k = f + \frac{A}{\zeta^2}$ folgt, und $n = \frac{\mu Bhhl}{ccw} = \frac{Bhhl}{bcc}$, wenn man noch μ oder b willkührlich nimt, da dann $a = h\sqrt{n}$ wird. Anſtatt μ oder b kann man auch a willkührlich annehmen, ſo hat man $n = \frac{aa}{hh}$ und es wird $\mu = \frac{nccw}{Bhhl}$. Weil nun M und k ſchon beſtimmt ſind, ſo hat man auch $m = \frac{Mk}{n\alpha T}$.

442 §.

Obgleich die gewöhnlichen bürgerlichen Gebäude die Höhe von 60 bis höchſtens 80 Fuß nicht überſteigen, ſo will ich doch zur Probe $f = 200$ Fuß, und $l = 400$ Fuß annehmen, weil dieſe Unterſuchung nützlich ſeyn könnte, wenn man es verſuchen wollte, das Waſſer vermittelſt der Schlangen auf ſo hohe Gebäude zu bringen, als groſſe Palläſte, Kirchen und die darauf befindlichen Thürme ſind. Hiebey müſte doch der Umſtand hauptſächlich in Erwägung kommen, ob die Schläuche ſo ſtark gemacht werden können, daß ſie den Druck bey einer ſo groſſen Höhe und Länge aushalten können.

Es ſey alſo $f = 200$ Fuß und $l = 400$ Fuß; da man nun, wie ich denke, von einer Sprütze fordern kann, daß ſie bey einer Neigung des Rohrs von 45° das Waſſer wenigſtens 24 bis 30 Fuß weit werfe, ſo ſetze ich deswegen $\Lambda = 16$ Fuß. Ueberdem muß ſie wenigſtens 6 Cubikfuß in einer Minute ausgeben, alſo wird $M = 6$ für $T = 60$, und wenn ich Hamburger Maaß verſtehe, $\sqrt{g} = 4{,}137$ (415 §.). Demnach wird $hh = \frac{6}{\frac{11}{7} \cdot 60 \cdot 4{,}137 \cdot 4} = \frac{7}{11 \cdot 41{,}37 \cdot 4}$ $= 0{,}003845$, und $h = 0{,}062$ Fuß ſehr nahe 9 Linien. Die gewöhnliche Weite der Schläuche iſt 3 Zoll, und die Vorausſetzung $c = \frac{1}{4}$ Fuß giebt $B =$

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{16} \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 4{,}137 \cdot 4}{3 \cdot 0{,}003845 \cdot 400} = 1{,}6,$$

wenn $w = 3\frac{1}{2}$ Fuß angenommen wird. Recht genau läſt ſich wohl dieſe Tiefe, um welche die Arbeiter die angegriffenen Querſtangen niederdrücken, nicht in Rechnung bringen: doch werden $3\frac{1}{2}$ Fuß ohngefehr das Mittel ſeyn. Die fernere Rechnung giebt

```
Brigg. Log. e = 0,4342944
dieſer multipl. mit     1,6
              ------------
                 26057664
                 4342944
              ------------
giebt le^B   = 0,69487104
```

alſo $e^{B} = 4{,}953$, und $e^{-B} = \frac{1000}{4953}$ beynahe $= \frac{1}{5}$,

alſo $1 - e^{-B} = \frac{4}{5} = 0{,}8$, und $\sqrt{\left(1 - e^{-B}\right)}$,

beyna-

beynahe $= 0{,}9$. Dies giebt $\lambda = \log. \text{nat.}\, 1{,}9 = 0{,}642$, und $\zeta = \frac{B}{B+2\lambda} = \frac{1{,}6}{1{,}6+1{,}294} = \frac{1600}{2884} = 0{,}554$; ferner $k = 200 + \frac{16}{0{,}307} = 252$ Fuß, und $n = \frac{\mu \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}003845 \cdot 400}{\frac{1}{18} \cdot 3\frac{1}{2}}$,

wo man μ willkührlich annehmen, oder durch eine willkührlich angenommene Weite der Stiefel beſtimmen muß. Man findet $n = 13{,}1242 \cdot \mu$, und alsdenn wird $a = h\sqrt{n}$. Nimmt man nun $a = 6$ Zoll an, ſo wird $\frac{1}{4} = 0{,}003845 \cdot 13{,}1242 \cdot \mu$, und $\mu = 5$. Endlich ſetze man $\eta = \frac{1}{2}$, ſo findet man

$m = \frac{6 \cdot 252}{1\frac{1}{2} \cdot 60} = 16$. Wenn demnach der vorausgeſetzte Effect von der Sprütze erwartet werden ſoll; ſo können nicht weniger als 16 Mann daran arbeiten.

443 §.

Eine Sprütze iſt ſo angeordnet, daß ſie als Giebelſprütze gute Dienſte leiſtet, ſie ſoll mit einer Schlange verſehen werden, die ſehr lang iſt, und ſoll vermittelſt derſelben das Waſſer beträchtlich hoch treiben: man ſucht die Weite der Gußrohr-Mündung, und die Anzahl der Perſonen, welche die Sprütze zu bearbeiten erfordert wird.

Aufl. Wenn die Anordnung der Giebelſprütze für die mechaniſche Kraft vortheilhaft eingerichtet iſt, ſo muß auch beym Gebrauch der Schlange die Geſchwindigkeit α eben ſo groß, als beym Gebrauch des ſtehenden Rohrs bleiben. Weil nun die Weite des Stiefels nebſt der Höhe des Kolbenzuges in beyden Fällen einerley bleibt; (dafern man anders beym Gebrauch der Schlange nicht die Länge des Druckbalkens, und mit demſelben die Zahl μ ändern wollte,) ſo bleibt auch die Waſſermenge für beyde Fälle einerley, wenn α einerley bleibt. Durch die Anzahl der Perſonen, welche die Sprütze als Giebelſprütze bearbeiten, iſt k beſtimmt. Wenn alſo die Höhe f, um welche ſich der Rohrführer beym Gebrauch der Schlange über die Stelle erhebt, wo die Sprütze ſteht, noch um ein beträchtliches kleiner iſt, als die oben erwehnte Höhe k; ſo kann die Schlange noch wohl durch eben die Anzahl Menſchen bearbeitet werden. Wäre aber f faſt eben ſo groß, oder wohl gar gröſſer; ſo müſte ſchlechthin bey der Schlange eine gröſſere Anzahl gebraucht werden. Es ſey alſo

1) die Höhe k durch die Anzahl der Arbeiter bey der Giebelſprütze beſtimmt, und $k-f$ eine mittelmäßige Höhe von 16, 20, und mehrern Fuſſen, ſo hat man im 441 §. $n\beta = 2\zeta\sqrt{g\,(k-f)}$. Man ſetze $\frac{\alpha}{\mu}$ ſtatt β, ſo wird $n = \frac{2\mu\zeta\sqrt{g\,(k-f)}}{\alpha}$, und $\frac{B}{B+2\lambda}$ ſtatt ζ geſetzt, giebt $n = \frac{2\mu\sqrt{g\,(k-f)}}{\alpha}$ $\frac{B}{B+2\lambda}$. Ueberdem war $\frac{nnb}{Haa} = B$, und b

=

$= \frac{w}{\mu}$, $H = \frac{l}{cc}$, alſo $\frac{nnccw}{aa\mu l} = B$, woraus $n = \frac{a\sqrt{B\mu l}}{c\sqrt{w}}$ folgt. Beyde Werthe von n gleich geſetzt, geben $\frac{2\sqrt{\mu g(k-f)}}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{B}}{B+2\lambda} = \frac{a\sqrt{l}}{c\sqrt{w}}$. Aus dieſer Gleichung muß man B ſuchen, ſo findet man hiernächſt $\zeta = \frac{B}{B+2\lambda}$, und daraus ferner $A = \zeta^2(k-f)$, alſo auch $h = \sqrt{\frac{M}{\frac{1}{2}\pi T + gA}}$.

Man ſetze $\frac{2c\sqrt{\mu g w(k-f)}}{\alpha a\sqrt{l}} = C$, ſo hat man $\frac{C\sqrt{B}}{B+2\lambda} = 1$, und daraus folgt $B^2 + (4\lambda - C^2)B = -4\lambda^2$. Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind $B = \frac{1}{2}C^2 - 2\lambda \pm \sqrt{((\frac{1}{2}C^2 - 2\lambda)^2 - 4\lambda^2)}$. Ob nun gleich auch λ noch von B abhängt, ſo läſt ſich doch B ſchon beynahe finden, weil man weiß, daß beynahe $\lambda = \log. nat. 2 = 0,693147\ldots$ ſey (404 §.). Demnach kann man ſtatt λ eine Zahl annehmen, die etwas kleiner als dieſer Logarithme iſt, und daraus B ſuchen. Dies gefundene B ſetzt man alsdenn in den Ausdruck $\lambda = l\left(1 + \sqrt{\left(1 - e^{-B}\right)}\right)$, um zu prüfen, ob der angenommene Werth von λ wenigſtens beynahe herauskomme. Findet ſich noch eine beträchtliche Verſchiedenheit, ſo ſucht man aufs neue den Werth von B aus dem gefundenen Werth von λ ſo lange, bis beydes überein kommt.

Man nehme zum Beyſpiel die Zahlen des 439 §. an, ſo hat man $k-f=50$, und $\sqrt{(k-f)}$ beynahe $=7$, $\sqrt{g}$ beynahe $=4$, w ohngefehr $=3\frac{1}{2}$, $\mu=4\frac{1}{2}$. Ueberdem ſey $l=60$ Fuß, $a=\frac{1}{2}$ Fuß, $\alpha=3$ Fuß. Dieſe Vorausſetzungen geben C $=$

$$\frac{2c.4.7\cdot\sqrt{4,5\cdot3,5}}{3\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{60}}=19.c.$$

Nimmt man alſo $c=3$ Zoll $=\frac{1}{4}$ Fuß an, ſo wird C $=4,75$. Man verſuche nun die Vorausſetzung $\lambda=0,693$, ſo wird B $=9,8954\pm9,7978$. Ob nun gleich die negative Wurzel, wenn der angenommene Werth von λ dadurch berichtiget würde, der Frage ebenfalls ein Genüge leiſtet; ſo iſt doch die poſitive der Abſicht angemeſſener; und eben dieſer poſitive Werth B $=19,693$ giebt, wie man ſchon ohne weitere Rechnung überſehen kann, einen ſolchen Werth von λ, der von dem angenommenen nicht merklich unterſchieden iſt. Demnach wird $\zeta=\frac{19693}{21079}=0,934$; und weil $k-f=50$ iſt, ſo wird A $=43,615$ beynahe $=44$ Fuß. Dies giebt $hh=\frac{8}{\frac{11}{7}.60.4\sqrt{44}}$ $=0,003198$ Quad. Fuß, und $h=0,056$ Fuß $=8,064$ Linien. Es wird alſo $n=78$, und die Vergleichung mit dem 440 §. ergiebt, daß das Reſultat der dortigen Rechnung von dem hieſigen noch nicht ſonderlich verſchieden ſey, obgleich die Länge des Schlauchs ſchon ziemlich beträchtlich angenommen iſt.

444 §.

Es ſey nun

a) die Höhe $k=\frac{nm\alpha T}{M}$, welche durch die Anzahl

der Arbeiter m bey der Giebelſprütze beſtimmt iſt, ohngefehr eben ſo groß, oder wohl gar kleiner, als die Höhe f, auf welche ſich die Rohrführer beym Gebrauch der Schlange hinauf begeben muß; ſo muß man ſchlechterdings bey der Schlange eine gröſſere Anzahl Leute brauchen. Weil nun nicht allein a, ſondern auch μ ſchon beſtimmt ſind, und vorausgeſetzt wird, daß die letztere Zahl für die Giebelſprütze ſo genommen iſt, wie es der menſchlichen Kraft am gemäſſeſten iſt; ſo iſt die Waſſermenge, wie im vorigen Fall, beſtimmt. Man kann aber annehmen, die Geſchwindigkeit des hervorſprützenden Waſſers ſoll der Höhe A zugehören; ſo erhält man $hh = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi T\sqrt{gA}}$, und $n = \frac{aa}{hh}$; alſo $B = \frac{necw}{\mu hhl}$, wenn man c willkührlich annimmt, und $\zeta = \frac{B}{B+1\lambda}$. Dies giebt alsdenn $k = f + \frac{A}{\zeta^2}$, und $m = \frac{Mk}{\eta\alpha T}$.

445 §.

Wenn man dieſe letzte Auflöſung bey einer Giebelſprütze in Anwendung bringen, und die Höhe f ſehr viel gröſſer annehmen wollte, als diejenige Höhe k iſt, welche bey Anordnung der Giebelſprütze zum Grunde gelegt worden; ſo müſte man vor allen Dingen prüfen, ob auch Stiefel, Knieröhren und Windkeſſel ſtark genug blieben, den Druck auszuhalten, welcher der gröſſern Waſſerröhre $f + \frac{A}{\zeta^2}$

gemäß iſt. Eine Giebelſprütze, die nur die erforderliche Feſtigkeit hat, um den Druck einer Waſſerſäule von 100 bis 120 Fuß auszuhalten, würde demnach mit keiner Schlange verſehen werden können, die das Waſſer noch höher bringen ſollte. Bey der Anordnung einer ganz neuen Feuerſprütze, würde es in Abſicht auf die Feſtigkeit der Stiefel, der Knieröhren und des Windkeſſels, keine Schwierigkeit haben, die Anordnung ſo zu machen, daß das Waſſer allenfalls bis auf einen 300 und mehr Fuß hohen Thurm gebracht werden könnte. Eine genauere Unterſuchung würde die Frage verdienen, ob das Leder und das Segeltuch, woraus die Schlangen gemacht werden, hinlängliche Feſtigkeit haben, den Druck einer 300 bis 400 Fuß hohen Waſſerſäule auszuhalten. Was das Leder betrift, ſo mögte es an ſich ſtark genug gemacht werden können, dafern es nur möglich iſt, die Nath ſo wohl zu verſehen, daß bey einem ſo ſtarken Druck dennoch kein Waſſer durchdringen kann. Um einen ohngefehren Ueberſchlag zu machen, erinnere man ſich, daß der Druck, welchem der Schlauch an ſeinem unterſten Ende ausgeſetzt iſt, $= \gamma abr$ ſey, wenn γ das Gewicht eines Cubikfuſſes Waſſer, a die Waſſerhöhe, r den halben Durchmeſſer des Schlauchs, und b die Länge des unterſten Theils bedeutet (229 §.). Wäre nun $a = 400$ Fuß, $b = 1$ Fuß, $r = 1\frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{1}{8}$ Fuß, ſo wäre $abr = 50$; und wenn Rheinländiſch Maaß verſtanden wird, ſo muß man $\gamma = 64$ Pf. annehmen, daß alſo der Waſſerdruck $= 3200$ Pf. würde. Nach des Herrn Muſſchenbrocks Verſuchen (Introd. ad Phil. Nat. T. I. Cap. XXI. §. 1201. p. 461.) hat ein Streifen Leder, der aus einem

nem aufs beſte zubereiteten Kalbfell geſchnitten, und $\frac{55}{100}$ Zoll breit, $\frac{1}{10}$ Zoll dick war, bis auf $286\frac{3}{4}$ Pf. getragen, ehe er zerriſſen iſt. Alſo hätte ein Streifen von 1 Fuß Breite $\frac{100}{55} . 12 . 286\frac{3}{4}$, d. i. 6256 Pf. getragen, und die Vergleichung mit der obigen Zahl für den Waſſerdruck ergiebt, daß dieſe Feſtigkeit völlig hinlänglich ſey, den Druck einer 400 Fuß hohen Waſſerſäule zu ertragen, wenn der Schlauch nicht über 3 Zoll weit iſt. Muſſchenbroeck erzählt a. a. O. am Ende des 1200 §. 460 S., daß er auch Verſuche über die Feſtigkeit des Holländiſchen, Rußiſchen und Flanderniſchen Segeltuchs angeſtellet habe. Dieſe Verſuche ſind aber daſelbſt nicht beygefügt, ſondern es wird nur verſprochen, ſie künftig vielleicht bekannt zu machen. Ob dieſes geſchehen ſey, iſt mir nicht bekannt und ich kann in Anſehung der Feſtigkeit der ſegeltuchenen Schläuche nichts zuverläßiges beyfügen. Es hat aber übrigens noch ſonſt ſeine Schwierigkeiten, wenn der zu einer Feuerſprütze gehörige Schlauch ſehr hoch in die Höhe gebracht werden ſoll. Das eigene Gewicht deſſelben iſt ſehr beträchtlich, und obgleich das in demſelben hinaufſteigende Waſſer, ſo lange es ſenkrecht ſteigt, wegen ſeines Gewichts nicht unterwärts drückt, auch nur mit ſeinem reſpectiven Gewicht drücken kann, wenn es nach ſchiefer Richtung ſteigen muß, ſo hat doch der Schlauch das Gewicht des darin ſtehen bleibenden Waſſers zu tragen, wenn die Arbeit bey der Sprütze unterbrochen wird, oder gänzlich aufhört. Wie viele Gewalt der Schlauch wegen dieſer Urſache leidet, erfordert eine eigene Unterſuchung, die ich hier noch nicht füglich anſtellen kann. Mir iſt nicht bekannt, ob man be-

reits

reits die Verſuche gemacht habe, das Waſſer vermittelſt der Schlangen an den Feuerſprützen auf ſo hohe Gebäude hinauf zu bringen, dergleichen die Kirchthürme ſind; dies würde zur ſchleunigen Rettung, wenn etwa ein ſolcher Thurm durch einen Wetterſtrahl angezündet würde, davon man ſo viele Exempel hat, ganz ungemein behülflich ſeyn.

Der XXXII. Abſchnitt.

Von dem einer Feuerſprütze beygeordneten Zubringer.

446 §.

Bey den Veranſtaltungen zur Löſchung einer Feuersbrunſt muß man darauf bedacht ſeyn, die Sprützen beſtändig zulänglich mit Waſſer zu verſorgen: und es hat ſeine erheblichen Unbequemlichkeiten, wenn das Waſſer durch Menſchen in Eimern herbey getragen, oder auch in gröſſern Gefäſſen der Sprütze auf Fuhrwerken zugeführet werden muß. Die Sprütze kann auf eine weit beſſere Art zulänglich und ununterbrochen mit Waſſer verſehen werden, wenn ihr ein ſogenannter Zubringer oder Anbringer beygeordnet iſt. Dieſer Zubringer iſt einer ordentlichen Feuerſprütze ſonſt in den weſentlichen Stücken ganz ähnlich, nur iſt die Sprütze gewöhnlich ein bloſſes Druckwerk, der Zubringer aber ein vereinbartes Saug- und Druckwerk, welches vermittelſt einer Saugröhre das Waſſer ſchöpft,

und

und zugleich das geſchöpfte Waſſer vermittelſt einer gehörig angebrachten Leit-Schlange der dazu gehörigen Sprütze zuführet. Die Saugröhre, welche hier auch die Saugſchlange heiſt, beſteht aus meßingenen Ringen, welche mit ſtarkem Leder überzogen ſind, und eine ganz kleine Entfernung von einander haben, damit das Rohr einige Biegung leiden könne. Das Leder iſt nöthig, damit die Röhre luftdicht ſey, und die Ringe müſſen verhindern, daß die lederne Röhre von der äuſſern Luft nicht zuſammen gedruckt werde, wenn die Luft innerhalb derſelben verdünnet wird. Die Weite der Saugſchlange beträgt gewöhnlich 3 Zoll, und ihre ganze Länge 30 bis 32 Fuß. Es iſt am bequemſten, wenn vier verſchiedene dergleichen Röhren, jede von 8 Fuß Länge, ſo eingerichtet ſind, damit ſie nach Erfordern durch Schrauben an einander gefügt werden können. Eine derſelben wird alsdenn an ihrem untern Ende mit einem Korbe verſehen, der dazu dienet, die im Waſſer etwa befindlichen Unreinigkeiten abzuhalten. er muß aber übrigens das Waſſer frey und ungehindert durchlaſſen.

447 §.

Weil dieſe Zubringer bey Feuers-Gefahr vorzüglich nützliche Maſchinen ſind; ſo will ich ihre bisher üblich geweſene Einrichtung etwas näher beſchreiben. Zu dem Ende iſt auf der achten Kupfertafel eine 77
Zeichnung beygefüget, die das äuſſerliche Anſehen eines ſolchen Zubringers ſo vorſtellet, daß man ſich Fig.
zugleich von der innern Einrichtung einen zulänglichen Begrif machen kann. Die Zeichnung ſtellet erſtlich den hölzernen Kaſten A vor, in welchem ein kupfer-

kupferner Kumm befindlich iſt. Hinterwärts ſind zweene Saugſtiefel BB angebracht, die unten durch Kropfröhren vereiniget und ſo eingerichtet ſind, daß ſie vermittelſt der Saugſchlange, die unten feſt geſchroben wird, wechſelsweiſe das Waſſer herauf ſaugen. Dieſe Saugſtiefel ergieſſen das Waſſer in den kupfernen Kumm, und in demſelben ſtehet ein beſondrer Druckſtiefel D, der das geſchöpfte Waſſer durch die an der vordern Seite des hölzernen Kaſtens feſtgeſchrobenen Schlangen bis zur Sprütze fortpreſt. E iſt ein beſondrer Kaſten, worin eine auf 550 und mehrere Fuß lange Schlange ſo aufgeſchoren liegt, daß ſobald der Kaſten fortgebracht wird, die Schlange ſich ſelbſten ohne Ecken und Buchten in Ordnung niederlegt, wovon alsdenn das eine Ende an der Sprütze befeſtiget wird. FFFF ſind die Saugſchlangen, jede von 8 Fuß, welche nach der erforderlichen Länge hinten am Saugwerk befeſtiget werden, G iſt der Korb, und H ein damit verbundener Kork, der auf dem Waſſer ſchwimmend die Stelle bezeichnet, wo der Korb bleibt, ob ſich derſelbe auch in Kraut, oder andrer Unreinigkeit verwickelt. I ſind die Fangſeile, womit die Saugſchlangen zum Waſſer gelaſſen, und wieder in die Höhe geholet werden. KKK ſind die Druckbalken zum Aufholen und Wegſchaffen, LL ſind die hölzernen Querſtangen, welche durch die Gabeln an den äuſſern Enden der Druckbalken zum bearbeiten geſteckt werden. M iſt der Geräthſchafts-Sack, in welchem ſich lederne und ſeegeltuchene Bind-Lappen, eiſerne Splinten, wohlgeſchnittene hölzerne Keile, lederne Vorlagen, groſſe und kleine meßingene Kuppelringe, auch Hammer und Zange befinden, und

N iſt eine Laterne mit gehörigem Licht verſehen, um ſie des Nachts, oder in dunkeln Wegen, zu gebrauchen.

448 §.

Ich habe dieſe Beſchreibung und Zeichnung aus der ſchon verſchiedenemahl angeführten Sammlung der bey der Stadt Hamburg eingeführten Feuer-Veranſtaltungen und Ordnungen genommen. Jeder der Hamburgiſchen Stadtſprützen, deren zuſammen 25 ſind, iſt ein ſolcher Zubringer von eben der Einrichtung beygeordnet: und wie bey jeder Sprütze acht Mann zum bearbeiten beſtellt ſind, ſo ſind auch acht Mann bey jedem dazu gehörigen Zubringer beſtellt, wovon vier an dem Saugwerk, und die übrigen vier an dem Druckwerk arbeiten. Wer mit der oben vorgetragenen Theorie von den vereinbarten Saug- und Druckwerken bekannt iſt, dem wird leicht beyfallen, daß hier der beſondre Druckſtiefel wegbleiben könnte, und daß die beyden Saugkolben das Waſſer zugleich durch die Leit-Schlange durchdrücken, und der Sprütze zuführen könnten. So hat, nach einer vom Herrn Prof. Büſch in Hamburg mir mitgetheilten Nachricht, der Mechanicus Neubert ſeine Feuerſprützen eingerichtet, damit ſie auch als Zubringer gebraucht werden können: auch hat der Mechanicus Vogt in Hamburg ſchon ehedem ein Modell auf eben die Art verfertiget. Wenn der Anbringer in der Nähe eines Brunnens, oder vorbeyflieſſenden Waſſers, als Sprütze gebraucht wird, ſo kann die Saugſchlange ins Waſſer gelaſſen werden, und die Maſchine leiſtet alsdenn die Dienſte einer Sprütze und ihres Anbringers zugleich. Der Hof-Kunſtdrechsler in Hannover,

nover, Hr. Dänzer, hat ſchon ſeit mehrern Jahren dergleichen Sprützen ververtiget, wie Hr. Kampe in ſeinen oben angeführten Aufſatz erzählt. Des Hrn. Kampen Erinnerung hiebey: daß dergleichen zuſammengeſetzte Maſchinen leichter, als andre, Schaden nehmen können, und daß deswegen die gewöhnlichen Sprützen zum allgemeinen Nothgebrauch der Regel nach die beſten ſind, beſonders in ſolchen Städten, wo man nicht gleich geſchickte Leute hat, welche die denſelben etwa zugeſtoſſenen Fehler verbeſſern können, verdienet allen Beyfall.

449 §.

Es iſt ganz und gar unnöthig, daß das Waſſer durch die Oefnung der Leit-Schlange mit groſſer Geſchwindigkeit in den zur Sprütze gehörigen Kumm hinein ſtürze. Deswegen iſt es auch nicht nöthig, daß dieſe Oefnung enger, als die Schlange ſelbſt ſey. Die Abſicht iſt nur, der Sprütze ununterbrochen ſo viel Waſſer zuzuführen, als ſie während der Bearbeitung ſelbſt ausgiebet. Demnach kann hieſelbſt die im XXIII. XXIV und XXV Abſchnitt vorgetragene Theorie von den vereinbarten Saug- und Druckwerken ihre Anwendung finden. Wenn hier nunmehro die Zahl n das Verhältniß der Querſchnitte der Stiefel zu den Querſchnitten der Schlange ausdrückt, ſo iſt nach der bisher gebrauchten Bezeichnung das Integral Haa ſehr groß, weil die Länge der Leit-Schlange wohl 500 und mehr Fuß beträgt. Dagegen iſt die Zahl n nur klein. Um indeſſen die erwähnte Theorie hier richtig anzuwenden, muß man noch folgendes erwägen. Bey dem obigen Vortrag der Theorie der Druckwerke, und be-

ſonders

ſonders beym Gebrauch der Formuln des 360 §. ward vorausgeſetzt, daß f die Höhe des obern Ausguſſes über die unterſte Stelle der Steigröhre, oder dem Boden der Stiefel, ebenfalls beträchtlich groß ſey. Davon wird hier beym Gebrauch der Zubringer gewöhnlich das Gegentheil ſtatt haben, es müſten denn die Gaſſen der Stadt, wo man dieſe Maſchine gebrauchen will, ſehr viel höher als die Stellen liegen, wo die Zubringer das Waſſer ſchöpfen. Deswegen würde hier der Gebrauch der Zahl λ des 360 §. nicht ſo bequem ſeyn. Wenn die Stellen, wo der Zubringer das Waſſer ſchöpft, und wo die Sprütze ſteht, in einer Horizontalfläche lägen, ſo wäre $f = 0$, und dies würde $\lambda = 1 + \frac{4aabl}{fgcctt}$ unendlich groß geben. Man behält demnach hier mit mehr Nutzen aus dem 352 §. die Gleichung $p = f + \frac{4aabl}{gcctt}$, und ſetzt nun den Ausdruck $\frac{4aabl}{gcctt} = E$; ſo hat man $p = f + E$. Es iſt ferner hier nicht ſo bequem, die Grenze der Waſſermenge von der würklichen Waſſermenge zu unterſcheiden, und jene $= \frac{(F - \varphi)\,\alpha T}{f}$ zu ſetzen, weil dieſer Ausdruck auch unendlich groß würde, wenn $f = 0$ iſt. Man ſetze demnach die würkliche Waſſermenge $\frac{(F - \varphi)\,\alpha T}{p} = M$, und bemerke, daß dieſe deſto gröſſer ſeyn wird, je kleiner p nach Beſchaffenheit der übrigen Anordnung werden kann, da dann

$\eta . m$ ſtatt $F - \varphi$ geſchrieben werden kann, wenn η und m die Bedeutung der letztern Abſchnitte behalten. Wenn man alsdann ſtatt p den Werth $f + E$ ſetzt, ſo wird $M = \frac{\eta m \alpha T}{f + E}$. Weil übrigens auch $M = \frac{\frac{1}{2}\pi a a b T}{t}$ iſt, wenn t die Zeit eines Kolbenſpiels bedeutet, ſo hat man $a a = \frac{M t}{\frac{1}{2}\pi b T}$.

450 §.

Eine vortheilhafte Einrichtung des einer Sprütze beygeordneten Zubringers anzugeben, wenn die Saugſtiefel zugleich als Druckſtiefel dienen, und einerley Kolben das Waſſer zugleich anſaugen, und durch die Leitſchlange wegſchaffen ſollen.

I. Aufl. Es ſey e die Höhe, auf welche der Zubringer das Waſſer durchs Saugen hebt, und man laſſe $k = ve$ und p die Bedeutungen des 364 §. behalten, ſo iſt die Waſſermenge, welche der Zubringer in der Zeit T ausgiebt, $M = \frac{F \alpha T}{k + p}$, da dann $F = \eta . m$ iſt, wenn, wie gewöhnlich, der Zubringer durch Menſchen bearbeitet wird. Man ſetze, wie im 365 §, $F = V + W$, und die Waſſermenge, die das Saugwerk hebt, ſey N, diejenige, welche das Druckwerk hebt, $= M$; ſo iſt $N = \frac{V \alpha T}{k}$, und $M = \frac{W \alpha T}{p}$. Weil nun beyde Waſſermengen

gleich

gleich ſeyn müſſen, ſo wird $\frac{V}{k} = \frac{W}{p}$, d. i. $\frac{F-W}{k} = \frac{W}{p}$, und man erhält $W = \frac{Fp}{k+p}$, $V = F - W = \frac{Fk}{k+p}$. Das giebt ferner $N = \frac{F\alpha T}{k+p} = M$. Die Waſſermenge, welche der Zubringer ausgiebt, muß derjenigen gleich ſeyn, welche die dazu gehörige Sprütze ausgiebt, alſo iſt $M = N$ als gegeben zu betrachten. Ferner hat man $p = f + E$ und $E = \frac{4aabl}{gcctt}$ (449 §.). Je kleiner dies p iſt, deſto mehr Waſſer giebt der Zubringer bey einerley Kraft F, und deſto kleiner kann die Kraft F bey einer gegebenen Waſſermenge ſeyn. Man müſte alſo vorzüglich die Anordnung ſo zu machen ſuchen, daß der Ausdruck $E = \frac{4aabl}{gcctt}$ ſo klein werde, als die Umſtände zulaſſen. Man nehme demnach t ſo groß, und b ſo klein, als die übrigen Umſtände verſtatten; ſo iſt der Durchmeſſer der Stiefel $a = \sqrt{\frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi bT}} = \delta$ beſtimmt, und wenn hiernächſt c willkührlich angenommen wird, ſo hat man $E = \frac{4aabl}{gcctt}$, alſo auch $p = f + E$. Die Gleichung $M = \frac{F\alpha T}{k+p}$ giebt $F = \frac{M(k+p)}{\alpha T}$

$= \eta . m$, und beſtimmt die erforderliche Mannſchaft, ſobald k bekannt iſt. Um dieſe Gröſſe k ſo vortheilhaft als möglich zu beſtimmen, nehme man den Durchmeſſer der Saugröhre ε ſo an, daß $\psi = \frac{\varepsilon t \sqrt{g}}{\delta \sqrt{2l}}$ dem Werth $= \pi$ ſo nahe kommt, als ſich thun läſt; ſo hat man $\omega = \frac{e \sin v \psi}{b}$, und $\nu = \frac{\omega + 1}{\omega}$, alſo auch $k = \nu e$.

II. Aufl. Wenn man die Anordnung, dieſen Vorſchriften gemäß, machen will, ſo iſt man beym Gebrauch des gewöhnlichen Druckbalkens in aller Abſicht eingeſchränkt. Die Länge l iſt gegeben, und der Durchmeſſer c des Schlauchs darf nicht zu groß ſeyn, damit der Schlauch nicht zu ſchwer werde, wenn er voll Waſſer iſt, welches beym gewöhnlichen Gebrauch in demſelben beynahe horizontal fortläuft alſo mit ſeinem ganzen Gewicht den Schlauch beläſtiget. Die Zeit t eines Kolbenſpiels kann auch nicht wohl über 3 Secunden betragen: alſo bleibt nur das einzige b übrig, welches doch ebenfalls nicht viel unter einen halben Fuß genommen werden kann, wenn der Druckbalken nicht ſo lang ausfallen ſoll, daß es bey engen Plätzen an Raum gebricht. Weil nun durch eine kleine Oefnung mit gröſſerer Geſchwindigkeit in eben der Zeit ſo viel Waſſer laufen kann, als durch eine groſſe Oefnung mit geringerer Geſchwindigkeit; ſo läſt ſich auch die Theorie des 441 §. bey Anordnung des Druckwerks für den Zubringer anwenden. Das, was dort k hieß, will

ich hier, Verwirrung der Buchſtaben zu vermeiden, p nennen, ſo wird $A = \zeta^2 (p - f)$. Weil nun M gegeben iſt, ſo nehme man h willkührlich an: dies beſtimmt $2\sqrt{gA} = n\beta = \frac{M}{\frac{1}{4}\pi hhT}$, und $A = \frac{n^2\beta^2}{4g}$. Dies giebt ferner $B = \frac{2ccw\sqrt{gA}}{\alpha hhl}$, wo man c willkührlich annimmt, und $\zeta = \frac{B}{B + 2\lambda}$, woraus alsdenn $p = f + \frac{A}{\zeta^2}$, und $n = \frac{\mu Bhhl}{ccw}$ gefunden wird; oder $\mu = \frac{nccw}{Bhhl}$, nachdem man n oder μ willkührlich annehmen will. Die Anzahl der Arbeiter wird alsdenn $m = \frac{M(k + p)}{\eta\alpha T}$, wo man noch k für das Saugwerk ſuchen muß, wenn die Kolben zugleich drucken und ſaugen ſollen: und dies k wird eben ſo, wie vorhin, zu Ende der erſten Auflöſung gefunden.

451 §.

Ich will von beyden Auflöſungen die Anwendung auf ein Beyſpiel machen, damit man durch die Gegeneinanderhaltung beyder Anordnungen beurtheilen könne, welches die vortheilhafteſte ſeyn würde. Wenn eine Feuerſprütze einigermaſſen gute Dienſte thun ſoll, ſo muß ſie 8 Cubicfuß Waſſer in einer Minute geben: demnach iſt auch dies die Waſſermenge für den dazu gehörigen Zubringer. Wollte man nun die Anordnung nach der I. Aufl. des vor. §. ma-

chen, und doch den Druckbalken beybehalten; ſo könnte man für t nicht wohl mehr als 3 Secunden, und für b nicht weniger als $\frac{1}{2}$ Fuß annehmen. Dies würde $aa = \frac{8 \cdot 3}{\frac{22}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot 60} = \frac{28}{55} = 0{,}509091$, und $a = \delta = 0{,}713$ Fuß $= 8$ Zoll $6\frac{7}{10}$ Lin. geben. Ob man nun gleich den Schlauch nicht gern weiter als von 3 Zoll im Durchmeſſer annimt; ſo will ich doch 4 Zoll annehmen, um, ſo viel möglich, E zu vermindern. Wenn alsdenn $l = 500$ Fuß iſt, ſo wird $E = \frac{4 \cdot \frac{28}{55} \cdot \frac{1}{2} \cdot 500}{16 \cdot \frac{1}{9} \cdot 9} = \frac{14 \cdot 125}{55} = \frac{14 \cdot 25}{11} = 32$ Fuß. (Die Vorausſetzung $c = 3$ Zoll würde $E = \frac{16}{9} \cdot 32 = 57$ Fuß geben.) Geſetzt nun, es iſt nur $f = 10$ Fuß, ſo wird $p = 42$ Fuß. Ferner wird $\psi = \frac{\varepsilon t \sqrt{g}}{\delta \sqrt{2l}}$, und hier bedeutet l die Länge der Saugröhre von ohngefehr 32 Fuß; alſo erhält man $\psi = \frac{3 \cdot 4}{0{,}713 \cdot 8} \varepsilon = \frac{3000}{1426} \cdot \varepsilon = 2{,}1 \cdot \varepsilon$. Es ſey $\varepsilon = 4$ Zoll $= \frac{1}{3}$ Fuß, (weiter wird man die Saugröhre nicht gerne machen,) ſo hat man $\psi = 0{,}7$, und dieſer Bogen faſſet $\frac{7}{22} \cdot 0{,}7 \cdot 180^\circ$, d. i. $40^\circ 5'$. Dies giebt $\mathit{ſinv}\,\psi = 0{,}2349$ und $\omega = \frac{\mathit{ſinv} \cdot \psi}{b} \cdot e = 0{,}4698 \cdot e$. Nehme ich nun für e eine mittelmäßige Höhe von 16 Fuß an, ſo

wird

wird $\omega = 7\frac{1}{2}$, $\nu = \dfrac{8\frac{1}{2}}{7\frac{1}{2}} = \frac{17}{15}$, und $k = \frac{17}{15} e = 18$. Demnach wird ferner $m = \dfrac{M(k+p)}{\eta\alpha T} = \dfrac{8 \cdot 60}{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60} = \frac{16}{3}$; alſo werden zur Bearbeitung 5 bis 6 Mann erfordert. Wenn die Leitſchlange horizontal fortgienge, ſo wäre $f = 0$, und $m = \frac{5}{6} \cdot \dfrac{16}{3} = \dfrac{40}{9}$, alſo würden 4 tüchtige Leute an jeder Querſtange allenfalls genügen. Weil $b = \dfrac{\beta}{\alpha} w = \frac{1}{2}$ Fuß angenommen iſt, und w auf $3\frac{1}{2}$ Fuß geſchätzt werden kann, ſo wird $\dfrac{\alpha}{\beta} = \mu = \dfrac{3\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 7$. Hätte ich b nur $= \frac{1}{3}$ Fuß angenommen, ſo wäre E $= \frac{2}{3} \cdot 32 = 21$ Fuß gefunden, ſo daß bey der Höhe $f = 10$ Fuß ſchon 4 Leute allenfalls genügen würden; es müſte aber $\mu = 10\frac{1}{2}$ ſeyn.

Die Urſache, weswegen E noch ſo beträchtlich groß ausfällt, iſt hauptſächlich dieſe, weil t nur von 3 Secunden angenommen werden konnte. Ich dächte, man könnte ohne groſſe Schwierigkeit eine Kurbel anbringen, deren Axe ein Getriebe hätte, das in ein Sternrad griffe. Die Axe dieſes Stern-Rades müſte in eine doppelte Kurbel gebogen ſeyn, um die Kolbenſtangen daran zu hängen. Alsdenn könnte man t weit gröſſer annehmen. Wenn nun die Kurbel, welche die Leute angreifen müſten, ein Fuß Bug hätte, ſo würde ſie ohngefehr in 2 Se-

cunden einmahl umlaufen, und wenn das Sternrad 6mahl mehr Zähne, als das Getriebe Stecken hätte, ſo würde $t = 12$ Secunden werden. Dies würde $E = \frac{9}{144} \cdot 32 = \frac{1}{16} \cdot 32 = 2$ Fuß geben, und wenn auch $c = 3$ Zoll wäre, ſo würde doch nur $E = \frac{57}{16} = 3\frac{1}{2}$ Fuß werden, und $p + k = 20$ bis 22 Fuß. Man würde demnach nur den dritten Theil ſo viel Leute brauchen, und bey den angenommenen Vorausſetzungen würden ihrer vier völlig genügen.

452 §.

Die zweyte Auflöſung des 450 §. würde ſich nun auf folgende Art anwenden laſſen. Man nehme $M = 8$ Cubikfuß, und $h = 1$ Zoll $= \frac{1}{12}$ Fuß an, ſo wird $2\sqrt{gA} = n\beta = \frac{8}{\frac{11}{14} \cdot \frac{1}{144} \cdot 60} = \frac{2 \cdot 14 \cdot 144}{11 \cdot 15} = 24{,}5$, und $A = \frac{24{,}5^2}{4 \cdot 16} = 9{,}38$ Fuß. Man ſuche ferner $B = \frac{24{,}5 \cdot cc \cdot w}{3 \cdot \frac{1}{144} \cdot 500}$, und nehme $c = 4$ Zoll $= \frac{1}{3}$ Fuß, $W = 3\frac{1}{2}$ F., ſo wird $B = \frac{24{,}5 \cdot \frac{1}{9} \cdot 3{,}5}{3 \cdot \frac{1}{144} \cdot 500} = \frac{4{,}9 \cdot 16 \cdot 0{,}7}{3 \cdot 50} = \frac{4{,}9 \cdot 8 \cdot 0{,}7}{3 \cdot 25}$ beynahe $= 0{,}4$. Es iſt aber

Brigg.

Brigg. Log. $e = 0,4342944$
dieſer multipl. mit $0,4$

giebt Log. $e^{B} = 0,17371776$

alſo $e^{B} = 1,4918$, und $e^{-B} = \frac{10000}{14918}$ beynahe $=$ $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, alſo $1 - e^{-B} = \frac{1}{3} = 0,333333$, und $\surd(1 - e^{-B}) = 0,577$. Dies giebt $\lambda =$ log. nat. $1,577 = 0,1978317 \times 2,302585 = 0,4555$, und $\zeta = \frac{0,4}{0,4 + 0,4555} = 0,467$, ferner $\frac{A}{\zeta^2} =$ $\frac{9,38}{0,467^2} = \frac{9380}{218} = 43$, alſo $p = 53$ Fuß, wenn $f = 10$ iſt. Man nehme ferner $a = 6$ Zoll an, ſo wird $n = 36$, und $\mu = \frac{36 \cdot \frac{1}{9} \cdot 3\frac{1}{2} \cdot}{0,4 \cdot \frac{1}{144} \cdot 500} =$ $\frac{4 \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 144}{0,4 \cdot 500} = \frac{3\frac{1}{2} \cdot 144}{50} = 10$. Weil dies aber einen etwas langen Druckbalken giebt, ſo kann man auch $a = 5$ Zoll annehmen, damit $n = 25$ werde. (Dieſe Vorausſetzung giebt $n^2 = 625$, und dieſe Zahl iſt noch immer ſo groß, daß die Näherung des 402 §. ihre Anwendung findet.) Man hat alsdenn $\mu = \frac{25}{36} \cdot 10 = 7$, und wenn man dieſe Vorausſetzung beybehält, ſo findet man ferner $\psi =$ $\frac{t\surd g}{\delta\surd 2l} \cdot \varepsilon$, wenn man bemerkt, daß hier $t =$

$\frac{2w}{\alpha} = 2\frac{1}{3}$, $\delta = a = \frac{5}{12}$ Fuß, $l = 32$ ſey. Dies giebt $\psi = \frac{2\frac{1}{3}\cdot 4}{\frac{5}{12}\cdot 8}\varepsilon = \frac{1.28}{2.5}.\varepsilon = \frac{14}{5}.\varepsilon =$ $\frac{14}{15}$, wenn $\varepsilon = \frac{1}{3}$ Fuß angenommen wird, und dieſer Bogen faſſet $\frac{14.180.7}{15.22} = 53°27'$. Der zugehörige Querſinus iſt 0,4044759 $= ſv\psi$, alſo wird $\omega = \frac{ſinv\psi}{b}.e$, wo man $b = \frac{w}{\mu} = \frac{3\frac{1}{2}}{7} = \frac{1}{2}$ ſetzen muß. Die Vorausſetzung $e = 16$ giebt alsdenn $\omega = 13$, $v = \frac{14}{13}$, und $k = \frac{14}{13}\,e = 14$. Endlich findet man $m = \frac{M(k+p)}{\eta\alpha T} = \frac{8.67}{\frac{1}{2}.3.60} =$

6. Die Vergleichung mit dem Reſultat des 451 §. ergiebt, daß dieſe Anordnung nicht völlig ſo vortheilhaft wäre, als die dortige: doch iſt der Unterſchied ſo ſehr groß nicht. In aller Abſicht würde indeſſen die am Ende des 451 §. erwehnte Anordnung den Vorzug behalten.

453 §.

Ich habe am Ende des 448 §. ſchon angeführt, daß die neuen Neubertſchen Sprützen ihrer Anordnung nach zugleich als Zubringer dienen können. Eine derſelben ſoll als Zubringer ein Gefäß von 25 Cubikfuß mit 100 Schlägen in 1 Min. 6 Sec. gefüllet haben. Dann wäre in einer Minute die Waſſermenge 23 Cubikfuß geweſen. Das ſcheint ein ungemein groſſer Effect zu ſeyn: allein es ſcheint auch

auch nur ſo, weil man wohl ſicher vermuthen kann, daß die Leitſchlange nicht allein horizontal werde fortgeführt ſeyn, ſondern auch eben dieſe Leitſchlange nicht über 50 bis 60 Fuß lang geweſen ſey. Auch hat die Höhe, auf welche das Waſſer durchs Saugen gehoben werden muſte, vermuthlich nicht über 10 bis 12 Fuß betragen, und bey ſo bewandten Umſtänden konnten 8 Mann dieſen Effect wohl zuwege bringen. Die preiswürdige Hamburgiſche Geſellſchaft zur Beförderung der Künſte und nützlichen Gewerbe, hat verſprochen, zu ſeiner Zeit die Zeichnungen von der ganzen Anordnung der Neubertſchen Sprütze, welche den Preis erhalten hat, bekannt zu machen. Hoffentlich wird dieſe Bekanntmachung noch mit nähern Nachrichten von allen Umſtänden begleitet werden, die dasjenige aufklären, was bey der vorläufigen oben angeführten Erzählung der damit angeſtellten Verſuche noch dunkel und zweifelhaft bleibt.

454 §.

Die Hamburgiſchen Zubringer, wovon ich im 447 §. die Beſchreibung mitgetheilt habe, gehören eigentlich nicht in die Claſſe der vereinbarten Saug- und Druckwerke, wenn dieſer Ausdruck in der Bedeutung des 343 §. genommen wird. Das Saugwerk iſt bey denſelben von dem Druckwerk ganz abgeſondert, und jedes thut ſeine Dienſte für ſich: deswegen laſſen ſich die Formuln des 450 §. darauf nicht ſchlechthin anwenden. Wenn man indeſſen die Waſſermenge, welche der Zubringer der beygeordneten Sprütze zuführen ſoll, als gegeben anſiehet, ſo läſt ſich die Rechnung für das Saugwerk

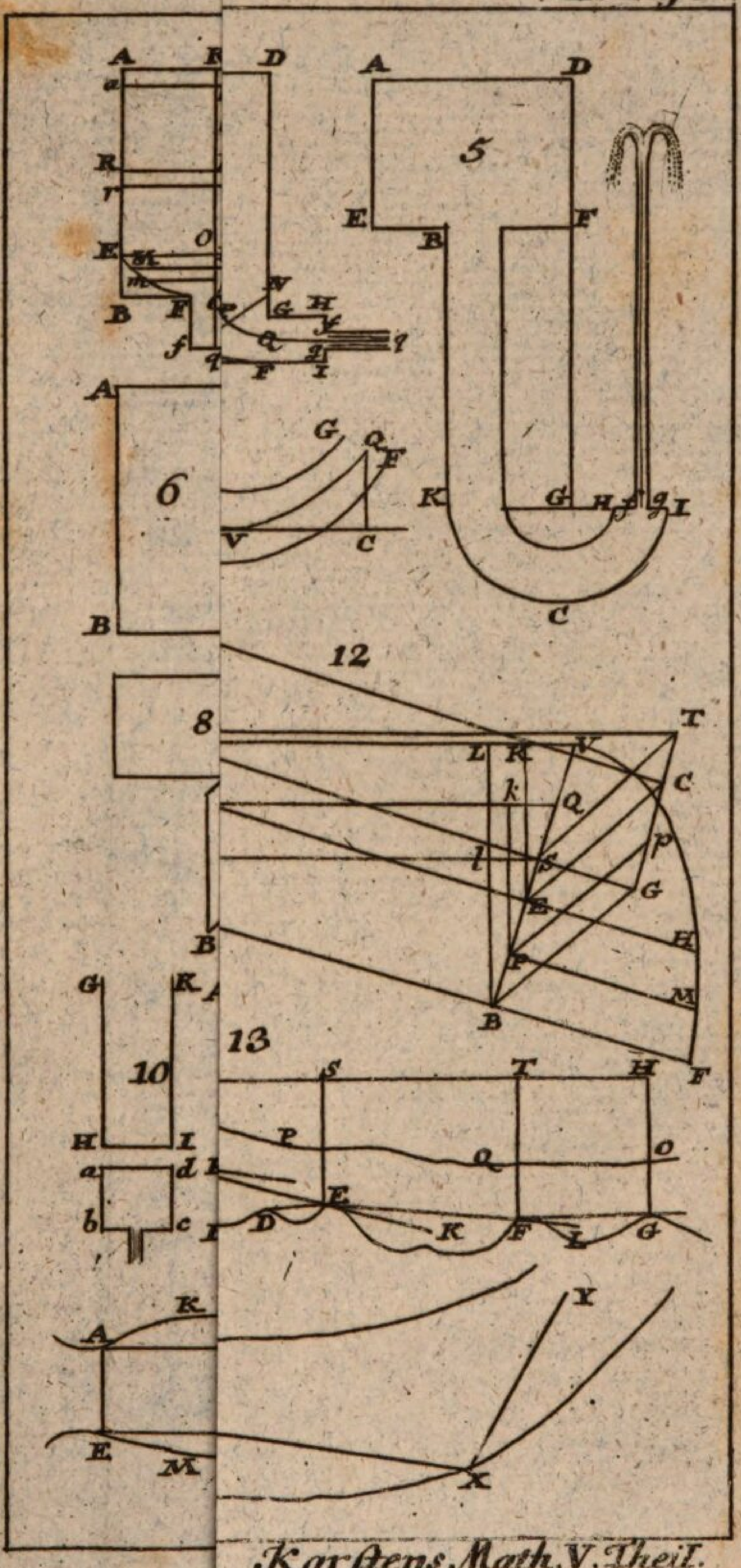
nach

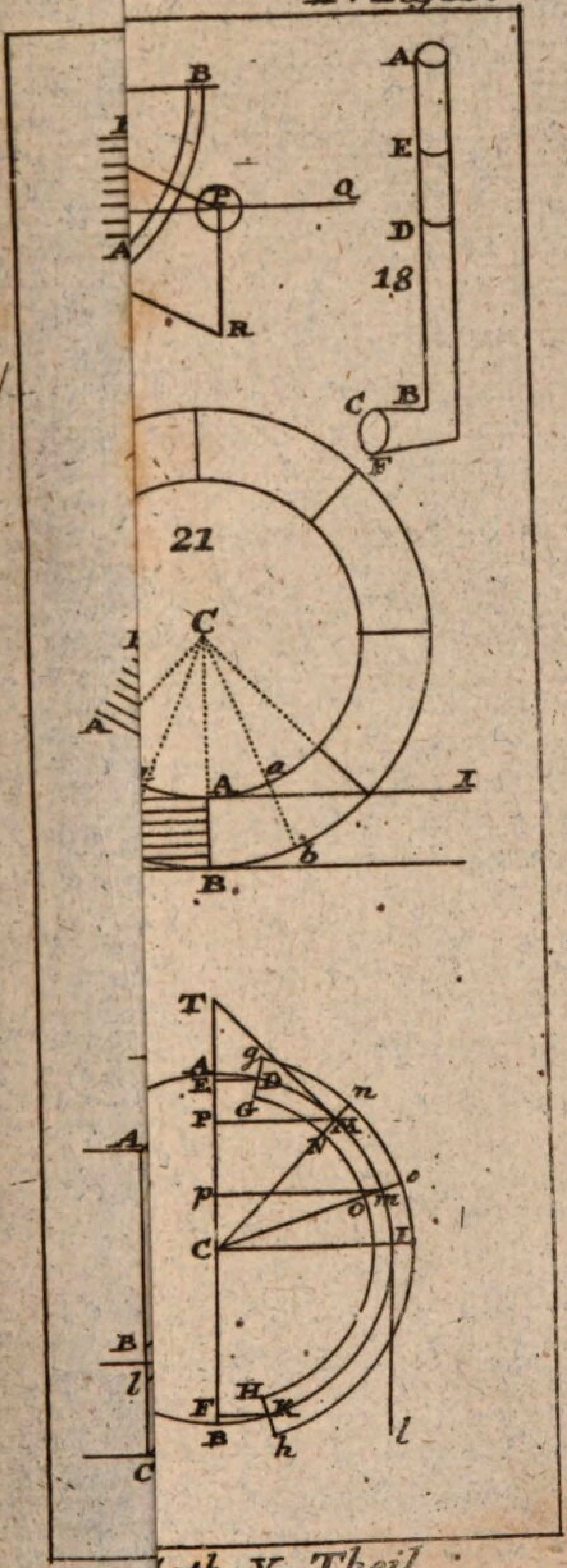
nach dem 322 §., und für das Druckwerk entweder nach dem 360 §. in Rückſicht auf die Erinnerungen des 449 §., oder nach dem 441 §. beſonders anſtellen. Die Rechnung des 450 §. ſetzt voraus, daß eben derſelbe Kolben das Waſſer in den Stiefel hinauf ſauge, und es gleich darauf aus demſelben durch die Leitſchlange wieder hinaus drücke; daß alſo die Zeit eines Kolbenzuges ſowohl, als auch die Höhe deſſelben für beide einerley ſey. Wenn man dieſe Einſchränkungen wegläſt, ſo laſſen ſich die Formuln des 450 §., ſo weit ſie für das Druckwerk gehören, auch brauchen, wenn man die Anordnung des Druckwerks bey einem nach Art der Hamburgiſchen eingerichteten Zubringer ſuchen ſoll. Ein Theil der Arbeiter iſt für das Druckwerk, der übrige Theil für das Saugwerk beſtimmt: wenn alſo k und p die Bedeutung des 450 §. behalten, ſo iſt für das Druckwerk die Waſſermenge $M = \frac{F\alpha T}{p}$, für das Saugwerk $N = \frac{F\alpha T}{k}$. Uebrigens bleibt die Bedingung ſtehen, daß $M = N$ ſeyn muß: das Saugwerk muß dem Kumm ſo viel Waſſer zuführen, als das Druckwerk durch die Leitſchlange wegſchaft. Iſt nur ein Druckſtiefel vorhanden, wie bey den Hamburgiſchen Zubringern; ſo muß man, was die eigentliche Waſſermenge betrift, die Erinnerungen des 418 §. zu Hülfe nehmen.

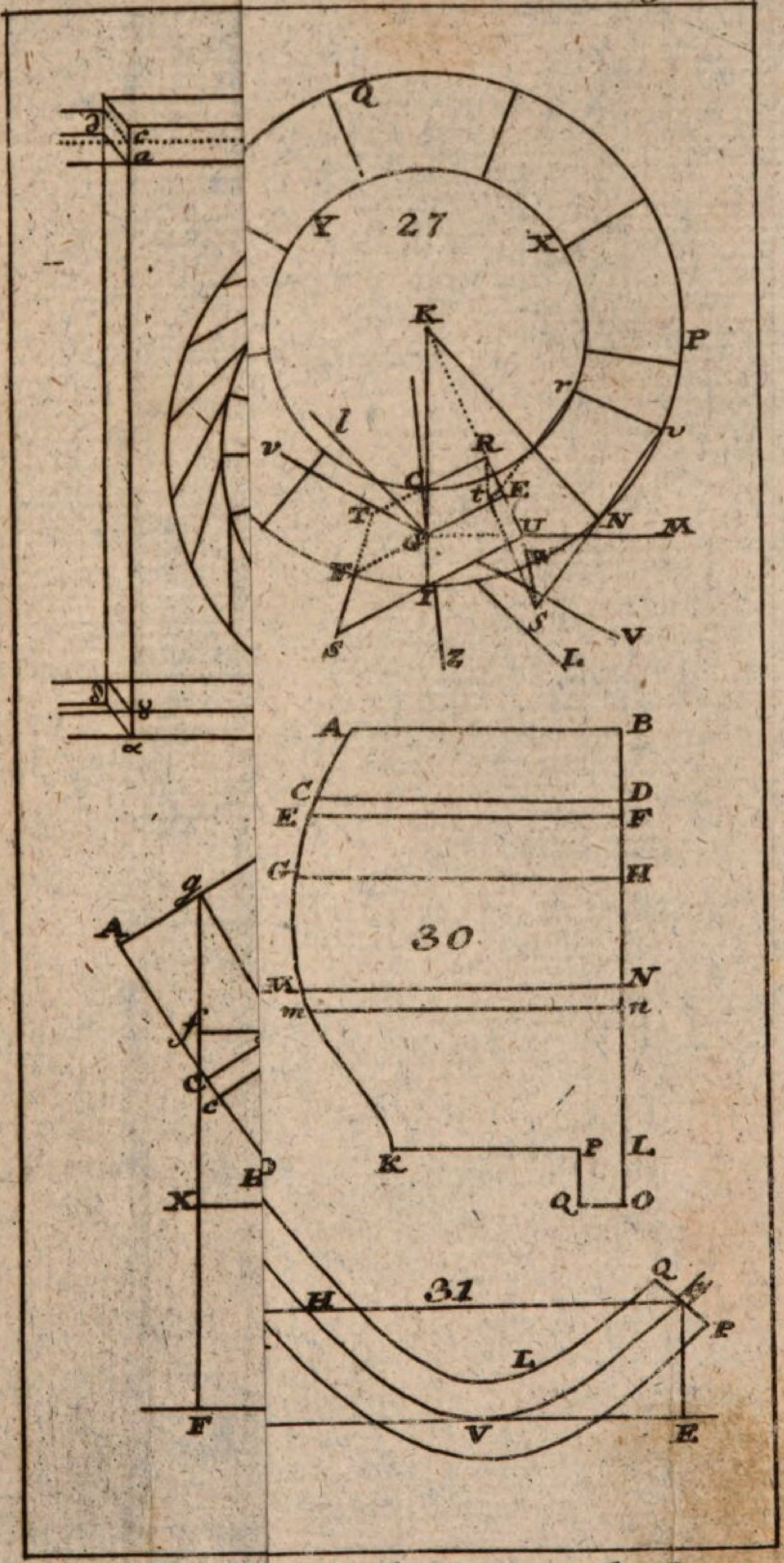
Weil dem Saugwerk leichter als dem Druckwerk Mängel zuſtoſſen können; ſo hat man vermuthlich um deswillen das Saugwerk von dem Druckwerk abgeſondert, damit letzteres noch ſeine Dienſte thun

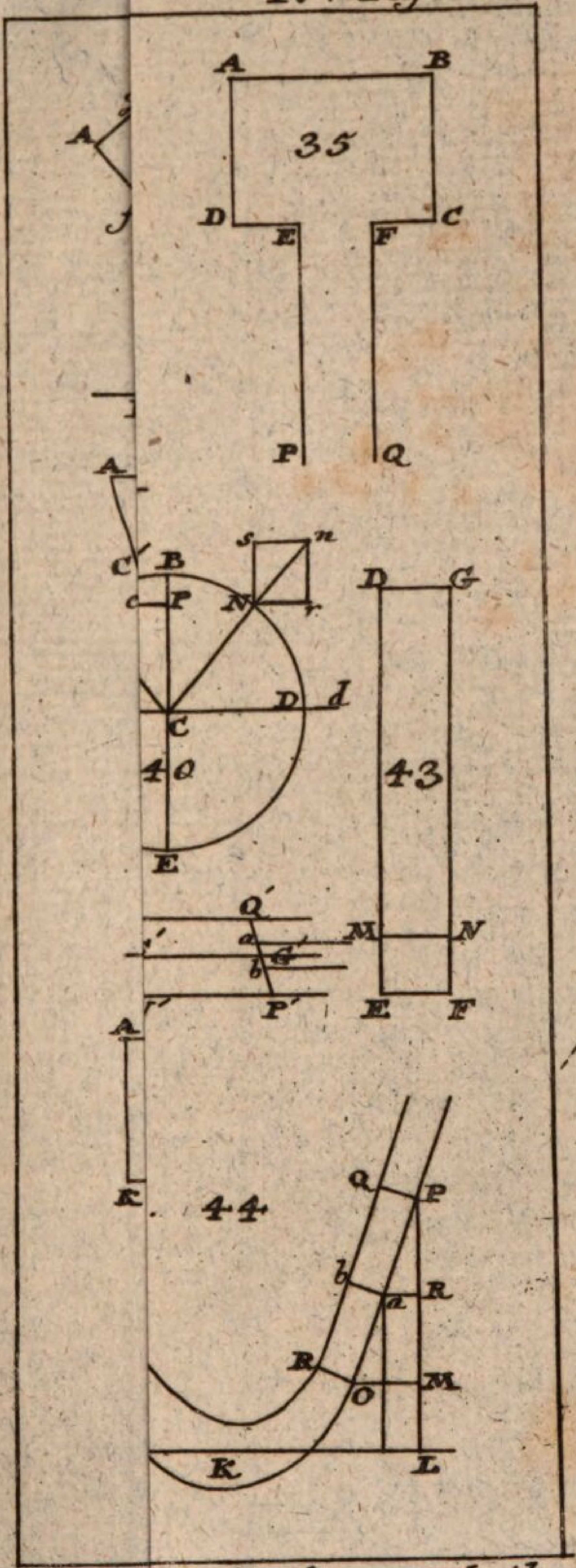
könne,

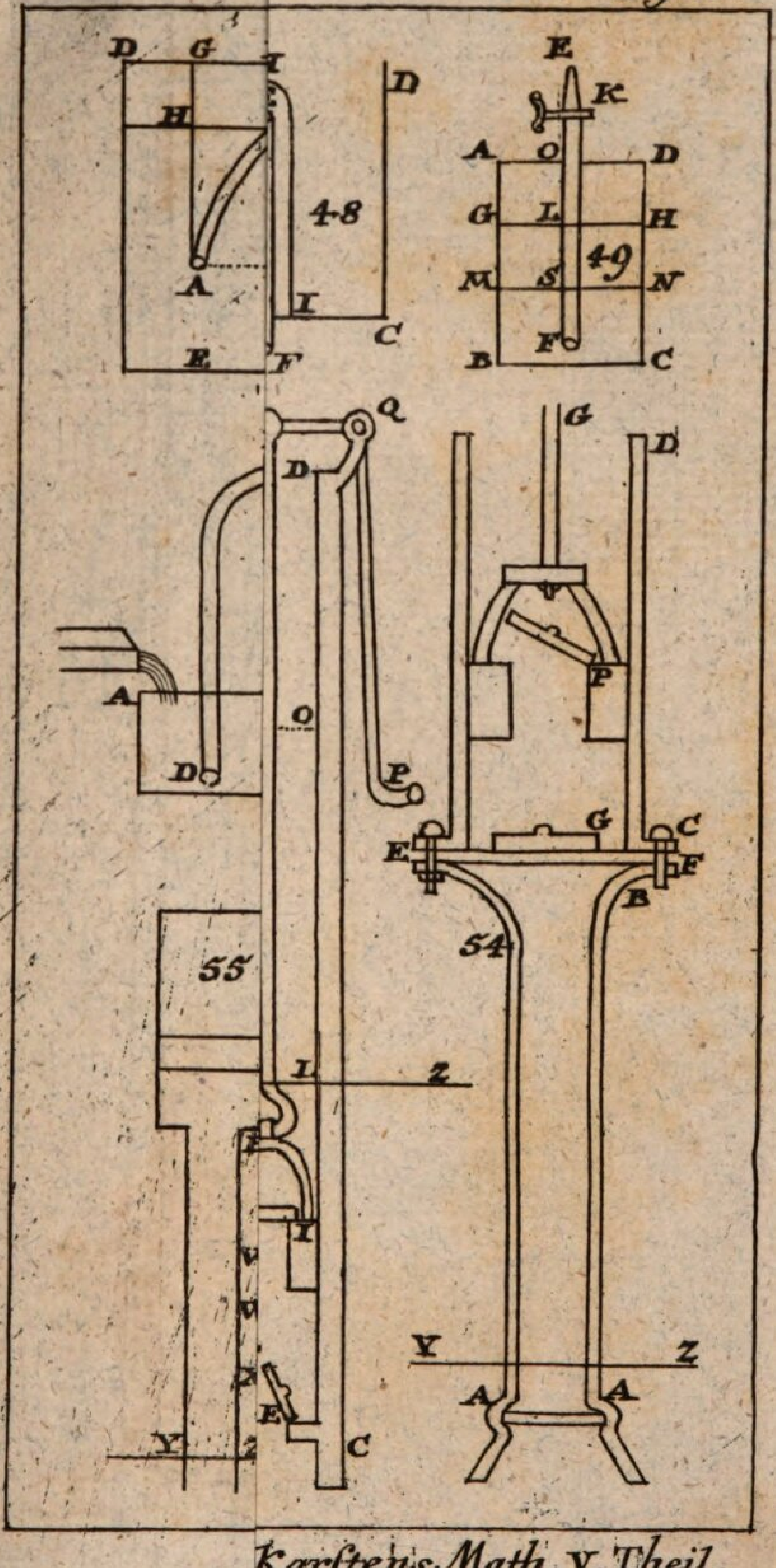
könne, wenn etwa das erſte während des Gebrauchs wandelbar werden ſollte. Man kann in ſolchem Fall den Kumm durch unmittelbares Schöpfen des Waſſers mit Eimern füllen, und das Druckwerk kann alsdenn der Sprütze das Waſſer auch ohne Hülfe des Saugwerks zuführen.

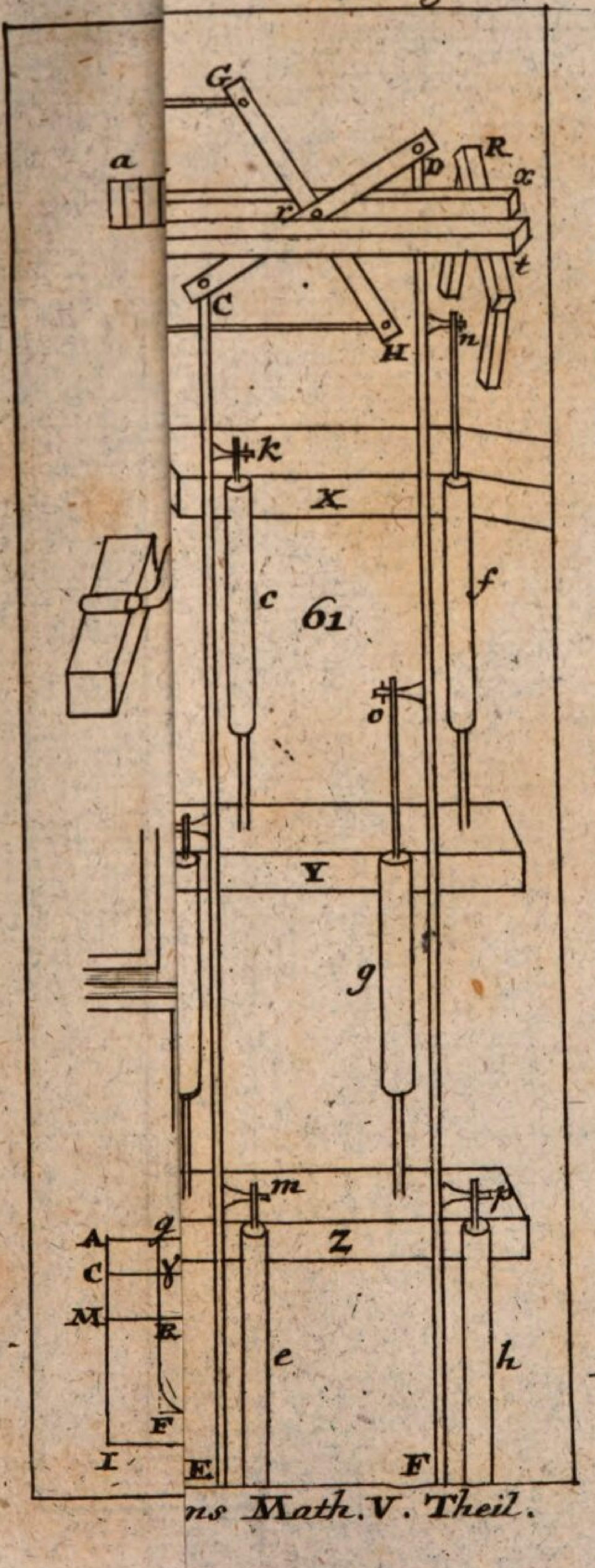

5
6
8
10
12
13

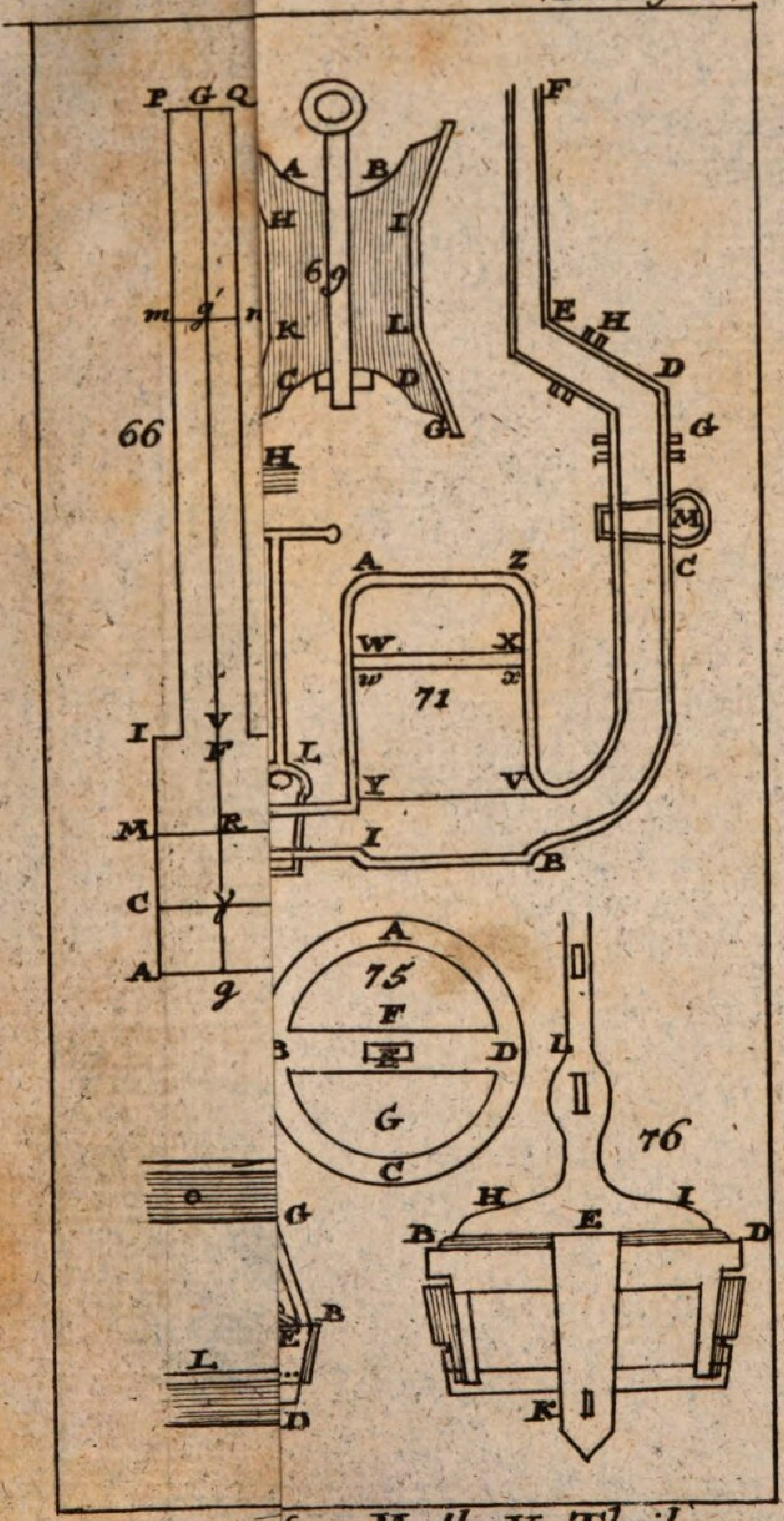

B
A
P
a
R
A
E
D
18
C
B
F
21
C
A
a
A
I
b
B.
T
A
g
E
D
n
P
G
M
N
o
p
m
O
C
L
B
l
H
F
K
B
h
l
C


27
30
31

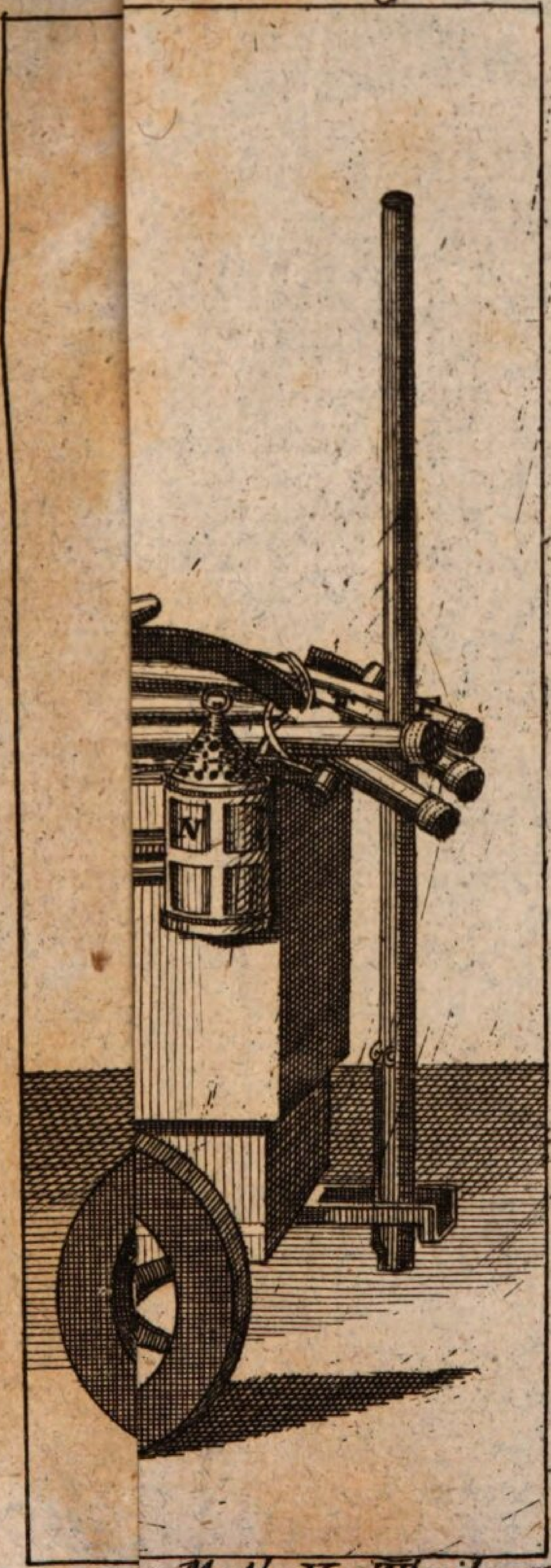

35
40
43
44


48
49
54
55


G
R
a
p
x
r
t
C
H
n
k
X
c
61
f
o
Y
g
m
p
A
q
C
γ
Z
M
E
e
h
F
I
E
F


66
P G Q
m g n
I F
M R
C γ
A g
69
A B
H I
K L
C D
G
H
71
F
E H
D
G
M
C
A Z
W X
w x
L
Y V
I
B
75
A
F
B E D
G
C
76
L
H I
B E D
K
O
G
B
E
L
D

VIII. Tafel.



s Math. V. Theil.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav, 1732-1787

Lehrbegriff der gesamten Mathematik

Bd.: Der fünfte Theil

Greifswald 1794

Math.u. 88-5
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594016-3
VD18 90700147